BACCALAUREAT SESSION UNIQUE DE JUIN 2008

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

SERIES : C - E

DUREE : 4 Heures

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1

1°) Démontrer que pour tout nombre réel x, on a :

$$-1 < \frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} < 1 \ .$$

2°) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers]–1 ; 1[définie par :

$$f(x) = \frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} \cdot ¿$$

¿

a) Démontrer que f est une application.

b) Etudier le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variations de f.

d) Construire la courbe (***C***) représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

3°) a) Justifier que f est une bijection.

Soit g la bijection réciproque de f.

b) Justifier que g est dérivable sur]– 1 ; 1[.

c) Calculer g'(x) pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle]– 1 ; 1[.

EXERCICE 2

1°) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation : $\dot{3}x^2 + \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$.

2°) Un entier naturel A s'écrit $\overline{361}$ dans le système de numération de base b et a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.

a. Démontrer que $3b^2 + 6b - 2 \equiv 0\ [7]$.

b. En déduire l'ensemble E des valeurs de b.

Suite en page 2

3°) On suppose dans cette question que b = 8.

a. Vérifier que b appartient à E.

b. Donner l'écriture décimale de A.

c. Démontrer que A est un nombre premier.

4°) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (x,y) :

$$x^2 + 6x = y^2 + 232.$$

PROBLEME

Le plan complexe (**P**) est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$. On considère la droite (**D**) d'équation $x + y - 4\sqrt{2} = 0$, et le point $F(\sqrt{2}\,,\sqrt{2})$.

Partie A

1°) Soit M un point du plan d'affixe z et M_1 le point d'affixe z_1, image de M par la symétrie orthogonale s par rapport à (**D**).

Exprimer z_1 en fonction de z.

2°) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport –2. On désigne par f l'application h o s.

a) Démontrer que f a pour écriture complexe :

$z' = 2\mathrm{i}\,\{\bar{z} - 8\sqrt{2}\,(1+i)\cdot¿$

b) Indiquer la nature et les éléments caractéristiques de f.

3°) Soit H le milieu du segment $[MM_1]$ avec $M_1 = s(M)$.

a) Démontrer que :

$$\mathrm{MH} = \left|\frac{z + i\bar{z} - 4\sqrt{2}\,(1+i)}{2}\right|$$

b) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que :

$$|z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{z + i\bar{z} - 4\sqrt{2}\,(1+i)}{2}\right|$$ est l'ellipse de foyer F, de

directrice (**D**) dont on précisera l'excentricité.

4°) a) Démontrer que dans le repère $(O\,;\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$, la courbe ($\Gamma$) a pour équation cartésienne :

$$3(x^2 + y^2) - 2xy - 16 = 0.$$

b) Démontrer que le point O est le centre de (Γ).

Suite en page 3

c) Déterminer une équation cartésienne de l'axe focal (Δ) de (Γ) et préciser la distance focale.

d) Soit F' le second foyer de (Γ).

Donner les coordonnées de F' puis la définition bifocale de (Γ).

5°) Soit r la rotation de centre O et d'angle ($-\frac{\pi}{4}$).

On désigne par (Γ') l'image de (Γ) par r.

a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ').

b) Construire (Γ) et (Γ') dans le même repère.

Partie B

6°) Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Démontrer que la moitié de l'aire du domaine intérieur à l'ellipse (E) est calculée, en unités d'aire, par l'intégrale $\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, \mathrm{dx}$.

b) A l'aide du changement de variable x = a cos θ, $\theta \in [0 ; \pi]$, calculer $\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, \mathrm{dx}$.

c) En déduire que l'aire, en unités d'aire, du domaine intérieur à l'ellipse (E) est πab.

7°) Quelle est l'aire du domaine intérieur de l'ellipse (Γ) ?

FIN