République Gabonaise
Ministère de l'Éducation Nationale
et de l'Enseignement Supérieur.
Office National du Baccalauréat.

2006 - 1 - Mathématiques
Série : B
Durée : 3H
Coefficient : 3

Exercice 1 Cet exercice comporte deux parties indépendantes l'une de l'autre.

Partie A *1 point*

Une urne contient cinq boules jaunes portant les lettres G,A,B,O,N et sept boules vertes portant les lettres A,F,R,I,Q,U,E. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement au hasard et sans remise deux boules de cette urne.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

J : « Les deux boules tirées sont jaunes »

F : « Les deux boules tirées sont de couleurs distinctes »

Partie B *4 points*

On considère le jeu suivant : On tire simultanément deux boules de l'urne.

Lorsqu'on obtient deux voyelles de même couleur, on gagne 60 francs ;

Lorsqu'on obtient deux voyelles de couleurs différentes, on gagne 45 francs ;

Lorsqu'on obtient une seule voyelle, on gagne 30 francs ;

Dans les autres cas, on ne gagne rien.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le gain correspondant.

1°) Quelles sont les valeurs prises par X ?

2°) Déterminer la loi de probabilité de X.

3°) Soit l'événement G : « Gagner au terme de ce jeu ». Montrer que $p(G) = \frac{17}{22}$

4°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

Exercice 2 *4 points*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) On désigne par a, b, c trois nombres réels et on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = ax^2 + bx + c$. On note (P) la courbe représentative de h. Sachant que $h'(1) = -1$, déterminer a, b, c pour que (P) passe par les points A(2 ; 7) et B(1 ; 10).

2°) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \ln(-2x^2 + 3x + 9) - 2\ln 2$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

a) Justifier que g est définie sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}\,;\,3\right[$

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.

Problème *11 points*

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire 2,5 points

Soit g la fonction de la variable réelle x définie sur IR par : $g(x)=3+2(3-x)e^{2-x}$.

1°) Déterminer la valeur exacte, puis la valeur approchée, à 10^{-2} près, de g(4)

2°) a) Calculer g'(x).

b) En déduire le sens de variation de g.

c) Dresser le tableau de variation de g. (On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de g)

d) En déduire le signe de g(x) sur IR.

Partie B : Étude d'une fonction *6 points*

On considère maintenant la fonction f définie sur IR par : $f(x)=3x+2(x-2)e^{2-x}$.

1°) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2-x)e^{2-x}\right]$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2°) a) Démontrer que f'(x) = g(x). En déduire le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3°) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, I, J) (Unités graphiques : 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées).

a) Démontrer que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite (D) d'équation y = 3x en $+\infty$.

b) Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de la droite (D).

c) Déterminer les coordonnées du point A de $\mathscr{C}$ où la tangente (T) est parallèle à la droite (D). Placer A.

4°) Représenter sur une même figure les droites (D), (T) et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Calcul d'une aire. *2,5 points*

1°) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, $J=\int_1^2(2x-4)e^{2-x}dx$.

2°) Soit $\mathscr{D}$ le domaine plan, ensemble des points M(x ; y) tels que : $\begin{cases}1 \le x \le 2\\ f(x)\le y\le 3x\end{cases}$

Hachurer $\mathscr{D}$ et calculer l'aire de $\mathscr{D}$ en cm².

CORRIGE PROPOSE

Série B

EXERCICE 1.

A. Détermination de $P(J)$: « les deux boules sont jaunes »

$$P(J_1 \cap J_2) = P(J_1) \times P_{J_1}(J_2) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \Rightarrow P(J) = \frac{5}{33}.$$ 0,5

Détermination de $P(F)$: « les deux boules sont de couleurs différentes »

$$P(F) = P(V \cap J_1) + P(J_1 \cap V) = P(V) \times P_V(J_1) + P(J_1) \times P_{J_1}(V)$$

$$P(F) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{35}{66}$$ 0,5

B. 1. Valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{0;30;45;60\}$ 0,5

2. Loi de probabilité de X

k	0	30	45	60
$P(X=k)$	$\frac{[illegible]}{66}$	$\frac{36}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{7}{66}$

3°/ 0,5

4°/ Calcul de $\mathrm{E}(X)$ et de $\mathrm{V}(X)$

$$\mathrm{E}(X) = \frac{30 \times 36 + 45 \times 8 + 60 \times 7}{66} = \frac{17}{22}.$$ 0,5

$$\mathrm{V}(X) = \frac{30^2 \times 36 + 45^2 \times 8 + 60^2 \times 7}{66} - \left(\frac{1860}{66}\right)^2 = \frac{39200}{121}$$ 0,5

EXERCICE 2.

1. Détermination de a, b et c

$A(2,7) \in P$ alors $4a + 2b + c = 7$; $B(1,10) \in P$ alors $a + b + c = 10$.

La tangente en B est parallèle à la droite d'équation $y = -x + 3$ alors

$h'(x) = -1$ soit $2a + b = 1$

On obtient le système

$$\begin{cases} a + b + c = 10 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$ 1,5

On trouve : $a = -2$ $b = 3$ $c = 9$.

2. a) Pour tout $x \in \left]-\frac{3}{2};3\right[$, on a $-2x^2+3x+9>0$ alors g est définie sur $\left]-\frac{3}{2};3\right[$. 1

b) Intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.

- avec l'axe des ordonnées : $h(0)=\ln\frac{9}{4}$
- avec l'axe des abscisses : $h(x)=0 \Leftrightarrow \ln(-2x^2+3x+9)=\ln 4$
  $\Leftrightarrow -2x^2+3x+5=0$

On trouve $x=-1$ *ou* $x=\frac{5}{2}$

Les points d'intersections avec les axes sont : 1,5

$E_1\left(0;\ln\frac{9}{4}\right)$ $E_2(-1;0)$ $E_3\left(\frac{5}{2};0\right)$.

PROBLEME

Partie A. (2,5)

1. Valeur exacte et valeur approchée de $g(4)$

$g(4)=3-2e^{-2}$ et $g(4)\simeq 2,73$ *à* 10^{-2} *près*. 0,5

2. a) Calcul $g'(x)$ 0,5

$$g'(x)=2(x-4)e^{2-x}.$$

b) $g'(x)$ a le signe de $(x-4)$ donc 0,5

si $x\leq 4$, g est décroissante si $x\geq 4$, g est croissante.

c)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		↘	$3-2e^{-2}$	↗	

0,5

d) Signe de $g(x)$ 0,5

g admet un minimum $g(4)\simeq 2,73$ positif donc $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)>0$.

Partie B.

1. a) Limite de f en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2-x}=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}2(x-2)e^{2-x}=-\infty$ 0,5

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}3x=-\infty$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

b) Limite de f en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}2(2-x)e^{2-x}=0$ 0,5

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 0,5

2. a) Calcul de $f'(x)$

$$f'(x)=3+2\left[e^{2-x}+(x-2)e^{2-x}\right]=3+2(3-x)e^{2-x}=g(x)$$ 0,5

Donc, pour tout x réel, $f'(x)>0$ et f est strictement croissante. 0,5

b) Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0,5

3. a) Asymptote à $\mathscr{C}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-2(2-x)e^{2-x}\right]=0$ donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=3x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. 0,5

b) Position de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$ 0,5

$\left[f(x)-3x\right]$ a le signe de $x-2$

Donc si $x>2$, $f(x)\geq 3x$ et $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$

si $x<2$, $f(x)<3x$ et $\mathscr{C}$ est au-dessous de $\mathscr{D}$.

c) Coordonnées de A. 0,5

(T) est parallèle à $\mathscr{D}$ donc $f'(x)=3$ *soit* $2(3-x)^{2-x}=0$ *et* $x_A=3$

$$f(3)=9+\frac{2}{e} \quad et \quad A\left(3\,;9+\frac{2}{e}\right).$$

4. Courbe $\mathscr{C}$ 1,5

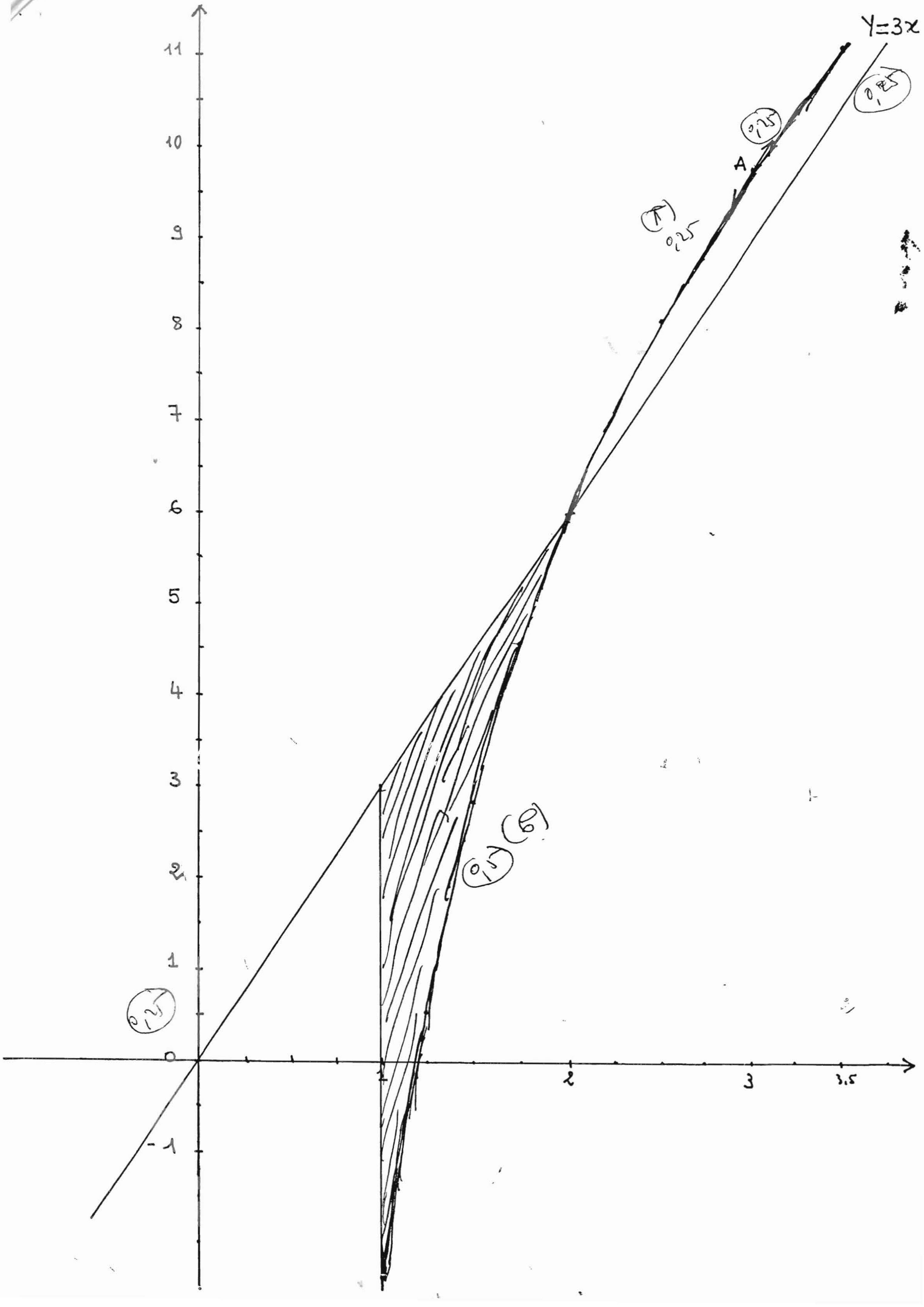
__Partie C__

1. On pose $u(x)=2x-4 \quad u'(x)=2$
$v'(x)=e^{2-x} \quad v(x)=-e^{2-x}$

ainsi $J=\left[(-2x+4)e^{2-x}\right]_1^2+2\int_1^2 e^{2-x}dx=\left[(-2x+2)e^{2-x}\right]_1^2=-2.$ 1

2° Aire $\mathscr{A}$

$\mathscr{A}=(4cm\times 2cm)\times J=16cm^2.$ 1



Y=3x
0,75
0,25
A
1
0,25
0,5
6
0,25
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
1
2
3
3,5