**REPUBLIQUE GABONAISE**
**OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT**

# 2003-1. MATHEMATIQUES

**SERIE :** A1
**DUREE :** 3 heures
**Coefficient :** 4

## EXERCICE 1 ( 5 points )

1. On considère le polynôme $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réels.
   a) Calculer la dérivée première et la dérivée seconde notées P' et P'' de la fonction polynôme $P : x \mapsto P(x)$.
   b) Déterminer $a$, $b$, $c$ et $d$ sachant que :
   $P(0) = 6$ ; $P(2) = -4$ ; $P'(1) = -6$ et $P''(-1) = -10$ ; en déduire l'écriture du polynôme $P(x)$.
2. Soit le polynôme $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
   a) Calculer $Q(-2)$ ; en déduire la factorisation de $Q(x)$ sous la forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.
   b) Résoudre dans IR l'équation $Q(x) = 0$.
   c) En déduire la résolution dans IR des équations suivantes :
   (i) $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5(\ln x) + 6 = 0$.
   (ii) $5e^x - 6 = e^{3x} - 2e^{2x}$.

## EXERCICE 2 ( 5 points )

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5 ; on suppose que le tirage de chacune des 5 boules est équiprobable.

Une personne tire une boule au hasard, note son numéro et la remet dans l'urne ; puis elle tire une seconde boule et note son numéro.

On appelle $X$ la variable aléatoire définie de la manière suivante :

- si les deux numéros sont identiques, $X$ prend leur valeur commune ;
- si les deux numéros sont différents, $X$ prend la valeur du plus petit des deux numéros.

1. a) Préciser l'univers associé à cette expérience aléatoire.
   b) Quelles sont les différentes valeurs prises par $X$ ?
   c) Définir la loi de probabilité de $X$. (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).
   d) Calculer l'espérance mathématique de $X$.
   e) Calculer la probabilité de l'événement : « $X \geq 4$ ».
2. On répète 6 fois de suite ce jeu dans les mêmes conditions. (Les résultats seront donnés avec 3 chiffres après la virgule).
   a) Calculer la probabilité pour que l'événement : « $X \geq 4$ » soit réalisé exactement 3 fois.
   b) Calculer la probabilité pour que l'événement: « $X \geq 4$ » soit réalisé au moins une fois.

https://epreuvesetcorriges.com

**PROBLEME ( 10 points )**

**Partie A : Etude d'une fonction homographique**

Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $]-\infty ; \frac{3}{2}[$ par $g(x)=\frac{3+2x}{3-2x}$.

On désigne par $(\Gamma)$ sa représentation graphique dans un repère.

1. a) Calculer les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Donner une interprétation graphique des résultats.
2. a) Calculer $g'(x)$ où $g'$ est la fonction dérivée de $g$.
   b) Etudier le sens de variation de $g$ *et dr*esser le tableau de variation de $g$.
   c) Calculer $g(-\frac{3}{2})$ et donner le signe de $g$ sur l'intervalle $]-\infty ; \frac{3}{2}[$.

**Partie B : Etude d'une fonction composée avec ln**

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par

$f(x) = \ln(\frac{3+2x}{3-2x})$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique: *2 cm.* ( On rappelle que **f(x) = ln [*g(x)*]** ).

1. a) Montrer que $f$ est définie sur $]-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}[$.
   b) Déterminer les limites de f en $-\frac{3}{2}$ et en $\frac{3}{2}$.
   c) En déduire les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.
2. a) Montrer que $f$ est impaire.
   b) Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?
3. a) Calculer la dérivée f '(x) de f(x).
   b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation complet.
   c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
4. Construire $\mathscr{C}$, (T) et ses asymptotes dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**Partie C : Calcul d'aire**

On considère la partie **(E)** du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$ de $f$, l'axe des abscisses $(O,\vec{i})$, l'axe des ordonnées $(O,\vec{j})$ et la droite $(\Delta)$ d'équation $x = 1$.

1. a) Par une intégration par parties, montrer que l'aire $\mathscr{A}$ en unités d'aire de **(E)** est égale à $\frac{5\ln 5 - 6\ln 3}{2}$.
   b) Donner en $cm^2$ la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis un arrondi d'ordre 2 de cette valeur.
2. a) Soit l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Déduire de la parité de f, la valeur de I.
   b) Quelle est l'aire $\mathscr{A}'$, en unités d'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites $(\Delta')$ et $(\Delta)$ d'équations respectives $x = -1$ et $x = 1$ ?

https://epreuvesetcorriges.com

# Corrigé –Bac A1- Session 2003- sujet1

## Exercice 1 ( 5 points)

1°) a) $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 0,25 pt

$x \in \mathbb{R}$: $P''(x) = 6ax + 2b$ 0,25 pt

b) $\begin{cases} P(0) = 6 \\ P(2) = -4 \\ P'(1) = -6 \\ P''(-1) = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ 8a + 4b + 2c + d = -4 \\ 3a + 2b + c = -6 \\ -6a + 2b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -5 \\ d = 6 \end{cases}$

0,5 pt pour le système
1 pt pour la résolution
0,25 pt pour la conclusion

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ ..... 0,25 pt

2°) a) $Q(-2) = 0$ 0,25 pt

donc $Q(x)$ est factorisable par $(x + 2)$ : $Q(x) = (x + 2)(x^2 - 4x + 3)$... 0,25 pt

et $Q(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$ 0,25 pt

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$ ou $x = 3$ 0,25 pt

b) (i) $x > 0$ ; $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5(\ln x) + 6 = 0 \Leftrightarrow Q(\ln x) = 0$ 0,25 pt

$\Leftrightarrow x > 0$, $\ln x = -2$ ou $\ln x = 1$ ou $\ln x = 3$

$\Leftrightarrow$ $x = e^{-2}$ ou $x = e$ ou $x = e^3$ 0,50 pt

(ii) $5e^x - 6 = e^{3x} - 2e^{2x} \Leftrightarrow Q(e^x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 3$ 0,75 pt

## Exercice 2 ( 5 points)

1°) a) L'univers $\Omega$ est l'ensemble des couples $(x ; y)$ de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}^2$ 0,50 pt

b) Les valeurs de x sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 0,50 pt

c) Loi de X 1,25 pt

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| p(X=k) | $\frac{9}{25}$ | $\frac{7}{25}$ | $\frac{5}{25}$ | $\frac{3}{25}$ | $\frac{1}{25}$ |

*Le candidat doit expliquer comment il trouve la loi sinon 0,5 pt de pénalité.*

Vérification : $\sum_{k=1}^{k=5} p(X = k) = 1$ 0,25 pt

d) Calcul de l'espérance : $E(X) = 2,20$ 0,25 pt

e) $p(X \geq k) = p(X = 4) + p(X = 5) = \frac{4}{25}$ 0,50 pt

2°) a) Soit p la probabilité cherchée : $p = C_6^3 (\frac{4}{25})^3 (\frac{21}{25})^3 = 0,048$..... 0,75 pt

b) la probabilité p' cherchée est : $p' = 1 - C_6^0 (\frac{4}{25})^0 (\frac{21}{25})^6 = 0,648$ 1 pt

*si le candidat utilise une autre méthode, ne pas le pénaliser*

https://epreuvesetcorriges.com

**Problème (10 points)**

**Partie A**( 4 points) Pour tout x ∈ $]-\infty ; \frac{3}{2}[$ ; $g(x)= \frac{3+2x}{3-2x}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ ⇒la droite (Δ) d'équation y = -1 est une asymptote à (Γ) en -∞. 2 x 0,25pt

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} g(x)=+\infty$ ⇒la droite (D) d'équation x = $\frac{3}{2}$ est une asymptote à (Γ). 2 x 0,25pt

b) Pour tout x ∈ $]-\infty ; \frac{3}{2}[$ ; $g'(x) = \frac{12}{(3-2x)^2}$, 0,5 pt

donc pour tout x ∈ $]-\infty ; \frac{3}{2}[$ , g'(x) > 0 0,25 pt

g est strictement croissante sur $]-\infty ; \frac{3}{2}[$ 0,25 pt

c) Tableau de variation

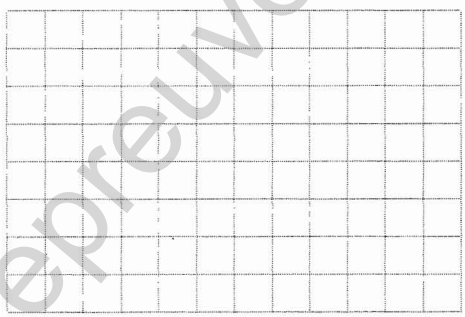
| $x$ | $-\infty$ | $3/2$ |
|---|---|---|
| signe de $f'$ | + | |
| $f$ | -1 ↗ | $+\infty$ |

0,25 pt

d) g(- $\frac{3}{2}$) = 0. En plaçant – $\frac{3}{2}$ et son image par dans le T.V. on trouve : 0,25pt

| $x$ | $-\infty$ | $-3/2$ | $+3/2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | - | 0 | + |

0,5 pt



1 pt pour la représentation complète

détail :

Asympt.2x0,25pt

Axes : 0,25pt

Allure : 0,25pt

**Partie B** ( 3 points)

$f(x) = \ln(\frac{3+2x}{3-2x})$

a) Pour tout x ∈ $]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}[$, $g(x) = \frac{3+2x}{3-2x} > 0$, donc f est définie sur $]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}[$. 0,5 pt

b) Pour tout x ∈$]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}[$, on a – x ∈$]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}[$, et f(-x) = - f(x), donc f est impaire 0,5 pt

*Ne pas pénaliser le candidat s'il ne précise pas que le domaine est symétrique par rapport à l'origine, par contre il doit détailler l'égalité f(-x) = - f(x).*

F est impaire, alors le point O est un centre de symétrie pour (*C*). 0,25 pt

https://epreuvesetcorriges.com

c) Tableau de variation complet de f : ln(g(x)) a même variation que g

| $x$ | $-3/2$ | $+3/2$ |
|---|---|---|
| signe de $f'$ | + | |
| $f$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

0,5 pt pour le T.V

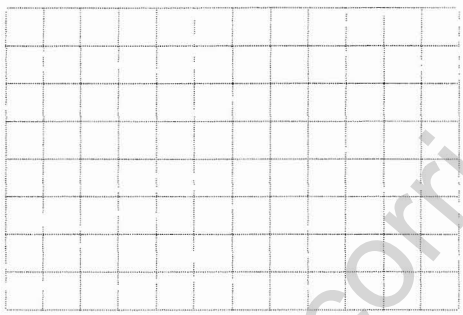
$\lim_{x\to -\frac{3}{2}} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to \frac{3}{2}} f(x)=+\infty$ donc les droites (D) et (d') d'équations respectives

x= $\frac{3}{2}$ et x = - $\frac{3}{2}$ sont asymptotes à $(C)$. 2 x0,25 pt

d) Construction de $(C)$ et ses asymptotes dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$

1pt pour la représentation complète

*Lesnon respect des unités, du tracé des asymptotes seront sanctionnés.*



Détails :

*Pénalités*

Asympt.: 0,25 pt

Axes : 0,25 pt

Allure : 0,5 pt

*Les tangentes remarquables n'ont pas été demandées.*

**Partie C** ( 3 points)

a) L'aire A exprimée en u. a. est : $A=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \ln(\frac{3+2x}{3-2x})dx$ *u.a.* 0,50 pt

On pose : $u(x)=\ln(\frac{3+2x}{3-2x})$ *alors* $u'(x)=\frac{12}{9-4x^2}$

$v'(x)=1$ *et* $v(x)=x$

Alors : $A=\left[x\ln(\frac{3+2x}{3-2x})\right]_0^1-\int_0^1 \frac{12x}{9-4x^2}dx$ *u.a.* 1 pt

$A=\ln 5+\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{-8x}{9-4x^2}dx=\ln 5+\frac{3}{2}\left[\ln(9-4x^2)\right]_0^1=\ln 5+\frac{3}{2}\ln 5-\frac{6}{2}\ln 3=\frac{5\ln 5-6\ln 3}{2}$ *u.a.*

Pour les détails 0,5 pt

b) 1u.a. = 4 cm$^2$ alors A= ( 10ln5 – 12ln3) cm$^2$ = 2,91 cm$^2$. 0,25 pt

c) $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$ car f est impaire. 0,5 pt

d) A' = 2A = ( 5ln5 –6ln3) u. a. ( on accepte la valeur en cm$^2$) 0,25 pt

https://epreuvesetcorriges.com