REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2 001 – 1 **MATHEMATIQUES**

Série : A1
Durée : 3 heures
Coefficient : 4

EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité 2 cm, on considère le point A d'affixe $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. a) Calculer $|a|$. En déduire que A est sur le cercle (C) de centre O et de rayon 1.

   b) Placer A dans le repère (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) (on expliquera la méthode utilisée).

   c) Ecrire a sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.

2. a) Soit B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Donner la forme exponentielle du complexe b, affixe du point B ; puis l'écrire sous forme trigonométrique.

   b) Montrer que $b = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$.

3. On désigne par C et D les points d'affixes respectives $\bar{a}$ et -1. Calculer le module et un argument du complexe $\frac{\bar{a}+1}{a+1}$. En déduire la nature exacte du triangle ACD.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans cet exercice toutes les probabilités seront données sous forme de fraction irréductible.

A l'infirmerie d'un village, on utilise l'examen de la goutte épaisse pour la recherche du paludisme. La probabilité pour une personne quelconque d'avoir un examen positif est de $\frac{3}{5}$.

1. Quelle est la probabilité d'avoir un examen négatif ?
2. Si l'examen est positif, l'infirmier propose trois sortes de médicaments : médicament A, médicament B ou médicament C.
   On considère les événements suivants :

   A : « le patient choisit le médicament A » de probabilité p_1 ;
   B : « le patient choisit le médicament B » de probabilité p_2 ;
   C : « le patient choisit le médicament C » de probabilité p_3.

   a) Sachant que la probabilité de l'événement A est $p_1 = \frac{1}{2}$ et que $3p_3 = 2p_2$ déterminer p_2 et p_3.

   b) Le médicament A coûte 1 000 francs, le médicament B coûte 3 000 francs et le médicament C coûte 5 000 francs. On désigne par X la variable aléatoire égale au prix du médicament choisi. Si le test est négatif, X = 0.
   Donner la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance mathématique et en donner une interprétation.

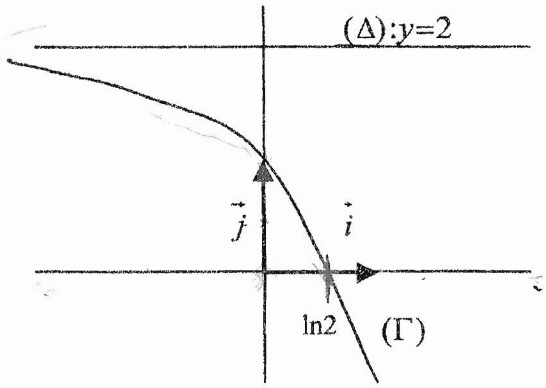
3. Une famille de 4 personnes passe cet examen.
   a) Calculer la probabilité pour que toutes ces 4 personnes aient un test négatif.
   b) Calculer la probabilité d'avoir exactement deux tests positifs sur les quatre.

PROBLEME (10 points)

Partie A

La courbe (Γ) ci-après est la représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction g définie et dérivable sur IR.

1. Par lecture graphique, donner $g(\ln 2)$, $\lim_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et le signe de $g(x)$ sur IR
2. On suppose que $g(x) = a - e^x$ où a est un réel. Déterminer a.
3. Soit G la primitive de g sur IR qui vérifie $G(\ln 2) = 2\ln 2$.
   a) Déduire de la question 1 le sens de variation de G sur IR.
   b) Déterminer $G(x)$.



Partie B

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 2x + 2 - e^x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
   b) Vérifier que pour tout x non nul, $f(x) = 2 + x\left(2 - \frac{e^x}{x}\right)$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
   c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$ puis étudier la position de (C) par rapport à (D).
2. Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.
4. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β où $\alpha < \beta$.
   b) Montrer que $1{,}6 < \beta < 1{,}7$.
5. Tracer (C) ; (D) et (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
6. Calculer en cm^2, la valeur exacte de l'aire du domaine limité par la courbe (C) la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$

Sujet 1 : Proposition de Barème Bac 2001

B

2001

Exercice 1 (5 pts)

1/ a) module : 0,25

$A \in \mathcal{C}$: 0,25

b) Representat° et explication : 0,25 × 2

c) forme trigonométrique : 0,5

forme exponentielle : 0,25

2/ a/ forme exponentielle de b : 0,5

forme trigonométrique : 0,5

b/ forme algébrique de b : 0,5

déduction $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$: 0,25 × 2

3/ Module du quotient : 0,5

argument ----- : 0,5

Nature : 0,25

Exercice 2 (5 pts)

1/ 0,25

2/ a) P_2 et P_3 : 0,5 × 2

b) Loi de X : 2

E(X) : 0,5

Interprétat° : 0,25

3/ a) 0,5

b) 0,5

Problème

A (3,5 pts)

1/ 0,25×3 ; signe : 0,75

2/ 0,5

3/ a) 1

b) 0,5

B (6,5 pts)

1/ a) 0,5

b) 0,25 ; limite : 0,5

c) Existence Asymptote oblique : 0,5

Position : 0,5

2/ Dérivée : 0,5 ; Tableau de variat° : 0,5

3) 0,5

4) a) 1

b) 0,25

5/ graphique : 0,75

6/ 0,75

Correction Mathématiques Série A 1

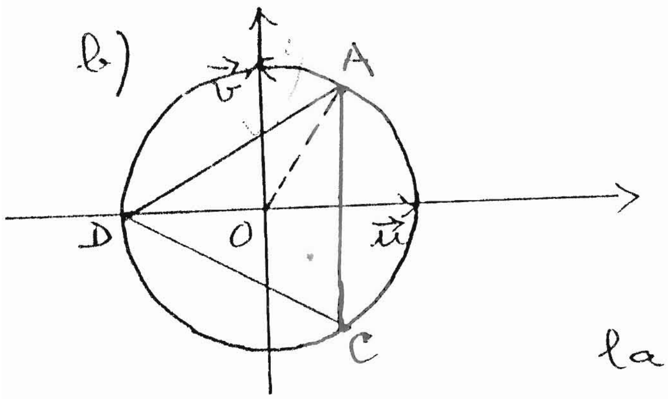
xercice 1 (5 points)

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1/ a) $|a| = 1$

$|a| = 1$ équivaut à $OA = 1$, donc $A \in \mathcal{C}(O;1)$

b)



– La droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points dont l'un a une ordonnée positive : c'est le point A

ou

– $\arg a = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ et $|a| = 1$, d'où la construction du point A.

c) $a = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ et $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$

2/ a) $r(A) = B$ équivaut à $b = a\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ soit $b = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}$

alors $b = e^{i\frac{7\pi}{12}}$, il s'en suit que $b = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$

b) $b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ soit $b = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

on en déduit que $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

3/ $\frac{\overline{a}+1}{a+1} = \overline{a}$ donc $\left|\frac{\overline{a}+1}{a+1}\right| = 1$

$\arg\frac{\overline{a}+1}{a+1} = \arg\overline{a}$ et $a \neq 0$ donc $\arg\frac{\overline{a}+1}{a+1} = -\arg a = -\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

Il en résulte que $DA = DC$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = -\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$; Le triangle ACD est donc équilatéral.

rcice 2

Exercice 2

1) La probabilité d'avoir un examen négatif est $\frac{2}{5}$

2) a/ p_2 et p_3 sont solutions du système : $\begin{cases} p_3 + p_2 = \frac{1}{2} \\ 3p_3 - 2p_2 = 0 \end{cases}$

on obtient $p_2 = \frac{3}{10}$ et $p_3 = \frac{1}{5}$

b/ $P(X=0) = \frac{2}{5}$; $P(X=1000) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

$P(X=3000) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{50}$; $P(X=5000) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{25}$

$X = x_i$	0	1000	3 000	5 000
p_i	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{3}{25}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 1440$$

Un patient dont le test est positif dépense en moyenne 1440F.

3) a/ La probabilité pour que toutes les 4 personnes aient un test négatif est $P = \left(\frac{2}{5}\right)^4$; $P = \frac{16}{625}$

b/ La probabilité d'avoir exactement deux tests positifs sur les quatre est $P' = C_4^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2$

$P' = \frac{216}{625}$

Problème

Problème

Partie A

1/ Par lecture graphique : $g(\ln 2)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$; $g(x)>0$ sur $]-\infty;\ln 2[$ et $g(x)<0$ sur $]\ln 2;+\infty[$

2/ $g(x)=a-e^{x}$

$g(\ln 2)=0$ donc $a=2$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=2$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$

alors $a=2$

3/a/ Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$, $G'(x)=g(x)$, donc d'après la question 1/. G est strictement croissante sur $]-\infty;\ln 2[$ et strictement décroissante sur $]\ln 2;+\infty[$

b/ $G(x)=2x-e^{x}+k$; puisque $G(\ln 2)=2\ln 2$, alors $k=2$; d'où $G(x)=2x+2-e^{x}$

Partie B

$$f(x)=2x+2-e^{x},\ x\in\mathbb{R}$$

1/ a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+2)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b) Pour tout x non nul, $2+x\left(2-\frac{e^{x}}{x}\right)=2+2x-e^{x}$

donc $f(x)=2+x\left(2-\frac{e^{x}}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{e^{x}}{x}\right)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

c/ $f(x)-(2x+2)=-e^{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^{x})=0$ donc la droite (D) d'équation $y=2x+2$ est bien asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$;

Pour tout réel x, $-e^{x}<0$ donc sur $\mathbb{R}$, (D) se trouve au-dessus de $(\mathcal{C})$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2 - e^{x}$; en remarquant que $f'(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}$, d'après la partie A 1/ on obtient le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

3/ $(T) : y = f'(0) \cdot x + f(0)$ soit $(T) : y = x + 1$

4/ a) f est dérivable et strictement croissante sur $]-\infty ; \ln 2]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $f(\ln 2) = 2\ln 2 > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet bien une solution unique dans $]-\infty ; \ln 2]$

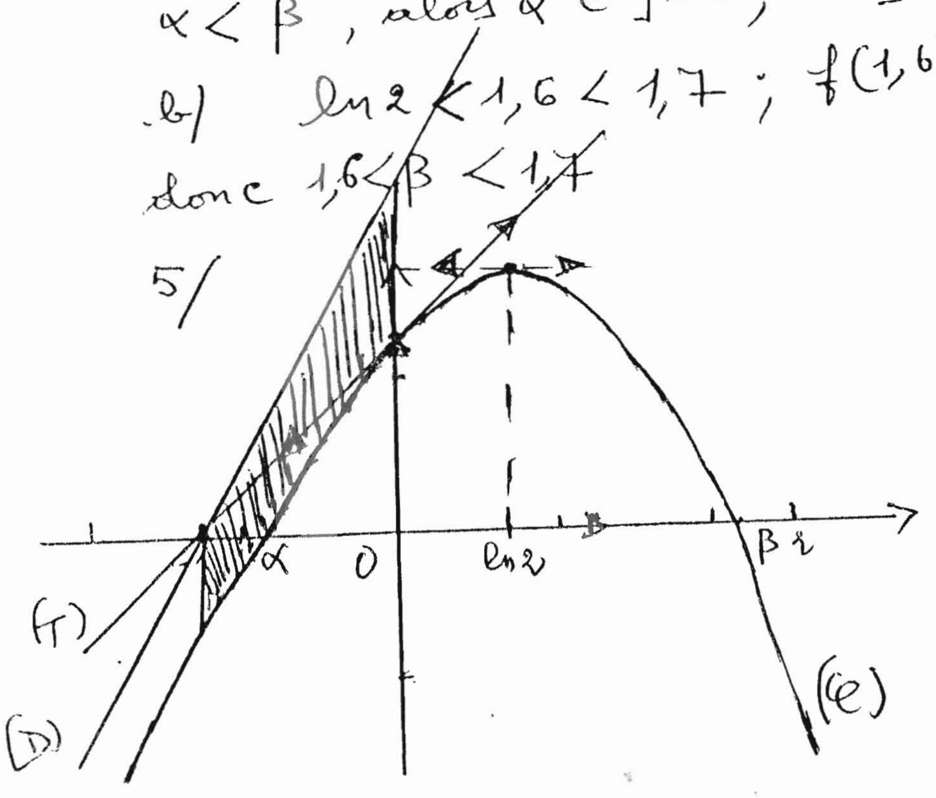
De même f est dérivable et strictement décroissante sur $]\ln 2 ; +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet aussi une solution unique dans $[\ln 2 ; +\infty[$

si α et β désignent les deux solutions précédentes, comme $\alpha \in]-\infty ; \ln 2]$ et $\beta \in [\ln 2 ; +\infty[$, alors $\alpha < \beta$

b) $\ln 2 < 1{,}6 < 1{,}7$; $f(1{,}6) > 0$ et $f(1{,}7) < 0$

donc $1{,}6 < \beta < 1{,}7$

5/



6/ $A = 4 \times \int_{-1}^{0} e^{x}\,dx \text{ cm}^2$

$A = 4\left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{cm}^2$