LJAA
TC

2000 -2001

DEVOIR DE MATHEMATIQUES n° 9

Durée : 4 heures

EXERCICE 1

5

Dans le plan orienté on considère un triangle isocèle ABC tel que AB = AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

fig 1

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$. Pour la figure, que l'on complétera en traitant les questions, on prendra AB = 5 cm.

1. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = r_C \circ r_A$.

a. Déterminer les images par f de A et de B. 0,5

b. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. 0,5
On désigne par O son centre.

c. Démontrer que ABOC est un losange. 0,5

2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C′ l'image de C par s, H le milieu du segment [BC] et H′ son image par s.

a. Donner une mesure de l'angle de s. 0,25
Montrer que C′ appartient à la droite (OA). 0,75

b. Donner l'image par s du segment [OA] et montrer que H′ est le milieu de [OB]. 0,25 + 0,25

c. Montrer que (C′H′) est perpendiculaire à (OB). En déduire que C′ est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC. 1

EXERCICE 2

5

fig 0,5

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle ABCD tel que $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un angle droit direct ; I désigne le milieu de [AB].

A. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1. Vérifier que les points C et I appartiennent à $\mathscr{E}$. 0,25 + 0,25

2. a. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$. 1

b. En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires. 0,25

B. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = az + b$, a et b étant des nombres complexes avec $a \neq 0$.

1. Déterminer les nombres a et b pour que $S(D) = C$ et $S(C) = B$. 1

2. Soit T la similitude directe qui au point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{i\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i.$$

Déterminer le rapport et l'angle de T. 0,5

3. Montrer que la similitude T transforme B en I. 0,5

4. En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI). 0,25

5. Montrer que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

0,25

PROBLEME

Partie A

Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $I = [0 + \infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

Soit a un élément non nul fixé dans I. Pour tout entier naturel n, on pose

$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I_0(a)$. 0,5
2. Montrer que, pour tout x de I et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n(0) = 0$ et en déduire que, pour tout $n \geq 1$, 0,5

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}.$$ 0,5

3. En déduire que pour tout $n > 0$, $I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$. 0,75

4. Dans cette question, on pose $a = 1$.

On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

4

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $\mathscr{R}$ (unité graphique 3 cm).

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n. 0,75 + 0,75

b. Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout $x \in [0, 1]$,

$0 \leq$ $f_n(x) \leq \frac{1}{n!}x^n$. 0,75

c. En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, 0,5

puis la limite de u_n. 0,75

d. Déduire enfin que : $e = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$. 0,75

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$; on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan.

2,5

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. 0,25

b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a : 0,25

$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$$

c. En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$. 0,25

d. Étudier la position relative de (C) et (Δ). 0,25

2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. 0,5

3. Tracer la droite (Δ) et la courbe (C). 0,5

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on pose

$$F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})dt.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Soit x un réel strictement positif. En utilisant la question 1. de la **partie B** donner une interprétation géométrique de $F(x)$. 0,75

2. Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. 0,5

3. Soit a un réel strictement positif.

a. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 1 + a]$, on a $\frac{1}{1+a} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1$. 0,75

b. En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction ln, établir que $\frac{a}{1+a} \leqslant \ln(1 + a) \leqslant a$. 0,5

4. Soit x un réel strictement positif.

Déduire de la question **3.** : $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}dt \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x e^{-2t}dt$ 0,5

puis $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-2x}) \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$. 0,5

3,5

5. On admet que la limite de $F(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté l.

Établir que $\frac{1}{2}\ln 2 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}$. 0,5

6. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t})dt$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \ln(1 + e^{-2n})$. 0,5

(On pourra utiliser le sens de variations de la fonction h, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(t) = \ln(1 + e^{-2t})$).

b- Determiner la limite de la suite (u_n) 0,75

a

d

Devoir N°9 (1

I (5)

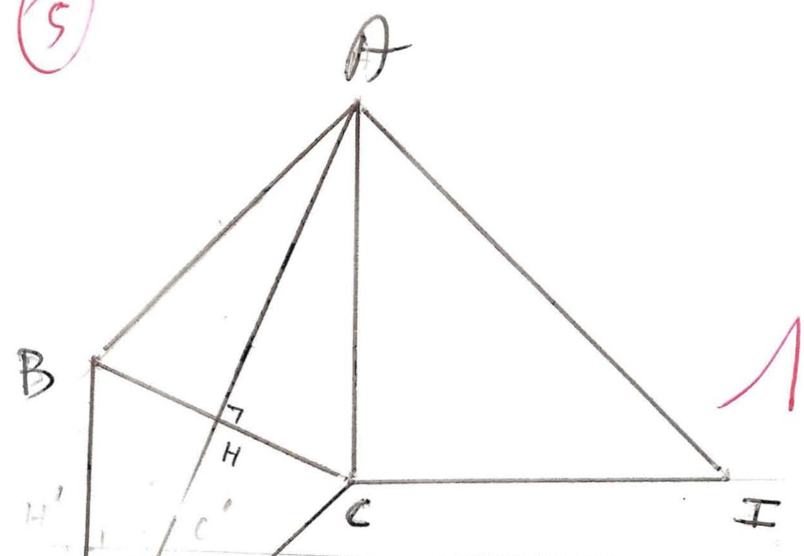
$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{4}$

$(\vec{CA}, \vec{CI}) = -\frac{\pi}{2}$

$r_A = r(A, \frac{\pi}{4})$

$r_C = r(C; -\frac{\pi}{2})$

$f = r_C \circ r_A$



1

a)

r_A	
A	A
B	C

r_C	
A	I
C	C

f	
A	I
B	C

$\boxed{f(A) = I \quad f(B) = C}$ 0,5

b) f est la composée de 2 rotations d'angles orientés $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$ [donc f est une rota d'angle $-\frac{\pi}{4}$. 0,5

or $-\frac{\pi}{4} \neq 0\ [2\pi]$ donc f est une rota d'angle $-\frac{\pi}{4}$

c) M q ABOC est un losange.

f	
O	O
A	I
B	C

$f = S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$

OBA isocèle en B car $(\vec{OH}, \vec{OB}) = (\vec{AB}, \vec{AH}) = \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$ car (AH) biss de $\widehat{CAB}$

OCA isocèle en C car $(\vec{OC}, \vec{OH}) = (\vec{AH}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$ 0,5

donc H mil de (AO) et (BC) Ainsi ABOC est un losange.

2°)

s	
O	O
A	B
C	C'
H	H'

a) $\theta = (\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{OC}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$ 0,5

$(\vec{OC}, \vec{OC'}) = (\vec{OC}, \vec{OA})\ [2\pi]$

$(\vec{OC}, \vec{OC'}) - (\vec{OC}, \vec{OA}) = 0\ [2\pi]$

$(\vec{OA}, \vec{OC'}) = 0\ [2\pi]$ donc $C' \in (OA)$. 0,5

b) l'image par s de [OA] est [OB] et H mil [OA]

donc l'image H' de H par s est le mil de [OB] car toute 0,5

Sim dir CV le milieu.

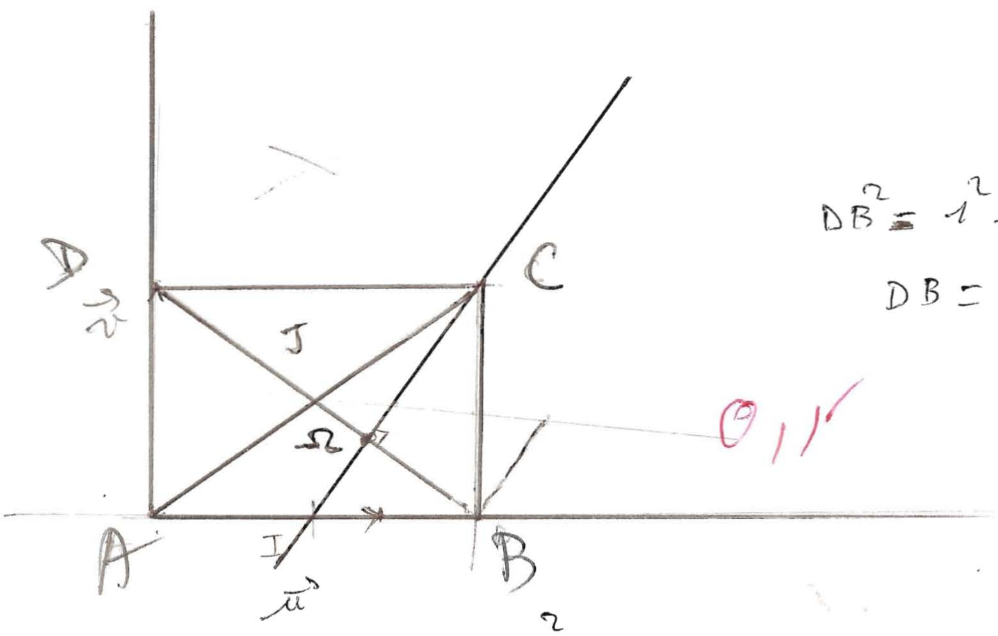
c) ABOC est un losange et $(OA) \perp (BC) = (CH)$

donc $(OA) \perp (CH)$, s transf (OA) en (OB) et (CH) en (C'H')

donc $(C'H') \perp (OB)$ car s CV l'orthog. (C'H') est la med

de [OB] car $(C'H') \perp (OB)$ et H' mil [OB] donc C point

d'inters de deux média est centr du Cercle circonscrit à OBC.



$DB^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 = 1+2=3$

$DB = \sqrt{3}$

0,5

A. $\mathcal{E}$ / $M \in \mathcal{P}$ tq $MD^2 - MB^2 = 1$

1- $CD^2 - CB^2 = \sqrt{2}^2 - 1^2 = 2-1=1$ donc $C \in \mathcal{E}$ 0,25

$ID^2 - IB^2 = (AD^2 + AI^2) - IB^2 = AD^2 + AI^2 - AI^2 = AD^2 = 1$ donc $I \in \mathcal{E}$. 0,5

2- a) $MD^2 - MB^2 = 1$ ssi $(\vec{MD} - \vec{MB})(\vec{MD} + \vec{MB}) = 1$.

$2\,\vec{BD} \cdot \vec{MJ} = 1$ où J mil $[DB]$

$\vec{DB} \cdot \vec{JM} = \frac{1}{2}$

soit H le proj $\perp$ de M sur (DB)

$\overline{DB} \times \overline{JH} = \frac{1}{2}$ donc $\overline{JH} = \frac{1}{2\,\overline{DB}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\mathcal{E}$ est la perpendiculaire à (DB) en H tq $\overline{JH} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 1

$JH = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\mathcal{E}$ est la droite (IC). ~~alors~~ $\mathcal{E} = (IC)$

b- $\mathcal{E}$ est la perpendiculaire à (DB) en H 0,25

donc $(DB) \perp (CI)$.

$D\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$

B- $z' = az + b$ $\quad \frac{S}{\begin{array}{c|c} D & C \\ C & B\end{array}}$ $\quad z_D = i \quad z_C = \sqrt{2} + i \quad z_B = \sqrt{2}$

$\begin{cases} z_C = a z_D + b \\ z_B = a z_C + b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \sqrt{2} + i = ai + b \\ \sqrt{2} = a(\sqrt{2}+i) + b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -\sqrt{2} - i = -ai - b \\ \sqrt{2} = a(\sqrt{2}+i)+b \end{cases}$

$-i = a(\sqrt{2}+i-i) = a\sqrt{2}$

$a = -\frac{i}{\sqrt{2}} = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1

$b = \sqrt{2} + i - ai = \sqrt{2} + i - i\left(-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} + i = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

$a = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$ et $z' = -i\frac{\sqrt{2}}{2} z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

(3

$T : M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = -i\frac{\sqrt{2}}{2} z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

$a = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 0,25 et $\arg a = -\frac{\pi}{2}$ 0,25

T est une simil direct de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3 - $z'_B = -i\frac{\sqrt{2}}{2} z_B + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = -i\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = -i + i + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = z_I$

0,25

donc $T(I) = B$.

Ω	
D	C
C	B
B	I

R	
D	C
B	I
Ω	Ω

4 -

$S(D) = C$
$S(B) = I$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$ et $(DB) \perp (CI)$ 0,25

5 - $\begin{cases} \Omega I = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega B \\ (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega I}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} \Omega C = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega D \\ (\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

$(DB) \cap (CI) = \{H\}$ et $\begin{cases} (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HI}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ (\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HC}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]. \end{cases}$ 0,25

donc $H = \Omega$.

$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ $\quad I = [0; +\infty[$. $\quad a \in I$ et a fixé; (4

$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,dx$

1°.. $I_0(a) = \int_0^a f_0(x)\,dx = \int_0^a e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^a = -\left[e^{-x}\right]_0^a = -(e^{-a}-1)$

$\boxed{I_0(a) = 1 - e^{-a}}$ 0,1

2°) mq $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n(0) = 0$

$f_n'(x) = \frac{1}{n!}\left[n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}\right] = \frac{x^{n-1} e^{-x}}{n!} - \frac{x^n e^{-x}}{n!} = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ 0,5

$f_n'(0) = f_{n-1}(0) - f_n(0) = 0$

donc $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n(0) = 0$

$\int_0^a f_n'(x)\,dx = \int_0^a f_{n-1}(x)\,dx - \int_0^a f_n(x)\,dx$

$\left[f_n(x)\right]_0^a = I_{n-1}(a) - I_n(a) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$ 0,5

donc $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n e^{-a}}{n!}$

3°) Deduisons en que $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n e^{-a}}{n!}$

$\cancel{I_1(a)} - I_0(a) = -\frac{a e^{-a}}{1!}$

$I_2(a) - \cancel{I_1(a)} = -\frac{a^2 e^{-a}}{2!}$

$I_3(a) - I_2(a) = -\frac{a^3}{3!} e^{-a}$

$\vdots$

$\cancel{I_{n-1}(a)} - I_{n-2}(a) = -\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a}$ 0,75

$I_n(a) - \cancel{I_{n-1}(a)} = -\frac{a^n}{n!} e^{-a}$

Par additio⁰ m à membre et après simplificatio

$I_n(a) - I_0(a) = -\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}\right) e^{-a}$ or $I_0(a) = 1 - e^{-a} = 1 - \frac{a^0}{0!} e^{-a}$

donc $I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right) e^{-a}$.

$a=1 \quad u_n = 1-\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$ (5

a) $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!} \geq 0$ car $x^n \geq 0$, $e^{-x} > 0$ $n! > 0$ donc $u_n \geq 0$. 0,25

et u_n est l'aire en u.a de la partie du plan limitée par (C_n), l'axe (OI) et les droites $x=0$ et $x=1$. 0,25

b) Mq $\forall x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$ 0,25

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^0 \leq e^x \leq e \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$1 \leq e^x \Rightarrow e^{-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leq \frac{x^n}{n!}$

donc $f_n(x) \leq \frac{1}{n!}x^n$ $\forall x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}x^n \Longrightarrow 0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\,dx$

$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$ 0,5

$0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$ car $(n+1)n! = (n+1)!$

$(n+1)! = (n+1)\, n \times n-1 \times n-2 \times \cdots \times 2 \times 1$

chacun des fact. tend vers $+\infty$ donc $\lim (n+1)! = +\infty$

et $\lim \frac{1}{(n+1)!} = 0$ donc $\lim u_n = 0$ 0,25

d) $u_n = 1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)e^{-1} =$

$e\,u_n = e - \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ 0,5

$\lim e\,u_n = 0$ car $\lim u_n = 0$ donc $\lim \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$.

$f(x) = \ln(e^{x} + e^{-x}) \quad x \in [0; +\infty[$.

1- a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} + e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 0,25

b) $f(x) = \ln e^{x}(1 + e^{-2x}) = \ln e^{x} + \ln(1 + e^{-2x}) = x + \ln(1 + e^{-2x})$ 0,25

c) $f(x) - y = f(x) - x = \ln(1 + e^{-2x})$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = \ln 1 = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$. 0,25

donc (Δ) $y = x$ est asy obliq en $+\infty$.

d) $f(x) - y = \ln(1 + e^{-2x})$ et $e^{-2x} > 0 \Rightarrow 1 + e^{-2x} > 1$
$\Rightarrow \ln(1 + e^{-2x}) > 0$ 0,25

$f(x) - y > 0$ et (C) au dessus de (Δ).

2- f est der sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \dfrac{e^{x}(1 - e^{-2x})}{e^{x} + e^{-x}}$ 0,25

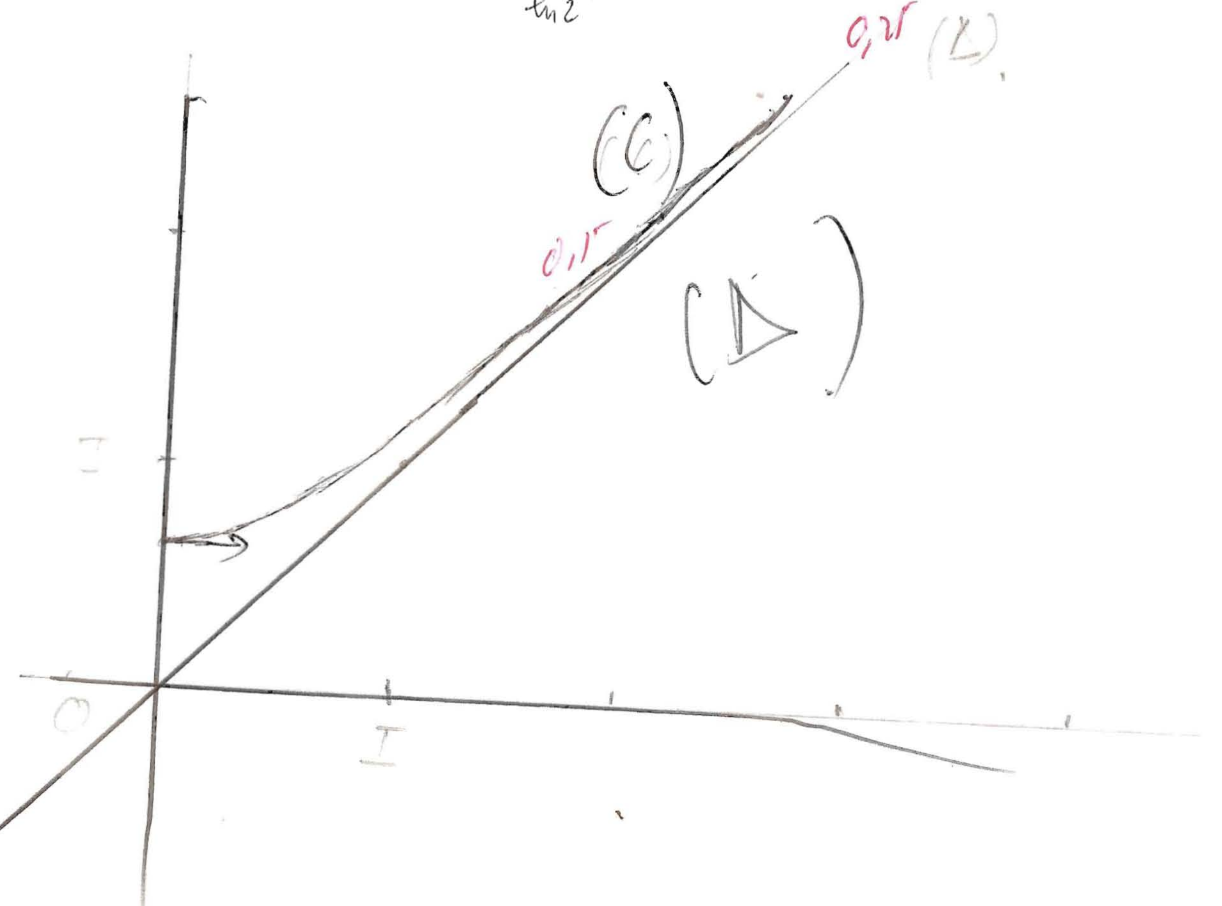
$1 - e^{-2x} \geq 0$ ssi $1 \geq e^{-2x}$ ssi $0 \geq -2x$ ssi $0 \leq x$

donc $f' > 0$ et f est str $\nearrow$
0,25

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	$\ln 2$ $\nearrow$	$+\infty$

0,25

3)



$F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt$ ((C) au dessus de (Δ)) 7

1°) $x \geq 0$ et $\ln(1+e^{-2t}) > 0$ d'après B donc $F(x)$ est l'aire en u.a de la partie du plan limitée par (C), (Δ) et les droites d'éq 0,25
$t = 0$ et $t = x$.

2°) F est la primitive sur $[0;+\infty[$ de la fonction g t.q
$g(x) = \ln(1+e^{-2x})$ donc F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et
$F'(x) = g(x) = \ln(1+e^{-2x}) > 0$ car $e^{-2x} + 1 > 1$ 0,25
F est str ↗ sur $[0;+\infty[$. 0,25

3°) $a > 0$

a) $t \in [1;1+a]$ ssi $1 \leq t \leq 1+a \Rightarrow \frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ 0,25

b) la fonction ln est déri sur $[1;1+a]$ et $\frac{1}{1+a} \leq (\ln)'(t) \leq 1$
en util l'in. A.F à $[1;1+a]$ avec $1 \leq 1+a$ on a
$\frac{1}{1+a}(1+a-1) \leq \ln(1+a) - \ln(1) \leq 1(1+a-1)$
$\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$: 0,5

4°) avec $e^{-2t} > 0$ on a $\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}$ 0,25

avec $x > 0$ $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt$ 0,25

$-\frac{1}{2}\left[\ln(1+e^{-2t})\right]_0^x \leq F(x) \leq -\frac{1}{2}\left[e^{-2t}\right]_0^x$

$-\frac{1}{2}\left[\ln(1+e^{-2x}) - \ln 2\right] \leq F(x) \leq -\frac{1}{2}(e^{-2x} - 1)$ 0,5

$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

$\lim \ln(1+e^{-2x}) = 0$ donc $\lim \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) = \frac{1}{2}\ln 2$

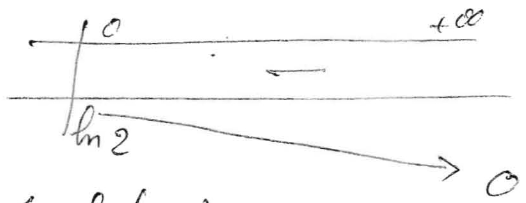
$\lim e^{-2x} = 0$ donc $\lim \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} = \frac{1}{2}$

donc $\boxed{\frac{1}{2}\ln 2 \le \ell \le \frac{1}{4}}$ 0,25

6°) $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\,dt$.

Soit $h(t) = \ln(1+e^{-2t})$ $t \geq 0$ $h'(t) = \frac{-2e^{-2t}}{1+e^{-2t}} < 0$.

h est str $\searrow$ sur $[0, +\infty[$



$n \le t \le n+1 \Rightarrow h(n+1) \le h(t) \le h(n)$.

$0 \le \ln(1+e^{-2t}) \le \ln(1+e^{-2n})$

0,5

$0 \le \int_n^{n+1} (1+e^{-2t})\,dt \le \ln(1+e^{-2n}) \int_n^{n+1} dt$

$[t]_n^{n+1} = n+1-n = 1$

$0 \le u_n \le \ln(1+e^{-2n})\,[t]_n^{n+1}$

donc $0 \le u_n \le \ln(1+e^{-2n})$ $\forall n$.

b) $\lim \ln(1+e^{-2n}) = 0$ donc $\lim u_n = 0$. 0,25