REPUBLIQUE GABONAISE

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

92 - 2 - MATHEMATIQUES

Séries : C et C.

Durée : 4 heures

Coef. : 5

EXERCICE 1 (4 points)

1°) Calculer $(i + \sqrt{3})^4$. En déduire les racines quatrièmes du nombre complexe :

$$a = \frac{1}{32}(-1 + i\sqrt{3})$$

2°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$32(2iz + 1)^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0 \qquad (1)$$

b) Démontrer que les images dans le plan complexe des quatre racines de l'équation (1) sont les sommets d'un carré dont on donnera une représentation graphique.

EXERCICE 2 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A, B, C, D sont 4 points non coplanaires.

H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

1°) a) Rappeler la définition du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

b) Montrer que $AH = \dfrac{|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}|}{\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\|}$

2°) On donne $A(2,1,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,0,1)$, $D(1,2,1)$.

a) Calculer la hauteur AH du tétraèdre ABCD.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD) ; retrouver la hauteur AH du tétraèdre ABCD.

c) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

PROBLEME (12 points)

A - Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que :

$$f(x) = x + (x^2 + x + 1)^{1/2}$$

.../...

1°) Démontrer que f est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donner le tableau des variations de f et construire sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (Unités : 2 cm). On démontrera que C admet deux droites asymptôtes d'équations : $\quad y = -\frac{1}{2}$ et $y = 2x + \frac{1}{2}$.

2°) Soit C' la courbe image de C_f par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$. Construire C' et montrer que C' est la courbe représentative de la fonction g telle que :

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 1}.$$

3°) a) Démontrer qu'il existe trois constantes réelles a, b et c telles que pour tout réel x, $x \neq -1/2$, $\frac{x^2 - 1}{2x + 1} = ax + b + \frac{c}{2x + 1}$

b) Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_1^{1+\sqrt{3}} g(x)\,dx$

c) En déduire l'aire du domaine D, ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant f(1)$$

B – Soit h la fonction de la variable réelle x telle que :

$$h(x) = \ln[f(x)]$$

1°) Etudier les variations de h et construire sa courbe représentative C_h dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (Unités : 3 cm). Préciser la tangente à C_h du point d'abscisse 0.

2°) Démontrer que h est une bijection d'un intervalle J (à préciser) sur $\mathbb{R}$. Construire Γ, courbe représentative de h^{-1} (bijection réciproque de h). Expliciter $h^{-1}(x)$.

3°) Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = h(U_n) + 1$, pour tout entier naturel n. Démontrer, par récurrence, que U est strictement croissante et majorée par 3. En déduire que U est convergente.

4°) Soit V la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$V_n = \int_n^{n+1} [h(t) - \ln t]\,dt$$

a) Pour $t > 0$, en écrivant :

$$h(t) - \ln t = \ln\left[1 + \left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)^{1/2}\right]$$

démontrer que la fonction $t \mapsto h(t) - \ln t$ est strictement décroissante.

b) En déduire la convergence de la suite V vers un réel que l'on déterminera.