REPUBLIQUE GABONAISE

DIRECTION DU BACCALAUREAT

2018 : MATHEMATIQUES
Série : C
Coef. : 5
Durée : 4 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 : Questions à choix multiples (**5pts**)

Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Une bonne réponse vaut 1pt, une mauvaise réponse fait perdre 0,25pt, l'absence de réponse ne donne droit à aucun point et n'en fait perdre aucun ; si le total des points est négatif, la note est ramenée à zéro.

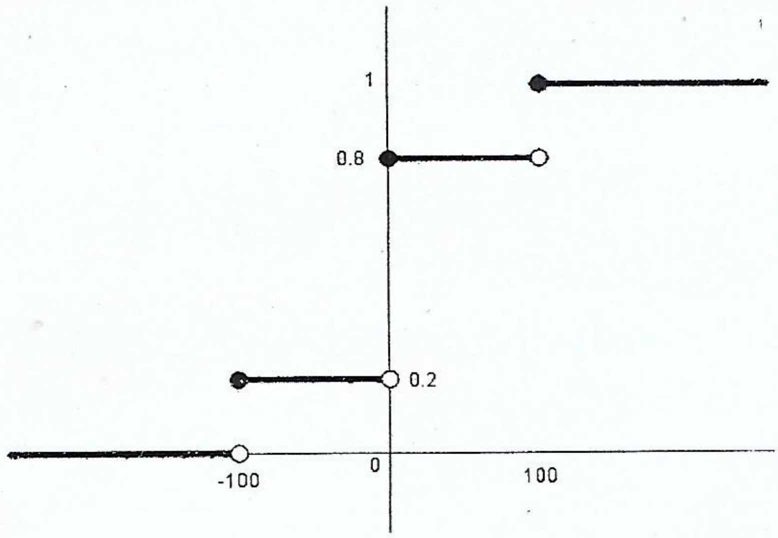
1. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|\bar{z}+i| = |i-1|$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Le cercle de centre A d'affixe i et de rayon 2	Le cercle de centre A d'affixe $-i$ et de rayon 2	Le cercle de centre A d'affixe i et de rayon $\sqrt{2}$	Le cercle de centre A d'affixe $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$

2. La courbe paramétrée (ζ) définie par : $\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = t^2 + t \end{cases}$ $(t \in \mathrm{IR})$ admet au point $M(1)$ une tangente dont un vecteur directeur est $\vec{u}$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(0;1)$	$(-1;2)$	$(-1;0)$	$(1;1)$

3. Soit X la variable aléatoire dont la fonction de répartition est représentée ci - dessous :



Laquelle des valeurs suivantes est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
-20	0	-100	$\frac{1}{100}$

4. On considère une parabole (P) définie dans un repère orthonormé par $(O;\vec{i};\vec{j})$ par :

$y=\frac{1}{4}x^2-2x+1$

Quelles sont les coordonnées du foyer F de la parabole (P) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(4;-3)$	$(0;1)$	$\left(\frac{1}{4};-2\right)$	$(4;-2)$

5. On considère un plan (P) d'équation cartésienne $x+y-z-1=0$, un point $A(1;-1;2)$ de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan (P), laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
La droite (AH) a pour coefficient directeur le vecteur $\vec{u}(-1;1;-1)$	$AH=\sqrt{6}$	Le point H a pour coordonnées $(1;1;-1)$	Le point $B(1;1;1)$ appartient à $(P)\cap(AH)$

EXERCICE 2 : Arithmétique et Cryptographie **(5pts)**

Le but de cet exercice est de déterminer, à partir des propriétés des congruences et des propriétés de divisibilité dans Z, une procédure de cryptage et de décryptage d'un message donné.

A. Résolution d'une équation diophantienne

1. On considère l'équation $(E_1):17x-27y=1$ où x et y désignent deux entiers relatifs :

   a) Justifiez que l'équation (E_1) admet au moins une solution.

   b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminez un couple d'entiers relatifs $(x_0;y_0)$ solution de (E_1).

   c) Vous devez ensuite résoudre l'équation (E_1).

2. a) Déterminez une solution particulière de l'équation $(E):17x-27y=m$ où m est un entier relatif.

   b) Résolvez alors l'équation (E).

B. Application : Cryptographie

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci – dessous

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

La procédure de cryptage d'une lettre assimilée à un entier x compris entre 0 et 25 est la suivante :

Etape 1 : On calcule $17x+5$.

Etape 2 : On calcule le reste m de la division euclidienne de $17x+5$ par 27.

Etape 3 : On détermine à l'aide du tableau précédent la lettre correspondant à m.

1. En utilisant cette procédure de codage, codez le mot « **B A C** ».
2. Dans cette question on se propose de déterminer une procédure de décodage.

   a) Montrez que pour tous les nombres entiers relatifs x et m, $17x\equiv m[27]$ équivaut à $x\equiv 8m[27]$.

   b) Déduisez-en que x est le reste de la division euclidienne de $8m-40$ par 27.

   c) Décodez alors le mot de trois lettres « **VV F M** ».

EXERCICE 3 : Isométries du plan (4pts)

Soit $ABCD$un carré de sens direct tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et (Δ) la médiatrice du segment $[BC]$

Soit f une isométrie distincte de la symétrie orthogonale S_Δ, telle que : $\begin{cases} f(B) = C \\ f(D) = A \end{cases}$

1. Faitesune figure soignée.
2. Soit$O$ le milieu du segment $[BD]$.
   a) Montrez que O est l'unique point du plan invariant par f.
   b) Déduisez-en la nature et les éléments caractéristiques de f.
3. Soit g et h des applications du plan définies respectivement par : $g = foS_\Delta$ et $h = S_\Delta of$.
   a) Déterminez $g(A)$ et $g(C)$, et déduisez que $g = S_{(AC)}$.
   b) Montrez que $h = S_{(BD)}$.
4. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de goh.

EXERCICE 4 : Etude d'une fonction logarithme népérien – calcul d'aire (6pts)

Dans tout l'exercice, $n$désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1

Partie A : Encadrement d'une intégrale

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

1. a) Etudiez le sens de variation de la fonction g.
   b) Déduisez-en que pour $n \geq 3$ et $n \leq x \leq n+1$, on a : $0 < g(n+1) \leq g(x) \leq g(n)$.
2. On pose pour $n > 1$, $a_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$.
   a) A l'aide d'une intégration par partie, calculez a_n.
   b) Montrez que pour tout $n \geq 3$, $0 < a_n \leq g(n)$, puis déduisez la limite de a_n en $+\infty$.

Partie B : Etude d'une fonction – Calcul d'aire

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln x}{x} - 1$ et (ξ)sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1. a) Justifiez que $f$est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis calculer $f'(x)$.
   b) Montrez que la fonction f'admet un minimum que l'on précisera, puis déduisez le signe de $f'(x)$.
   c) Dressez le tableau de variations de la fonction f.
2. a) Montrez que (ξ) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote (D) dont on précisera l'équation.
   b) Déterminez les positions relatives de (ξ) et (D).
3. Calculez l'aire de la partie du plan délimitée par (ξ), (D) et les droites d'équation $x = n$ et $x = n+1$.
4. Quelle est la limite de cette aire quand $n$tend vers $+\infty$?