

BAC C GABON

session 97

EXERCICE I (5 points)

Dans le plan orienté, on considère deux carrés de sens direct ABCD et AEFG tels que: $AB=AE=a$ et $(\vec{AE}, \vec{AD}) = -\frac{\pi}{3}$.

Soit K le point tel que DAEK soit un parallélogramme : On appellera I son centre.

Utiliser la figure ci-jointe que l'on complètera au cours des questions.

Partie I :

En utilisant les isométries vectorielles, on veut montrer que $AK=GB$ et que les droites (AK) et (GB) sont perpendiculaires et que le triangle FKC est rectangle isocèle en K.

On désigne par ρ la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1°) a) Démontrer que l'on a : $\vec{AK} = \vec{AD} + \vec{GF}$.

b) Démontrer que l'on a $\rho(\vec{AD}) = \vec{AB}$ et $\rho(\vec{GF}) = \vec{GA}$. En déduire

alors que $\rho(\vec{AK}) = \vec{GB}$.

c) Que peut-on en conclure ?

2°) a) Démontrer que l'on a : $\vec{KF} = \vec{DA} + \vec{EF}$.

b) Démontrer que $\rho(\vec{KF}) = \vec{CK}$ puis conclure.

Partie II :

Soit s la similitude directe qui transforme A en G et K en F.

1°) a) Démontrer que le triangle EAD est équilatéral et que EADK est un losange.

b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

2°) On cherche à construire son centre que l'on notera O.

a) Soit J le point tel que AGJ soit un triangle équilatéral de sens direct.

Quel est l'ensemble (C) des points M tel que $(\vec{MA}, \vec{MG}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$?

b) Soit P le barycentre du système de points pondérés $\{(G, 3); (A, -1)\}$.

Démontrer que l'ensemble (C') des points M du plan tels que

$$\frac{MG}{MA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
 est le cercle de centre P et de rayon $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) En déduire la construction du point O.

EXERCICE II (4 points)

Soit $(y_n)_{n \geq 0}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} - y_n = n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1°) Exprimer, pour tout entier naturel n, y_n en fonction de n.

2°) Dans un plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) unité 1 cm, on considère les points $M_n(n, y_n)_{n \geq 0}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, M_n appartient à la conique (P) d'équation $x^2 - 2y = 0$.

b) Tracer (P) en précisant sa nature et ses éléments caractéristiques (foyer, directrice)

3°) On considère les points A, B, C de (P) d'abscisses respectives a, b et c (a, b et c sont des réels non nuls et deux à deux distincts) et G le centre de gravité du triangle ABC.

On désigne par $(T_A), (T_B), (T_C)$ les tangentes à (P) respectivement en A, B, C.

La perpendiculaire en A à (T_A) s'appelle la normale en A à (P); on la notera (N_A) .

a) Montrer qu'une équation de (N_A) s'écrit : $y - 1 = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a^2$

b) Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection des normales (N_A) et (N_B) puis l'abscisse x_2 du point d'intersection des normales (N_B) et (N_C) .

c) En déduire que si les normales $(N_A), (N_B)$ et (N_C) sont concourantes alors G appartient à l'axe focal de (P).

PROBLEME (11 points)

Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction définie sur IR par :

$$f_0(x) = e^x \text{ et si } n \text{ est non nul, } f_n(x) = \frac{(1-x)^n e^x}{n!}.$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un plan rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) l'unité graphique étant 2 cm.

Le problème a pour but d'étudier, suivant la parité de n, le comportement des fonctions f_n , de construire deux courbes particulières afin d'obtenir, à partir de suites définies à l'aide de ces fonctions f_n , des limites remarquables.

Partie A:

I Variations de la fonction f_n pour $n \geq 1$.

1°) Déterminer, suivant la parité de n, les limites de f_n lorsque x tend vers $(+\infty)$. (Pour la première de ces limites, on pourra se ramener à une limite connue en posant $X = 1 - x$.)

2°) Etudier, suivant la parité de n, le sens de variation de f_n et dresser les tableaux de variations correspondants.

3°) Etudier, suivant la parité de n, les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}) .

II Tracé de courbes et calcul d'aire.

1°) a) Dresser les tableaux de variations de f_1 et f_2 .

b) Préciser les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2) et les construire dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2°) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'_2(x) = f_2(x) - f_1(x)$.

En déduire, en cm², l'aire du domaine plan limité par ces deux courbes et les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$.

Partie B: Etude d'une suite et calcul de limites

Soit a un réel fixé tel que : $0 \leq a \leq 1$ et soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$U_n = \int_a^1 f_n(x) dx$$

1°) Calculer U_0 .

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leq U_n \leq \frac{(1-a)^n}{(n+1)!} U_0, \text{ et en déduire que la suite } (U_n)_{n \geq 0} \text{ converge vers } 0$$

3°) a) Etablir à l'aide d'une intégration par parties que pour $n \geq 0$,

$$\text{on a } U_{n+1} = U_n - \frac{(1-a)^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

b) En déduire que pour $n \geq 0$ on a :

$$U_n = e^{-a} \left[\frac{(1-a)^0}{0!} + \frac{(1-a)^1}{1!} + \dots + \frac{(1-a)^n}{n!} \right]$$

4°) Pour $n \geq 0$ on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(1-a)^k}{k!} = \frac{(1-a)^0}{0!} + \frac{(1-a)^1}{1!} + \dots + \frac{(1-a)^n}{n!}.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^{1-a}$.

5°) Pour $n \geq 0$ on pose

$$A_n = \frac{1}{2^0 \times 0!} + \frac{1}{2^1 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \dots + \frac{1}{2^n \times n!}$$

$$\text{et } B_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \sqrt{e}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = e$

Partie C: Une autre suite et calcul d'autres limites.

Pour tout entier naturel n on pose $V_n = \int_1^2 f_n(x) dx$.

1°) a) Montrer que $V_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^2 (x-1)^n e^x dx$

b) Etablir que $0 \leq \int_1^2 (x-1)^n e^x dx \leq e^2$ et en déduire que $|V_n| \leq \frac{e^2}{n!}$ pour tout entier naturel n.

c) Déterminer alors la limite de la suite $(V_n)_{n \geq 0}$.

2°) a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $f'_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$.

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on a : $f_n(x) = f'_0(x) + f'_1(x) + \dots + f'_n(x)$.

c) Montrer alors que

$$V_n = f_0(2) + f_1(2) + \dots + f_n(2) - e$$

d) On pose pour $n \geq 0$,

$$T_n = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Montrer que $V_n = e^2 T_n - e$ (on utilisera la question c)

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

3°) En utilisant les limites de B_n et T_n quand $n \rightarrow +\infty$, calculer les limites quand $n \rightarrow +\infty$ des expressions suivantes :

$$C_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{2n!}.$$

$$D_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}.$$