REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2000 – 1 – MATHEMATIQUES

Série : C-E
Durée : 4 heures
Coef. : 5

EXERCICE n° 1 : (5 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ensemble (H) des points de coordonnées (x , y) vérifiant la relation $-23x^2 + 3y^2 + 26\sqrt{3}\,xy = 36$.

Soit f l'application qui au point M(x,y) associe le point M'(x',y') tel que :

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y \end{cases}$$

On pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1° Exprimer z' en fonction de z. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2° a) Déterminer une équation cartésienne de (H') image de (H) par f .

b) Démontrer que (H') est une hyperbole dont on précisera les sommets, les foyers et l'excentricité.

c) Construire (H') puis en déduire la nature et une construction de (H).

3° Soit (C) la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{\cos t} \\ y(t) = 2\tan t \\ t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

et M(t) le point de (C) de coordonnées (x(t) ; y(t)).

a) Démontrer, en comparant M(- t) et M(t), que la courbe (C) admet un axe de symétrie.

b) Etudier les variations des fonctions x et y sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

c) Montrer que (C) est une partie de (H')

d) Construire (C) sur le même graphique.

EXERCICE n° 2 : (4 points)

Dans le plan orienté, on considère le losange OABC tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3}$ et OA = a où a est un réel strictement positif.

Le cercle (Γ), de centre O et de rayon a, coupe le segment [OB] en E.

Soit F le point de la demi-droite [OC) tel que CF = EB et C situé entre O et F.

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et r_2 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

On considère la transformation $g = r_1 o r_2$.

1° a) Déterminer les images des points O et A par g.

b) Démontrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.
En déduire que les droites (EF) et (OA) sont perpendiculaires et que EF = OA.

c) Déterminer et construire l'image (Γ') de (Γ) par g.

2° La perpendiculaire à la droite (OC) passant par E coupe la droite (AB) en Ω.

a) Démontrer que le triangle $E\Omega A$ est rectangle isocèle en Ω.

b) En admettant que deux rotations de même angle qui coïncident en un point sont égales et en utilisant la question 1° a) déduire le centre de la transformation g.

c) Démontrer que les droites (EF), (AC) et $(O\Omega)$ sont concourantes en un point H qui est l'orthocentre du triangle OAE.

3° Soit G le point d'intersection de la droite (OE) et (Γ') avec $G \neq E$.

a) Démontrer que G est l'image de C par g.
b) Indiquer une construction de l'image D de B par g sans faire intervenir le point Ω.

PROBLEME : (11 points)

Pour tout entier naturel n ($n \geq 2$), on considère la fonction f_n définie sur IR par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(0;\ \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Pour tout entier naturel n supérieur où égal à 2 , on considère la fonction g_n définie sur IR par : $g_n(x) = (n - x)e^x - n$.

1° a) Calculer les limites de g_n en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Etudier les variations de g_n puis dresser son tableau de variation.

2° a) Calculer $g_n(0)$ puis montrer que $e^{n-1} - n > 0$ pour tout entier n supérieur où égal à 2.
b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une seule solution non nulle $\alpha_n \in [n-1;+\infty[$
c) Montrer que $\alpha_n \in [n-1;n]$ puis en déduire que $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

3° Déterminer le signe de $g_n(x)$ sur IR .
4° Préciser les coordonnées du maximum M_n de (C_n) et en déduire que les points M_n appartiennent à une courbe dont on déterminera l'équation.

PARTIE B : Etude des fonctions f_n.

1° Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis donner une équation de la tangente (T_n) à (C_n) au point d'abscisse 0 (pour la dérivabilité on supposera deux cas : $n = 2$ et $n > 2$).

2° a) Calculer, selon la parité de n, la limite de f_n en $-\infty$.

b) Calculer la limite de f_n en $+\infty$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

3° a) Calculer la dérivée de f_n et vérifier que pour tout x non nul, $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}g_n(x)}{(e^x-1)^2}$.

b) Etudier, selon la parité de n, le signe de $f_n'(x)$ sur IR puis dresser le tableau de variation de f_n dans chaque cas.

4° Pour tout entier naturel p ($p \geq 1$), étudier la position relative des courbes (C_{2p+1}) et (C_{2p}).

5° Construire dans le même repère les courbes (C_2) et (C_3). (on prendra $\alpha_2 \cong 1{,}9$ et $\alpha_3 \cong 2{,}9$).

PARTIE C : Etude d'une suite .

Soit h_p la fonction définie sur $I = [p-1\ ;\ p]$ par $h_p(x) = p - \dfrac{p}{e^x}$ où p est un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_{n+1} = h_p(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = p-1$.

1° Montrer que pour tout réel $x \in I$, les équations $g_p(x) = 0$ et $h_p(x) = x$ sont équivalentes.

2° a) Montrer que pour tout $x \in I$ on a $h_p(x) \in I$.

b) Démontrer que $|h_p'(x)| \leq \dfrac{p}{e^{p-1}}$ pour tout réel $x \in I$.

3° On pose $k_p = \dfrac{p}{e^{p-1}}$ pour tout entier $p \geq 2$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$;

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$|u_{n+1} - \alpha_p| \leq k_p |u_n - \alpha_p|$ puis $|u_n - \alpha_p| \leq k_p^{\,n}$.

En déduire la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite.

c). Déduire de la question précédente une valeur approchée à 10^{-4} près de α_2.

PARTIE D : Suite définie par une intégrale.

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la suite (v_n) par :

$v_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1° Justifier l'existence de la suite (v_n).

2° Démontrer que la suite (v_n) est décroissante et minorée par 0. Que peut-on conclure ?

3° a) Montrer que pour tout réel x strictement positif : $e^x - 1 > x$ .En déduire que pour tout réel x positif ou nul : $f_n(x) \leq x^{n-1}$;

b) En utilisant la question précédente , montrer que $v_n \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout entier $n \geq 2$.

En déduire la limite de (v_n).

FIN