30

(4,5)

LJAA
TC

200 -200

DEVOIR DE MATHEMATIQUES n° 3
Durée : 4 heures

EXERCICE 1

Dans le plan orienté on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

fig 1

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$. Pour la figure, que l'on complétera en traitant les questions, on prendra $AB = 5$ cm.

1. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = r_C \circ r_A$.

a. Déterminer les images par f de A et de B. 0,5

b. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. 0,5
On désigne par O son centre.

c. Démontrer que ABOC est un losange. 0,5

2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C′ l'image de C par s, H le milieu du segment [BC] et H′ son image par s.

a. Donner une mesure de l'angle de s. 0,25
Montrer que C′ appartient à la droite (OA). 0,5

b. Donner l'image par s du segment [OA] et montrer que H′ est le milieu de [OB]. 0,25 + 0,25

c. Montrer que (C′H′) est perpendiculaire à (OB). En déduire que C′ est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC. 0,5 + 0,25

EXERCICE 2

(4,5)

Le plan orienté ($\mathscr{P}$) étant rapporté à un repère orthogonal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par (D) et (Δ) les droites d'équations respectives $3x - 5y + 2 = 0$ et $7{,}2x - 12y = -5$

1°/ Démontrer que (D) et (Δ) sont parallèles. 0,5

2°/ Soit A(1 ;1) un point de (D).

a) Déterminer l'équation de la droite (Δ_1) passant par A et perpendiculaire à (D). 0,5

b) Montrer que le projeté orthogonal H de A sur (Δ) a pour coordonnées $\left(\frac{135}{136}; \frac{413}{408}\right)$. 0,5

3°/ On désigne par f la transformation définie par: $f = S_{(\Delta)} \circ S_{(D)}$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. 0,5

4°/Soit F l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z - \frac{1}{68} + \frac{5}{204}i$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de F. 0,25

b) Déterminer l'image (D'_1) de la droite (D_1) d'équation $y = -x$ par l'application F. 0,25 + 0,25

5°/ On donne l'expression de la transformation G :

$$\begin{cases} x' = \frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y - \frac{6}{17} \\ y' = \frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y + \frac{10}{17} \end{cases}$$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation G. 0,25 + 0,25 + 0,5

b) Déterminer l'image de l'ensemble (E) d'équation : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ par la transformation G. 0,5

6°/ On considère enfin l'application $S = F \circ G$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S. 0,25

30

PROBLEME (11)

PARTIE A *Etude d'une fonction exponentielle* 2¼

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1- On note f ', f '' et $f^{(3)}$ les dérivées successives de f. Etablir que :
$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f^{(3)}(x) = 4x(3 - 2x^2)e^{-x^2}$ 0,5

2- Etudier les variations de f '' et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. 1,5 (0,5 sig ; 0,5 TV ; 0,5 $C_{f''}$)

3- En déduire que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ |f''(x)| \le 2$ 0,25

PARTIE B *Calcul approché d'une intégrale.*

On souhaite obtenir une valeur approchée de l'intégrale : $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ à 10^{-2} près.

B1 3

Soit u la fonction affine croissante définie par $u(x) = \alpha x + \beta$ et soit g la fonction composée définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (f \circ u)(x)$. On pose $\phi(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt - 2xg(0)$ avec $x \in \mathbb{R}_+$.

1- Sans chercher à calculer $\phi(x)$, établir que si G est une primitive de la fonction g alors :
$\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \phi(x) = G(x) - G(-x) - 2xg(0)$. 0,25

2- En déduire que : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \phi''(x) = g'(x) - g'(-x)$. 0,25 + 0,25

3- a. Démontrer en utilisant **PARTIE A 3-** que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ |g''(x)| \le 2\alpha^2$. 0,5

b. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ |\phi''(x)| \le 4\alpha^2 x$ 0,5

c. Par intégrations successives, démontrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ -\frac{2}{3}\alpha^2x^3 \le \phi(x) \le \frac{2}{3}\alpha^2x^3$. 0,75

c. Encadrer $\phi(1)$ et en déduire que : $-\frac{2}{3}\alpha^2 \le \int_{-1}^{+1} g(t)dt - 2g(0) \le \frac{2}{3}\alpha^2$. 0,25 + 0,25

B2 2

1- Démontrer que $\int_{-1}^{+1} g(t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u)du$ 0,5

2- On se place dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2n}$ et $\beta = \frac{2k+1}{2n}$, $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Etablir que :

$$\forall\ k \in \{0,1,\dots,n-1\} \quad -\frac{1}{12n^3} \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du - \frac{1}{n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \le \frac{1}{12n^3}$$ 0,5

3- En déduire que :

$$\left| \int_0^1 f(u)du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right| \le \frac{1}{12n^2}$$ 0,5

4- Déterminer le plus petit entier n qu'il faut prendre pour avoir une valeur approchée de I à 10^{-2} près. En déduire que I a une valeur approchée de 0,75. 0,25 + 0,25

PARTIE C *Etude d'une fonction définie par une intégrale*

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1- Démontrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. 0,25 + 0,25 3,75

2- Etudier la parité de F. 0,5

3- Quel est le sens des variations de F ? 0,25 + 0,25

4- a. Démontrer que $\forall\, t \ge 1,\ e^{-t^2} \le e^{-t}$. 0,25

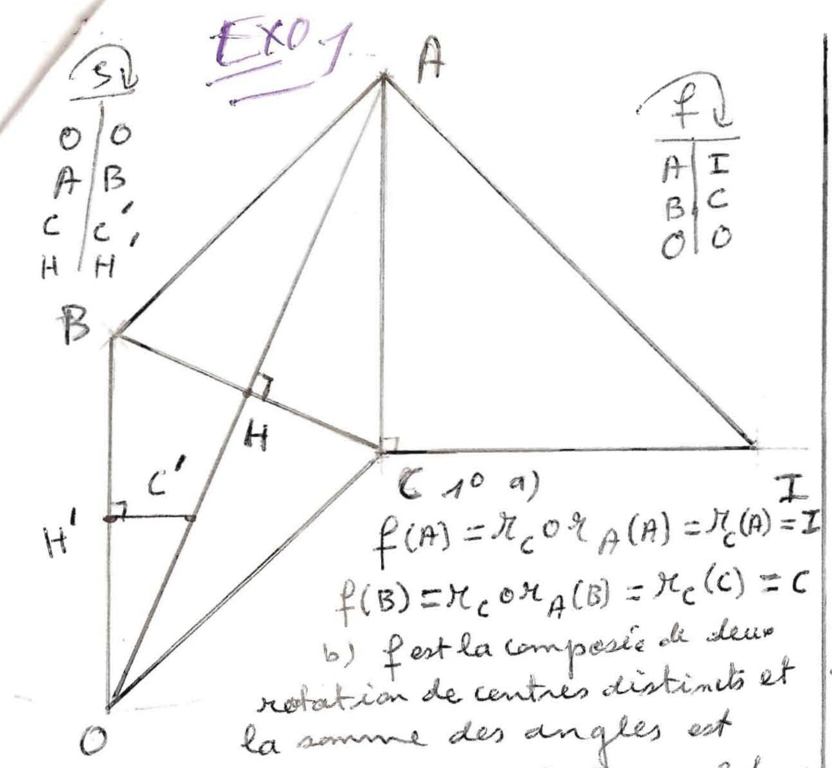
b. Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite de terme général $u_n = F(n)$. Démontrer que cette suite est croissante et majorée par $I + \frac{1}{e}$. 0,25 + 0,25

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel $L \le 1,13$. 0,25 + 0,25

d. Quelle conclusion obtient – on en ce qui concerne la limite de la fonction F lorsque x tend vers $+\infty$? 0,25

5° Donner le Tableau de variation de F et construire (C_F). 0,25 + 0,5

EXO 1



1° a) $f(A) = r_C \circ r_A(A) = r_C(A) = I$

$f(B) = r_C \circ r_A(B) = r_C(C) = C$

b) f est la composée de deux rotation de centres distincts et la somme des angles est $\frac{\pi}{4} + (-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{4} \neq 0\,[2\pi]$ donc f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$. Son centre O est le point d'intersection des mediatrices de [AI] et [BC].

c) Montrons que ABOC est un losange.

OB = OC et AB = AC donc (OA) est la mediat de [BC]. De plus mes$(\widehat{BOA})$ = mes $\widehat{BAO} = \frac{\pi}{8}$; mes $\widehat{COA}$ = mes $(\widehat{CAO})$ et (BC) est la mediatrice de [OA]. Les diagonales [OA] et [BC] ont même milieu et sont ⊥ d'où ABOC est un Losange.

2° a) $S(O) = O$ et $S(A) = B$ donc l'angle de S est $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = +\frac{\pi}{8}\,[2\pi]$.

$(\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = -\frac{\pi}{8}\,[2\pi]$

$(\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \Rightarrow C' \in (OA)$.

b) $S(O) = O$ et $S(A) = B$ donc $S([OA]) = [OB]$. S conserve le milieu, or H milieu de [OA] donc H' est le milieu de [OB].

c) $(OA) \perp (CH)$ donc $(OB) \perp (C'H')$ car S conserve l'othogonalité. C'est le point d'intersection des mediatrices (C'H') et (OA) donc c'est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

II

1° (D) $3x - 5y + 2 = 0$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

(Δ) $7{,}2x - 12y = -5$ $\quad \vec{u}'\begin{pmatrix}12\\7{,}2\end{pmatrix}$

1° $\det(\vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix}5 & 12\\3 & 7{,}2\end{vmatrix} = 0$ donc (D) // (Δ).

2° a) (Δ_1) passe par $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $(\Delta_1) \perp (D)$.

(Δ_1) $5x + 3y - 8 = 0$

b) $5 \times \frac{135}{136} + 3 \times \frac{413}{408} - 8 = 0$ et $H \in (\Delta_1)$

$7{,}2 \times \frac{135}{136} - 12 \times \frac{413}{408} = 5$ et $H \in (\Delta)$

donc H est le projeté othogonal de A sur (Δ)

3° $f = S_\Delta \circ S_D$ est la composée de deux reflexions d'axes parallèles donc f est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-\frac{1}{68}\\ \frac{5}{204}\end{pmatrix}$

4° $F : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $\quad z' = z - \frac{1}{68} + \frac{5}{204}i$

a) F est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-\frac{1}{68}\\ \frac{5}{204}\end{pmatrix}$

ie $F = f = S_\Delta \circ S_D$

b) $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in (D_1)$ et $F(O) = O'\begin{pmatrix}-\frac{1}{68}\\ \frac{5}{204}\end{pmatrix}$

(D_1') est la droite passant par O' et // (D_1)

une equation de (D_1') $\quad y = -x + \frac{1}{102}$

5° a) $\begin{cases} x' = \frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y - \frac{6}{17} \\ y' = \frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y + \frac{10}{17} \end{cases}$ L'écriture complexe de G est $z' = (\frac{8}{17} + \frac{15}{17}i)\bar{z} - \frac{6}{17} + \frac{10}{17}i$

$a = \frac{8}{17} + \frac{15i}{17}$ et $|a| = 1$ donc G est un antideplacement. L'ensemble des points invariants de G est (D) $3x - 5y + 2 = 0$

donc $G = S_D$.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$

b) $(E) = \mathcal{E}(B, \sqrt{3})$ avec $B\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

$G(E) = (E') = \mathcal{E}(B', \sqrt{3})$ avec $B'\begin{pmatrix}-\frac{38}{17}\\ \frac{41}{17}\end{pmatrix}$

6° $S = F \circ G$ or $F = S_\Delta \circ S_D$ et $G = S_D$

donc $S = (S_\Delta \circ S_D) \circ S_{(D)}$

$S = S_\Delta \circ (S_D \circ S_D) = S_\Delta \circ Id_{\mathcal{P}} = S_\Delta$

donc S est la symétrie othogonale d'axe (Δ).

Problème $f(x) = e^{-x^2}$

1° f est indéfiniment dérivable sur IR et $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ et $f''(x) = (-2+4x^2)e^{-x^2}$ ensuite $f^{(3)}(x) = 4x(3-2x^2)e^{-x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (A)

2° signe de $f^{(3)}(x)$ est celui de $x(3-2x^2)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-2x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f^{(3)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Tableau de variation de f''

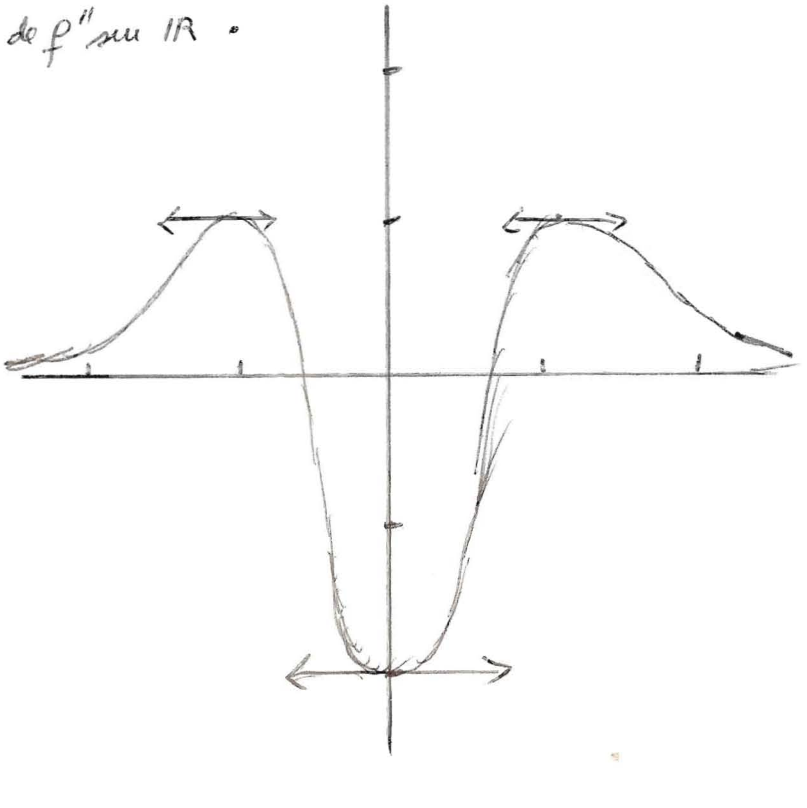
x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f^{(3)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{-4}{e\sqrt{e}}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{4}{e\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

avec $\frac{4}{e\sqrt{e}} \simeq 0,89$

3° D'après le TV de f'' on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$-2 \le f''(x) \le \frac{4}{e\sqrt{e}} \le 2 \quad \text{et} \quad |f''(x)| \le 2$$

car -2 est le minimum et $\frac{4}{e\sqrt{e}}$ le maximum de f'' sur IR.



(B) $I = \int_0^1 e^{-x^2}dx$ $\quad u(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $g = f\circ u$ et $\phi(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt - 2xg(0)$ $\quad x \ge 0$.

1° si G est une primitive de g on a :

$$\phi(x) = [G(t)]_{-x}^{x} - 2xg(0) = G(x) - G(-x) - 2xg(0)$$

2° $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\phi'(x) = G'(x) - G'(-x) - 2$ et

$\phi'(x) = g(x) - g(-x)$ par suite

$\phi''(x) = g'(x) - g'(-x)$

3° a) Mq $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g''(x)| \le 2\alpha^2$

g est indéfiniment dérivable sur IR et $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = \alpha f'(\alpha x+\beta)$ et $g''(x) = \alpha^2 f''(\alpha x+\beta)$

or $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f''(x)| \le 2$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $|g''(x)| \le 2\alpha^2$.

b) $\phi''(x) = g'(x) - g'(-x)$ et

$\phi'''(x) = g''(x) + g''(x)$ donc

$|\phi'''(x)| \le |g'(x)| + |g''(-x)| \le 4\alpha^2$

$|\phi'''(x)| \le 4\alpha^2$, d'après IAF appliqué à ϕ'' sur $[0, x]$ on a

$|\phi''(x) - \phi''(0)| \le 4\alpha^2|x - 0|$ or $x \ge 0$

$\phi''(0) = 0$ donc $|\phi''(x)| \le 4\alpha^2 x$ $\forall x \ge 0$

c) avec $|\phi''(x)| \le 4\alpha^2 x$ on a $\forall t \ge 0$

$-4\alpha^2 t \le \phi''(t) \le 4\alpha^2 t$ et $\forall x \ge 0$

$$-4\alpha^2\int_0^x t\,dt \le \int_0^x \phi'(t)dt \le 4\alpha^2\int_0^x t\,dt$$

$-2\alpha^2x^2 \le \phi'(x) - \phi'(0) \le 2\alpha^2x^2$ or

$\phi(0) = 0$ et $-2\alpha^2x^2 \le \phi'(x) \le 2\alpha^2x^2$

et $\int_0^x -2\alpha^2t^2dt \le \int_0^x \phi'(t)dt \le 2\alpha^2\int_0^x t^2dt$

et $-\frac{2}{3}\alpha^2x^3 \le \phi(x) \le \frac{2}{3}\alpha^2x^3$ $\forall x \ge 0$

c) $-\frac{2}{3}\alpha^2 \le \phi(1) \le \frac{2}{3}\alpha^2$ or

$\phi(1) = \int_{-1}^{1} g(t)dt - 2g(0)$ d'où

$$\boxed{-\frac{2}{3}\alpha^2 \le \int_{-1}^{1} g(t)dt - 2g(0) \le \frac{2}{3}\alpha^2}$$

1- Mq $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u)\,du$.

$g(t) = f\circ u(t)$ $\quad u(t) = \alpha t + \beta$

$du = \alpha\, dt$ $\quad t=-1$ $\; u = \beta-\alpha$

$\qquad\qquad\quad t = 1$ $\; u = \beta+\alpha$

on a : $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} \frac{1}{\alpha} f(u)\,du$ donc

$$\boxed{\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u)\,du}$$

2) $\alpha = \frac{1}{2n}$ $\quad \beta = \frac{2k+1}{2n}$ $\quad \beta-\alpha = \frac{k}{n}$ et $\beta+\alpha = \frac{k+1}{n}$

avec $-\frac{2}{3}\alpha^2 \le \int_{-1}^{1} g(t)\,dt - 2g(0) \le \frac{2}{3}\alpha^2$

et $2g(0) = 2f(\beta) = 2f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$ on a :

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2n}\right)^2 \le 2n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)\,du - 2f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \le \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2n}\right)^2$$

$$-\frac{2}{12n^2} \le 2n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)\,du - 2f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \le \frac{2}{12n^2}$$

donc $-\frac{1}{12n^3} \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)\,du - \frac{1}{n} f\left(\frac{2k+1}{n}\right) \le \frac{1}{12n^3}$

3° $-\frac{1}{12n^3}\sum_{k=0}^{n-1} 1 \le \sum \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)\,du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \le \frac{1}{12n^3}\sum_{k=0}^{n-1}$

$$-\frac{1}{12n^2} \le \int_0^1 f(u)\,du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \le \frac{1}{12n^2}$$

$$\left|\int_0^1 f(u)\,du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right| \le \frac{1}{12n^2}$$

4° Il suffit de trouver n tq $\frac{1}{12n^2} \le 10^{-2}$

$12n^2 \ge 100$ et $n^2 \ge \frac{100}{12}$ et $n \ge \frac{5\sqrt{3}}{3}$

on peut prendre $n = 3$ et

$I \simeq \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right)\right)$

$\simeq \frac{1}{3}\left(e^{-\frac{1}{36}} + e^{-\frac{1}{4}} + e^{-\frac{25}{36}}\right) \simeq 0,75025$

d'où $I \simeq 0,75$ à 10^{-2} près.

C) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

1° f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est la primit. de f qui s'annule en 0 donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

2° $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, avec f paire on a

$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt = -\int_{-x}^{0} f(t)\,dt =$

$= -\int_0^x f(t)\,dt = -F(x)$ et F imp.

3° $F'(x) = f(x) > 0$ et F est strictem ↗.

4° a- $t \ge 1 \Rightarrow t^2 \ge t \Rightarrow -t^2 \le -t \Rightarrow$

$e^{-t^2} \le e^{-t}$ $\forall t \ge 1$.

b) $u_n = F(n)$ et F strict croiss. sur $\mathbb{R}$ donc (u_n) est croissante.

avec $e^{-t^2} \le e^{-t}$ $\forall t \ge 1$ on a

$u_n = \int_0^n e^{-t^2}\,dt = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^n e^{-t^2}\,dt$

or $\int_1^n e^{-t^2}\,dt \le \int_1^n e^{-t}\,dt = \frac{1}{e} - e^{-n} \le \frac{1}{e}$

donc $u_n \le I + \frac{1}{e}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

c) La suite (u_n) est croissante et majorée donc converge et sa limite $L \le I + \frac{1}{e}$ avec $L \simeq 0,75$ et $\frac{1}{e} \simeq 0,38$ on a. $L \le 1,11 < 1,13$ et $\boxed{L \le 1,13}$

d) $u_n = F(n)$ et $\lim u_n = L$ donc $\lim_{+\infty} F = L$

5°

x	0	$+\infty$
F'	$+$	
F	0 ↗	L