REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

2011 – MATHEMATIQUES
**Série : C-E**
**Durée : 4 h**
**Coef. : 5**

## EXERCICE I : 5 points

1) Soit le polynôme $P$ défini par :
$$P(z) = z^4 + (-6+i)z^3 + (17-7i)z^2 + (-26+14i)z + 20(1-i)$$
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 = -5 + 12i$.
   b) Vérifier que : $P(z) = [z^2 - (4-i)z + 5 - 5i][z^2 - 2z + 4]$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé$(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A, B, C$ et $\Omega$ d'affixes respectives 4; $1 + i\sqrt{3}$; $1 - i\sqrt{3}$ et 1.
   Soit $(E)$ l'ellipse de centre $\Omega$ passant par les points $A$ et $B$, et d'axe focal l'axe des abscisses.
   a) Déterminer $A'$ tel que $[AA']$ soit le grand axe de $(E)$.
   b) Démontrer que $B$ et $C$ sont des sommets de $(E)$.
   c) Trouver les foyers, les directrices associées et l'excentricité de $(E)$.
   d) Déterminer une équation cartésienne de $(E)$.
   e) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(E)$ avec l'axe des ordonnées.
   f) Tracer $(E)$.
3) Soit $f$ l'application affine du plan dans le plan qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que : $z' = (1-i)z + i$.
   a) Déterminer la nature exacte de $f$, puis préciser ses éléments caractéristiques.
   b) Déterminer l'expression analytique de $f$.
   c) Démontrer que $f$ est bijective.
   d) Déterminer la nature exacte de $(E')$ image de $(E)$ par $f$.
   e) Déterminer les foyers, les directrices associées, les sommets, l'axe focal et l'excentricité de $(E')$.



## EXERCICE II : 5 points

### PARTIE A :

1) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante d'inconnue $x$: $(E)$: $3x^2 + 6x + 5 \equiv 0 \;\; [7]$.
   a) Montrer que l'équation $(E)$ est équivalente à l'équation $(E')$ où :
   $(E')$: $3x(x+2) \equiv 2 \;\; [7]$
   b) Recopier et compléter le tableau des congruences modulo 7 suivant :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x$ | | | | | | | |
| $x+2$ | | | | | | | |
| $3x(x+2)$ | | | | | | | |

   c) En déduire les solutions de l'équation $(E)$.
2) Un entier naturel $A$ s'écrit $\overline{361}^{\beta}$ dans le système de numération de base $\beta$ et a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.
   a) Démontrer que : $3\beta^2 + 6\beta - 2 \equiv 0 \;\; [7]$.
   b) En déduire l'ensemble des valeurs possibles de $\beta$.
3) Vérifier que 8 est une valeur possible de $\beta$ .

**PARTIE B :**

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $(x, y)$ suivante :

$$(F): x^2 + 10x = y^2 + 46.$$

1) Vérifier que l'équation $(F)$ est équivalente à : $(x+5)^2 - y^2 = 71$.
2) Démontrer que 71 est premier.
3) Déterminer alors l'ensemble des solutions de $(F)$.

**PROBLEME :** **10 points**

**PARTIE A :** **«Déterminer la fonction dérivée d'une bijection réciproque»**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = tanx$.

1) Etudier la dérivabilité de $f$.
2) Calculer $f'(x)$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$; puis vérifier que $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$.

3- a) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
- b) Dresser le tableau complet de variation de $f$.
- c) Démontrer que $f$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle $J$ à préciser.

4- a) On désigne par $g$ la bijection réciproque de $f$. Démontrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

où $g'$ désigne la fonction dérivée de $g$.
- b) Dresser le tableau complet de variation de $g$ sur $\mathbb{R}$.

**PARTIE B :** « **Déterminer la limite d'une fonction définie par une intégrale et donner du sens à la notation $\int_0^{+\infty} f(x)dx$** ».

1) Soit $h$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{4+x^4}$

Vérifier que pour tout réel $x$, on a :

$$h(x) = \frac{1}{8} \times \frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{8} \times \frac{x-2}{x^2-2x+2}$$

2) Pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}$, on pose :

$$H_1(x) = \frac{1}{8} g(x+1) \;\; et \; H_2(x) = \frac{1}{8} g(x-1)$$

a) Etudier la dérivabilité des fonctions $H_1$ et $H_2$.
b) Calculer $H_1'(x)$ et $H_2'(x)$ où $H_1'$ et $H_2'$ désignent respectivement les dérivées des fonctions $H_1$ et $H_2$.

3) Soit $G$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{t^4+4} dt$$

a) Démontrer que $G$ est impaire.
b) Etudier la dérivabilité de $G$, puis calculer $G'(x)$ où $G'$ désigne la fonction dérivée de $G$.
c) Etudier le sens de variation de $G$ sur $\mathbb{R}$.

4) En remarquant que :

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$
$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$
$$x + 2 = (x+1) + 1$$
$$x - 2 = (x-1) - 1$$

Démontrer que l'on a :

$$G(x) = \frac{1}{16} ln\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}\right) + \frac{1}{8} g(x + 1) + \frac{1}{8} g(x - 1)$$

5) On définit $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+4} dx$ par :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{1}{t^4 + 4} dt$$

Calculer alors : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+4} dx$

**PARTIE C :** « **Etude d'une suite numérique** »

1) On désigne par $(U_n)$ la suite définie pour tout entier $n \geq 1$par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 1}$$

a) Donner la valeur exacte de $U_1$et $U_2$.
b) Déterminer le signe de $(U_n)$.
c) Etudier le sens de variation de $(U_n)$.

2) En exploitant le sens de variation de la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, démontrer que pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$ de l'intervalle $[n; n + 1]$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{(n + 1)^2 + 1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2 + 1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^2 + 1} dx$$

En déduire que : $U_n \leq \int_0^n \frac{1}{x^2+1} dx$.

3) Démontrer que la suite $(U_n)$est convergente et que :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n \leq \frac{\pi}{2}$$