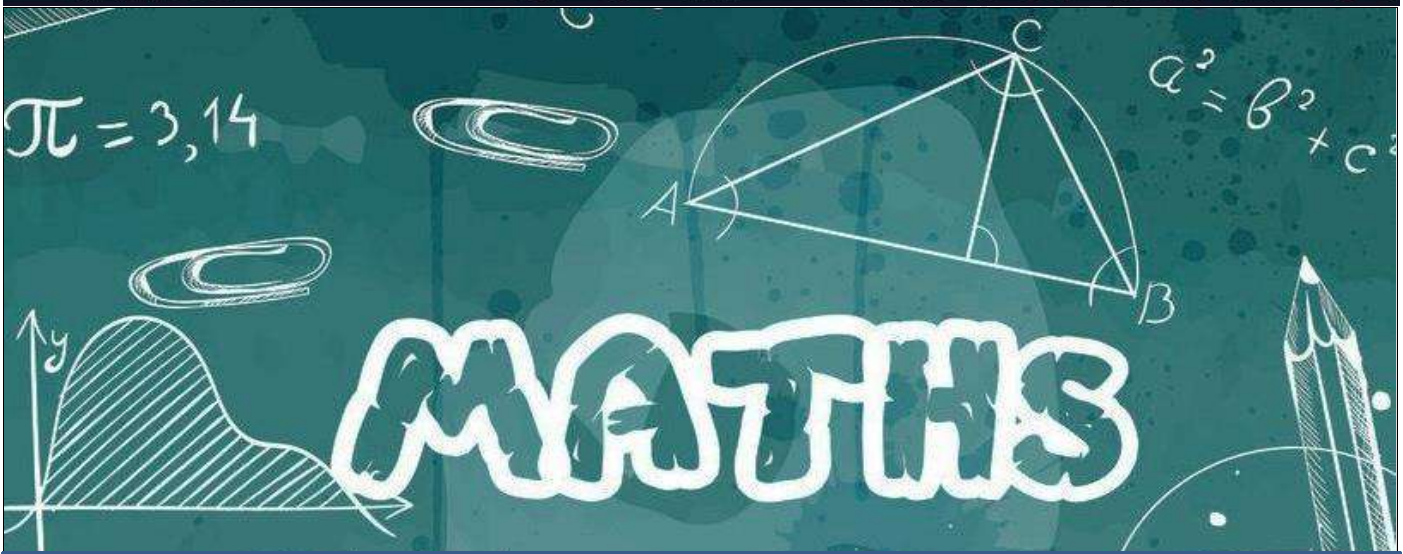
# Recueils de Sujets et Corrigés de Mathématiques

# MATHS

## Baccalauréat malien (2000-2022)




Auteur: Issa Mallé / 76 14 60 91

email : issamalle584@gmail.com

Adresse : Kalabancoro / Kabala-Est (Niamacoro-courani)

# SOMMAIRE



**''Nul n'est parfait, la perfection appartient à Allah, et Il l'a donne à celui qu'Il veut''**

**Ressources numériques utilisées : Association MaliMath (*AM*²) & Maths TICE de Adama Traoré**

# Baccalauréat malien : Session de juillet 2000 (SET – MTI – MTGC)

## Exercice 1 : $(5\ pts)$

1) Ecrire en base deux, puis en base seize, l'entier naturel $N = 6923$.

2) a) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique réelle de premier terme $r_0$ strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$. Exprimer le terme général $r_n$ en fonction de $n$ et de $r_0$.

b) Soit $(\theta_n)$ la suite arithmétique réelle de premier terme $\theta_0$ ; $\theta_0 \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$.

Exprimer le terme général en fonction de $n$ et $\theta_0$.

c) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ , on pose : $Z_n = r_n e^{i\theta_n}$. Sachant que $Z_0.Z_1.Z_2 = 8$, déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $Z_0,\ Z_1\ et\ Z_2$.

3) Dans le plan complexe $(P)$ rapporté à un repère orthonormal direct d'unité graphique 3 cm, on appelle $M_n$ le point d'affixe $Z_n = r_n e^{i\theta_n}$.

a) Placer dans $(P)$ les points $M_0,\ M_1,\ M_2\ et\ M_3$.

b) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, calculer $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$ en fonction de $n$.

$c)$ On pose $\mathrm{I_n} = \sum_{k=0}^{n}\left\|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}\right\|$. Calculer $\mathrm{I_n}$ en fonction de n, puis déterminer $\lim_{n\to\infty} \mathrm{I_n}$

4) a) Ecrire sous la forme trigonométrique ou exponentielle le nombre complexe :

$Z = \frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+tan^2\theta}$ ; $\theta \in \mathbb{R}\ \ et\ \ \theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe : $Z = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}$

## Exercice 2 : (5 pts)

1) Soit un triangle $ABC$ du plan, $I$ le milieu du segment $[BC]\ et\ D$ le barycentre des points $(A\ ;\ -1)$ ; $(B\ ;\ 2)$ ; $(C\ ;\ 2)$

a) Exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

b) Déterminer l'ensemble $(E)$ des points $M$du plan vérifiant l'égalité : $\left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

Justifier que $(E)$ contient I.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\,)$ direct d'unité graphique 2 cm. Dans cette question, A est le point d'affixe 1, B le point d'affixe $2i$ et C le point d'affixe $Z$.

a) Que représente géométriquement $\left|\frac{Z-2i}{1-2i}\right|$ $\ et\ $ $\arg\left(\frac{Z-2i}{1-2i}\right)$ ?

b) Dans la suite, on suppose que le point $C$ d'affixe $Z$ défini par :

$BC = \sqrt{\frac{2}{5}} \times BA$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}}\right) = \alpha$ où $\alpha \in ]-\pi\ ;\ 0]$ et $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Calculer $\sin\alpha$

c) Démontrer que $\frac{Z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$. En déduire le complexe $Z$ et vérifier que le triangle $ABC$ est isocèle. On fera une figure.

## Problème : $(\mathbf{10}\ \boldsymbol{pts})$

**Partie A :**

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $]-1\ ;\ 1[\ par\ :\ f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$(C)$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

I) 1) Prouver que la courbe $(C)$ admet deux asymptotes dont on donnera les équations.

2) a) Déterminer $f^{-1}$.

b) Dresser le tableau de variation de $f$, puis tracer $(C)$.

3) a) Par la technique de l'intégration par parties, calculer l'intégrale : $J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$

b) En déduire l'aire A de la portion du plan située dans le premier quadrant et limitée par $(C)$, l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x = \frac{1}{2}$.

II) On considère la fonction $g$ de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = f(\sin x)\ \ où\ \ f$ est la fonction définie ci-dessus.

1) a) Démontrer que $g$ est une primitive sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $h$ de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ définie sur :

$\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\ par : h(x) = \frac{1}{\cos x}$

b) Calculer l'intégrale $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t}\,dt$. On donnera le résultat sous la forme $J_2 = \ln a\ \ où\ \ ''a''$ est réel strictement positif.

2) On considère la suite $(I_n)\ \ n \in \mathbb{N}$ définie par :

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t}\,dt \quad et \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\,dt \quad pour\ \ n \geq 1$

Expliquer brièvement pourquoi $I_n \geq 0\ ;\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

3) On pose, pour tout entier naturel $n$, $\ K_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{4^n \cos t} - \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\right) dt$

a) Prouver que $K_n \geq 0\ ;\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$ on a :

$0 \leq I_n \leq \frac{\ln b}{c^n}$ où $b\ \ et\ \ c$ sont deux réels à déterminer.

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)\ \ n \in \mathbb{N}$.

Partie B :

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $F_n\ \ de\ \ \mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$F_n(t) = \sin t + \frac{sin^3 t}{3} + \frac{sin^5 t}{3} + \cdots + \frac{sin^{2n-1} t}{2n-1}$

1) soit $q$ un réel et $n \geq 1$.

a) Calculer en fonction de $q\ \ et\ \ n$ la somme : $T_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1}$.

b) En utilisant le résultat précédent, déterminer pour $t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, une expression simplifiée de la somme :

$S_n(t) = 1 + sin^2 t + sin^4 t + \cdots + sin^{2n-2} t$

c) Soit $F_n{}'$ la fonction dérivée de $F_n$. Calculer $F_n'(t)$.

On établira que pour tout réel $t\ de\ \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\ \ on\ \ a :\ \ F_n'(t) = \frac{1 - sin^{2n} t}{\cos t}$

d) Calculer $F_n(0)$.

2) a) Exprimer l'intégrale $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} F_n'(t)\,dt$ en fonction de $J_2\ \ et\ \ I_n$. En déduire que :

$F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \alpha g\left(\frac{\pi}{6}\right) + \beta I_n\ \ ou\ \ \alpha\ \ et\ \ \beta$ sont des constantes réelles à déterminer.

b) En déduire la limite de la suite $(U_n)\ n \in \mathbb{N}$ définie par :

$U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{5 \times 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \times 2^{2n-1}}$

## Exercice 1 : (5 $pts$)

1) Ecrivons en base deux, puis en base seize, l'entier naturel $N = 6923$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6923 | 2 | 3461 | 1 |
| 3461 | 2 | 1730 | 1 |
| 1730 | 2 | 865 | 0 |
| 865 | 2 | 432 | 1 |
| 432 | 2 | 216 | 0 |
| 216 | 2 | 108 | 0 |
| 108 | 2 | 54 | 0 |
| 54 | 2 | 27 | 0 |
| 27 | 2 | 13 | 1 |
| 13 | 2 | 6 | 1 |
| 6 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 1 |

$N = \overline{1101100001011}^{2}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6923 | 16 | 432 | 11 |
| 432 | 16 | 27 | 0 |
| 27 | 16 | 1 | 11 |
| 1 | 16 | 0 | 1 |

$N = \overline{1B0B}^{16}$

2) a) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique réelle de premier terme $r_0$ strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$. Exprimons le terme général $r_n$ en fonction de $n$ et de $r_0$.

$r_n = r_0\left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) Soit $(\theta_n)$ la suite arithmétique réelle de premier terme $\theta_0$ ; $\theta_0 \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$.

Exprimons le terme général en fonction de $n$ et $\theta_0$.

$\theta_n = \theta_0 + \frac{2\pi}{3}n$

c) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ , on pose : $Z_n = r_n e^{i\theta_n}$. Sachant que $Z_1.Z_2.Z_3 = 8$

Déterminons le module et un argument de chacun des nombres complexes $Z_0,\ Z_1\ et\ Z_2$.

$Z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ ; $Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ; $Z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ;

$Z_0.Z_1.Z_2 = 8 \Leftrightarrow r_0 e^{i\theta_0} \times r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2} = 8 \Leftrightarrow r_0.r_1.r_2 e^{i(\theta_0+\theta_1+\theta_2)} = 8e^{i0}$

Par identification :

$$\begin{cases} r_1.r_2.r_3 = 8 \\ (\theta_1+\theta_2+\theta_3 = 0 + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_0\left(\frac{2}{3}\right)^0 \times r_0\left(\frac{2}{3}\right)^1 \times r_0\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 8 \\ \theta_0 + \left(\theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right) + \left(\theta_0 + \frac{4\pi}{3}\right) = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {r_0}^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 8 \\ 3\theta_0 = 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} {r_0}^3 = 27 \\ \theta_0 = \frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \text{ avec } \theta_0 \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} r_0 = 3 \\ \theta_0 = 0 \quad \text{pour } k = -1 \end{cases}$$

Le module $r_n$ et un argument $\theta_n$ de $Z_n$ avec $n \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$

$r_n = r_0\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad et \quad \theta_n = \theta_0 + \frac{2\pi}{3}n$

$r_0 = 3 \quad et \quad \theta_0 = 0$ $\qquad r_1 = 3\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \quad et \quad \theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad r_2 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \quad et \quad \theta_2 = \frac{4\pi}{3}$

$|Z_0| = r_0 = 3 \quad et \quad \arg(Z_0) = \theta_0 = 0$

$|Z_1| = r_1 = 2 \quad et \quad \arg(Z_1) = \theta_1 = \frac{2\pi}{3}$

$|Z_2| = r_2 = \frac{4}{3} \quad et \quad \arg(Z_1) = \theta_1 = \frac{4\pi}{3}$

3) Dans le plan complexe $(P)$ rapporté à un repère orthonormal direct d'unité graphique 3 cm, on appelle $M_n$ le point d'affixe $Z_n = r_n e^{i\theta_n}$.

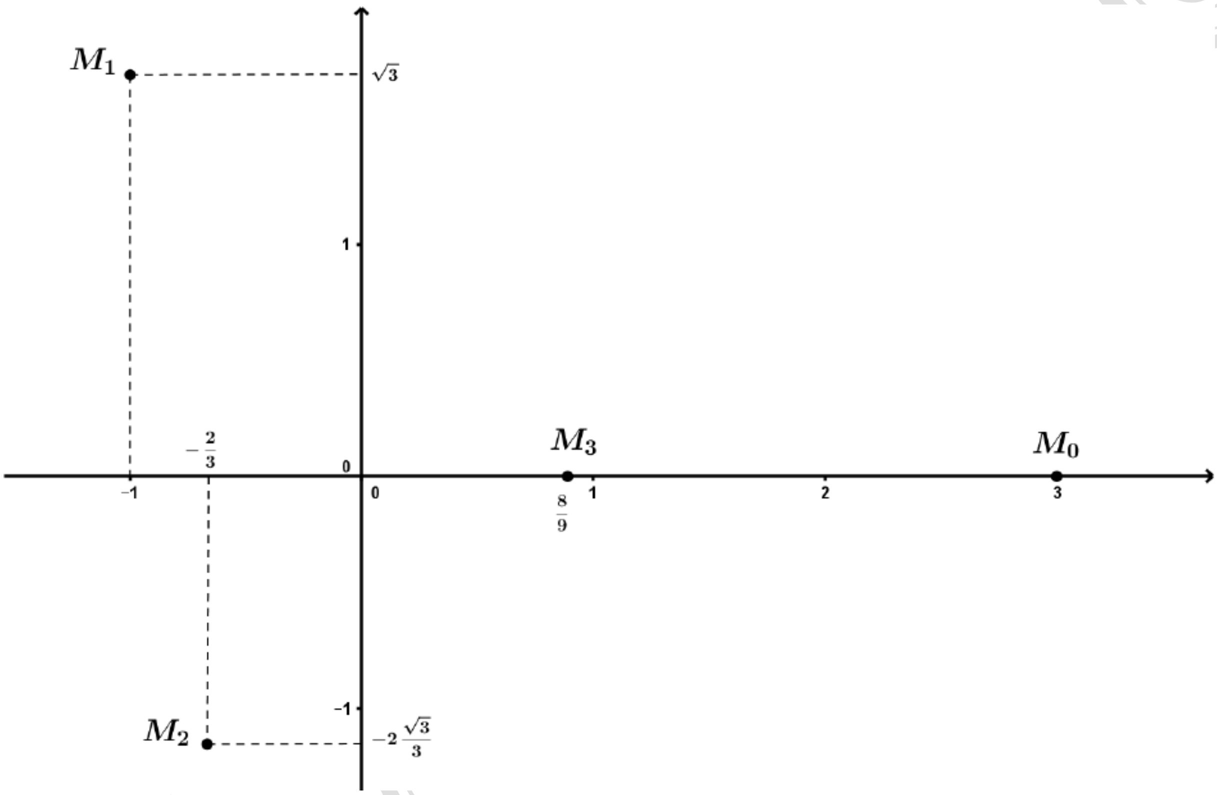
a) Plaçons dans $(P)$ les points $M_0,\ M_1,\ M_2\ et\ M_3$.

$Z_0 = 3e^{0i} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{M_0(3\ ;\ 0)}$

$Z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{M_1(-1\ ;\ \sqrt{3})}$

$Z_2 = \frac{4}{3}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2}{3} - i\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{M_2\left(-\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}$

$Z_3 = r_3 e^{i\theta_3} = \frac{8}{9}e^{i2\pi} = \frac{8}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{M_3\left(\frac{8}{9}\ ;\ 0\right)}$




b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, calculàns $\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$ en fonction de $n$.

$\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\| = |Z_{n+1} - Z_n| = ?$

$Z_{n+1} = r_{n+1}e^{i\theta_{n+1}} = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} e^{i\frac{2\pi}{3}(n+1)} = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}n} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\frac{2\pi}{3}n}\right] = \frac{2}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}Z_n$

$Z_{n+1} - Z_n = \frac{2}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}Z_n - Z_n = Z_n\left(\frac{2}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right) = Z_n\left[\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1\right] = \frac{1}{3}Z_n\left(-1 + \sqrt{3}i - 3\right) = \frac{1}{3}Z_n\left(-4 + \sqrt{3}i\right)$

$\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\| = |Z_{n+1} - Z_n| = \left|\frac{1}{3}Z_n\left(-4 + \sqrt{3}i\right)\right| = \frac{1}{3}|Z_n| \times \left|-4 + i\sqrt{3}\right| = \frac{1}{3}\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \times \sqrt{25}$

$\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\| = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$c$) On pose $\mathrm{I_n} = \sum_{k=0}^{n}\|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$. Calculons $\mathrm{I_n}$ en fonction de n, puis déterminons $\lim_{n\to\infty}\mathrm{I_n}$

$$\mathrm{I_n} = \sum_{k=0}^{n}\|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\| = \|\overrightarrow{M_0 M_1}\| + \|\overrightarrow{M_1 M_2}\| + \|\overrightarrow{M_2 M_3}\| + \cdots + \|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$$

$$= 5.\left(\frac{2}{3}\right)^0 + 5.\left(\frac{2}{3}\right)^1 + 5.\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + 5.\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 5\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$1+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est la somme des $(n+1)$ termes d'une géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{2}{3}$

$$\mathrm{I_n}=\sum_{k=0}^{n}\left\|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}\right\| = 5\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$= 5\left[1\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right] = 5\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right] = 15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$\mathrm{I_n}=\sum_{k=0}^{n}\left\|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}\right\| = 15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I_n} = \lim_{n\to\infty}\left(15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]\right) = 15 \qquad car \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$$

4) a) Ecrivons sous la forme trigonométrique ou exponentielle le nombre complexe :

$Z=\frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+tan^2\theta}$ ; $\theta\in\mathbb{R}$ $et$ $\theta\neq\frac{\pi}{2}[\pi]$

$$Z=\frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+tan^2\theta}=\frac{\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{cos\theta}\right)^2}{1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}=\frac{\left(\frac{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{cos^2\theta}\right)}{\frac{cos^2\theta+sin^2\theta}{cos^2\theta}}=\frac{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{cos^2\theta+sin^2\theta}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

$Z=\cos 2\theta+i\sin 2\theta \qquad ou \qquad Z=e^{i2\theta}$

b) Déterminons le module et un argument du nombre complexe : $Z=\frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$$Z=\frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2sin^2\frac{\pi}{6}-i2\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{6}}{2cos^2\frac{\pi}{6}+i2\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{6}\left[\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}\right]}{2\cos\frac{\pi}{6}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]}$$

$$=\tan\frac{\pi}{6}\times\frac{-i\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}=\tan\frac{\pi}{6}(-i)=-\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$|Z|=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad \arg(Z)=-\frac{\pi}{2}$

## Exercice 2 : (5 pts)

1) Soit un triangle $ABC$ du plan, $I$ le milieu du segment $[BC]$ $et$ $D$ le barycentre des points $(A\ ;\ -1)$ ; $(B\ ;\ 2)$ ; $(C\ ;\ 2)$

a) Exprimons $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

$-\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ $(fixons\ A)$

$-\overrightarrow{DA}+2(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DA}=-2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DA}=-2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

En fixant I on aura :

$-3\overrightarrow{AD}=-2(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD}=2(2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})$

I étant le milieu du segment $[BC]$, alors $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Ainsi :

$3\overrightarrow{AD}=2(2\overrightarrow{AI}) \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$

b) Déterminons l'ensemble $(E)$ des points $M$du plan vérifiant l'égalité :

$\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

Posons : $\begin{cases}\vec{u}=-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\\ \vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\end{cases}$

$*\quad \vec{u}=-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ Fixons $D=bary\{(A\ ;\ -1)\ ;\ (B\ ;\ 2)\ ;\ (C\ ;\ 2)\}$

$\vec{u}=-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{DA}+2(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB})+2(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC})$

$=3\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}$

$\vec{u}=3\overrightarrow{MD}$ où $-\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

$*\quad \vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ Fixons J isobarycentre du triangle ABC

$\vec{v} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC}$

$= 3\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}$

$\vec{v} = 3\overrightarrow{MJ}$ où $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$

$\left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MJ}\right\| \Leftrightarrow MD = MJ$

**L'ensemble $(E)$ des points $M$du plan vérifiant l'égalité donnée est la médiatrice du segment $[DJ]$.**

Justifions que $(E)$ contient I.

Posons $M = I$ alors :

$\left\|-\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}\right\| = \left\|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right\| \Leftrightarrow \left\|-\overrightarrow{IA} + 2\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{IA} + \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|-\overrightarrow{IA}\right\| = \left\|\overrightarrow{IA}\right\| \Leftrightarrow IA = IA \quad vraie$

**L'égalité $\left\|-\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}\right\| = \left\|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right\|$ est vraie. Alors $(E)$ contient $I$.**

2) Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct d'unité graphique 2 cm. Dans cette question, A est le point d'affixe 1, B le point d'affixe $2i$ et C le point d'affixe $Z$.

a) géométriquement : $\left|\frac{Z-2i}{1-2i}\right|$ $et$ $\arg\left(\frac{Z-2i}{1-2i}\right)$ ?

a) **$\left|\frac{Z-2i}{1-2i}\right| = \frac{BC}{BA}$ représente le rapport du coté $BC$ et $BA$.**

**$\arg\left(\frac{Z-2i}{1-2i}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}}\right)$ représente la mesure de l'angle orienté $\left[\widehat{\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}}\right]$**

b) Dans la suite, on suppose que le point $C$ d'affixe $Z$ défini par :

$BC = \sqrt{\frac{2}{5}} \times BA$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}}\right) = \alpha$ où $\alpha \in ]-\pi\ ;\ 0]$ et $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Calculons $\sin\alpha$

$$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow sin^2\alpha = \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$\alpha \in ]-\pi\ ;\ 0]$, alors $\sin\alpha < 0$.

$\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

c) Démontrons que $\frac{Z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$.

$$\begin{cases} BC = \sqrt{\frac{2}{5}} \times BA \Leftrightarrow \frac{BC}{BA} = \sqrt{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow \left|\frac{Z-2i}{1-2i}\right| = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}}\right) = \alpha \Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z-2i}{1-2i}\right) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \frac{Z-2i}{1-2i} = \frac{\sqrt{10}}{5}[\cos\alpha + i\sin\alpha]$$

$\frac{Z-2i}{1-2i} = \frac{\sqrt{10}}{5}[\cos\alpha + i\sin\alpha] = \frac{\sqrt{10}}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} - i\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1-3i}{5}$ CQFD

D'où, $\boldsymbol{\frac{Z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}}$

Déduire le complexe $Z$ et vérifions que le triangle $ABC$ est isocèle. On fera une figure.

$\frac{Z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5} \Leftrightarrow Z = \frac{(1-3i)(1-2i)}{5} + 2i = \frac{1-2i-3i-6+10i}{5} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i$

$\Leftrightarrow$ **$Z = -1+i \quad l'affixe du\, point\ C$**

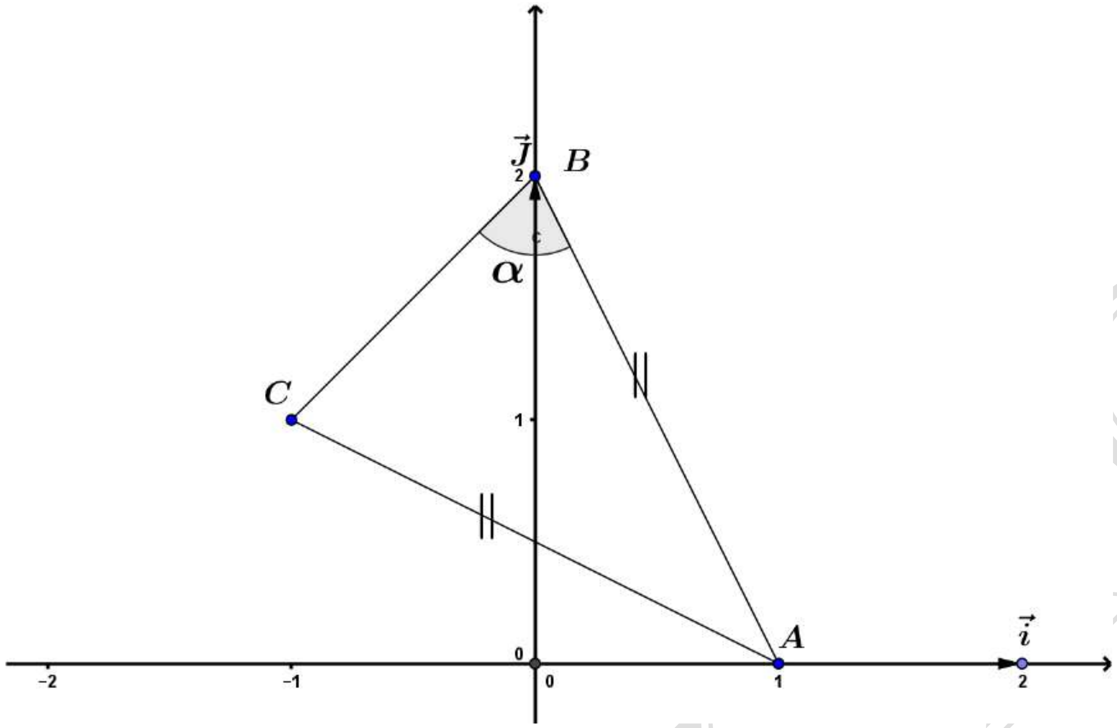
$Z_A = 1 \quad ; \quad Z_B = 2i \quad et \quad Z_C = -1+i$

$AB = |Z_B - Z_A| = |2i - 1| = \sqrt{5}$

$AC = |Z_C - Z_A| = |-1+i-1| = |-2+i| = \sqrt{5}$

$BC = |Z_C - Z_B| = |-1+i-2i| = |-1-i| = \sqrt{2}$

$AB = AC$ alors le triangle $ABC$ est isocèle en A




## Problème : (10 $pts$)

**Partie A :**

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $]-1\ ;\ 1[$ $par\ :\ f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$(C)$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

I) 1) Prouvons que la courbe $(C)$ admet deux asymptotes dont on donnera les équations.

$D_f = ]-1\ ;\ 1[$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(0) = -\infty \quad et \quad \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = \frac{1}{2}\ln(+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ $la\ droite\ d'équation\ x = -1\ \ est\ asymptote\ verticale$ à $(C)\ en -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ $la\ droite\ d'équation\ x = 1\ \ est\ asymptote\ verticale$ à $(C)\ en +\infty$

**La courbe $(C)$ admet donc deux asymptotes verticales d'équation $x = -1\ \ et\ \ x = 1$**

2) a) Déterminons $f^{-1}$:

$\forall\ x \in ]-1\ ;\ 1[,\ f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\right] = \frac{1}{(1+x)(1-x)}$

$\forall\ x \in ]-1\ ;\ 1[,\ f'(x) = \frac{1}{(1+x)(1-x)} > 0$

$f$ est continue et strictement croissante sur $]-1\ ;\ 1[$. Alors, elle réalise une bijection de $]-1\ ;\ 1[\ \ vers\ \ ]-\infty\ ;\ +\infty[$.

Sa bijection réciproque $f^{-1}$ définie de $]-\infty\ ;\ +\infty[\ \ vers\ \ ]-1\ ;\ 1[\ est\ telle\ que :$

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2y \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = e^{2y} \Leftrightarrow 1 + x = e^{2y} - xe^{2y} \Leftrightarrow x(1 + e^{2y}) = e^{2y} - 1$

$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{1+e^{2y}}$

D'où

$\boldsymbol{f^{-1}}$: $]-\infty\ ;\ +\infty[\ \longrightarrow\ ]\boldsymbol{-1}\ ;\ \boldsymbol{1}[$

$$\boldsymbol{x} \quad \longmapsto \quad \boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}}$$

b) Dressons le tableau de variation de $f$, puis traçons $(C)$.

| $x$ | $-1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $1$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

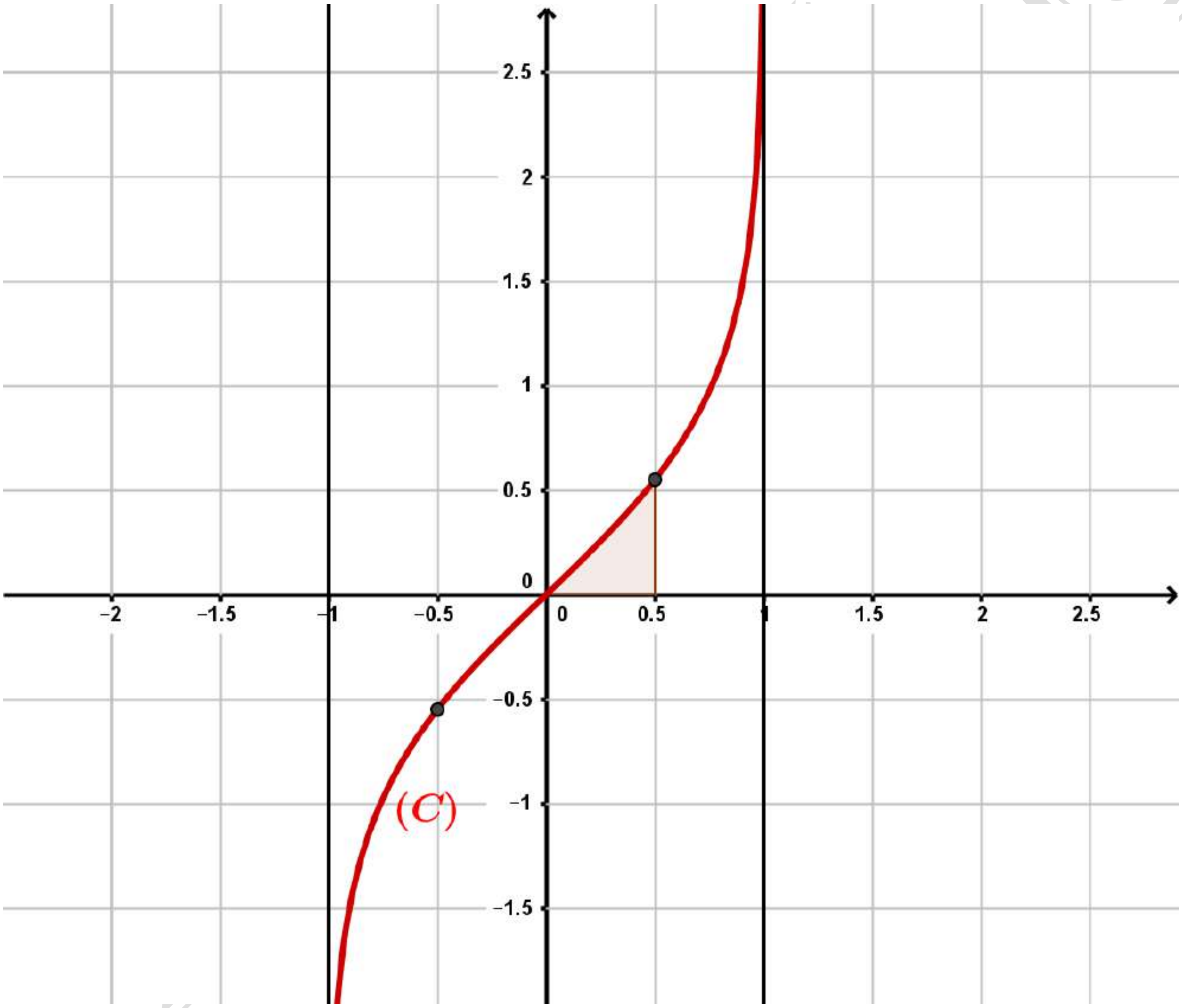
$(C) \cap (Ox)$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = 1 \Leftrightarrow 1 + x = 1 - x \Leftrightarrow x = 0$

$(C) \cap (Ox) = \{(0\ ;\ 0)\}$

$(C) \cap (Oy)$: $f(0) = 0$

$(C) \cap (Oy) = \{(0\ ;\ 0)\}$

$f(-0{,}5) = -0{,}55$ et $f(0{,}5) = 0{,}55$




3) a) Par la technique de l'intégration par parties, calculons l'intégrale : $J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt$

$J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) dt$

Posons :

$u = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad u' = \frac{2}{1-t^2}$

$v' = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{2} t$

$J_1 = \left[\frac{1}{2}t \times \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\ln 3 + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{-2t}{1-t^2}\right)dt = \frac{1}{4}\ln 3 + \left[\frac{1}{2}\ln|1-t^2|\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$= \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 4 = \frac{3\ln 3}{4} - \ln 2 = \frac{3\ln 3 - 4\ln 2}{4}$

$\boldsymbol{J_1 = \frac{3\ln 3 - 4\ln 2}{4}}$

b) Déduire l'aire A de la portion du plan située dans le premier quadrant et limitée par $(C)$, l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x = \frac{1}{2}$.

$A = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \times ua = \frac{3\ln 3 - 4\ln 2}{4} \times 4cm^2 = 0,52\ cm^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A = 0,52\ cm^2}$

**$A = 3\ln 3 - 4\ln 2 \quad (cm^2)$ La valeur exacte** ou **$A = 0,52\ cm^2$ Une valeur approchée d'ordre 2**

II) On considère la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$g(x) = f(\sin x)$ $où$ $f$ est la fonction définie ci-dessus.

1) a) Démontrons que $g$ est une primitive sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $h$ de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie sur :

$\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ $par : h(x) = \frac{1}{\cos x}$

$g$ est une primitive de $h$ sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ ssi pour tout $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\ ;\ g'(x) = h(x)$.

$g(x) = f(\sin x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$ est continue et dérivable sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

$g'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x - \cos x.\sin x + \cos x + \cos x.\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\right] = \frac{\cos x}{1-sin^2 x} = \frac{\cos x}{cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$

**Pour tout $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) = \frac{1}{\cos x} = h(x)$ alors $g$ est une primitive sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $h$ de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie sur :$\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ $par : h(x) = \frac{1}{\cos x}$**

b) Calculons l'intégrale $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t}\,dt$. On donnera le résultat sous la forme $J_2 = \ln a$ $où$ $''a''$ est réel strictement positif.

$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{6}}{1-\sin\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{1}{2}\ln(3) = \ln\sqrt{3}$

**$D'o$ù , $J_2 = \ln a$ avec $a = \sqrt{3} > 0$**

2) On considère la suite $(I_n)$ $n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t}\,dt \quad et \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\,dt \quad pour\ n \geq 1$$

Expliquons brièvement pourquoi $I_n \geq 0\ ;\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

**$\forall\ t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\ ;\ \cos t \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\cos t} \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\,dt \geq 0 \ \Leftrightarrow\ I_n \geq 0$**

**Ou encore :**

**Pour tout $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{\cos t}$ est strictement positive, $\frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}$ l'est aussi car quotient de deux fonction strictement positive. Alors $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\,dt$ est strictement positive pour $n \geq 1$.**

3) On pose, pour tout entier naturel $n$, $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{4^n \cos t} - \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\right)dt$

a) Prouvons que $K_n \geq 0\ ;\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{4^n \cos t} - \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\right)dt = \frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} = \frac{1}{4^n}I_0 - I_n = \frac{1}{4^n}\ln\sqrt{3} - I_n \geq 0\ pour\ n \in \mathbb{N}$

b) Déduisons-en que, pour tout entier naturel $n$ on a :

$0 \leq I_n \leq \frac{\ln b}{c^n}$ où $b$ $et$ $c$ sont deux réels à déterminer.

D'après 2) $I_n \geq 0$ ; $\forall\ n \in \mathbb{N}$

D'après 3) a) $K_n \geq 0$ ; $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Alors : $\frac{1}{4^n}\ln\sqrt{3} - I_n \geq 0 \Leftrightarrow I_n \leq \frac{1}{4^n}\ln\sqrt{3} \Leftrightarrow I_n \leq \frac{\ln\sqrt{3}}{4^n}$

$\boldsymbol{\forall\ n \in \mathbb{N}\ , I_n \geq 0 \quad et \quad I_n \leq \frac{\ln\sqrt{3}}{4^n} \quad alors : 0 \leq I_n \leq \frac{\ln\sqrt{3}}{4^n} \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\ln b}{c^n}\ avec\ b = \sqrt{3}\ ;\ c = 4}$

c) Déterminons la limite de la suite $(I_n)$ $n \in \mathbb{N}$.

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0 \quad car \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{3}}{4^n}\right) = 0}$$

**Partie B :**

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $F_n$ $de$ $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$F_n(t) = \sin t + \frac{sin^3 t}{3} + \frac{sin^5 t}{5} + \cdots + \frac{sin^{2n-1} t}{2n-1}$

1) soit $q$ un réel et $n \geq 1$.

a) Calculons en fonction de $q$ $et$ $n$ la somme : $T_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1}$.

$T_n$ est la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q$.

$T_n = 1^{er}\ terme \times \frac{1-q^{nbre\ de\ terme}}{1-q} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{T_n = \frac{1-q^n}{1-q}}$

b) En utilisant le résultat précédent, déterminons pour $t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, une expression simplifiée de la somme :

$S_n(t) = 1 + sin^2 t + sin^4 t + \cdots + sin^{2n-2} t$

Dans a), posons $q = sin^2 t$. Ainsi : $\boldsymbol{S_n(t) = \frac{1-sin^{2n}(t)}{1-sin^2(t)}}$

c) Soit $F_n{}'$ la fonction dérivée de $F_n$. Calculons $F_n'(t)$.

$F_n(t) = \sin t + \frac{sin^3 t}{3} + \frac{sin^5 t}{5} + \cdots + \frac{sin^{2n-1} t}{2n-1}$

$F_n'(t) = \cos t + \cos t\,.\,sin^2 t + \cos t\,.\,sin^4 t + \cdots + \cos t\,.\,sin^{2n-2} t$

$\quad\quad = \cos t\,(1 + sin^2 t + sin^4 t + \cdots + sin^{2n-2} t) = \cos t \times \frac{1-sin^{2n}(t)}{1-sin^2(t)}$

$$\boldsymbol{\forall\ t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\ ;\quad F_n'(t) = \cos t \times \frac{1-sin^{2n}(t)}{1-sin^2(t)}}$$

Etablissons que pour tout réel $t$ $de$ $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ $on\ a$ : $F_n'(t) = \frac{1-sin^{2n}t}{\cos t}$

$\forall\ t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[,\ F_n'(t) = \cos t \times \frac{1-sin^{2n}(t)}{1-sin^2(t)} = \cos t \times \frac{1-sin^{2n}(t)}{cos^2 t} = \frac{1-sin^{2n}(t)}{\cos t}$

$$\boldsymbol{\forall\ t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[,\ F_n'(t) = \frac{1-sin^{2n}(t)}{\cos t}}$$

d) Calculons $F_n(0)$.

$F_n(t) = \sin t + \frac{sin^3 t}{3} + \frac{sin^5 t}{5} + \cdots + \frac{sin^{2n-1} t}{2n-1}$.

$F_n(0) = \sin(0) + \frac{sin^3(0)}{3} + \frac{sin^5(0)}{5} + \cdots + \frac{sin^{2n-1}(0)}{2n-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F_n(0) = 0}$

2) a) Exprimons l'intégrale $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} F_n'(t)\,dt$ en fonction de $J_2$ $et$ $I_n$.

$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} F_n'(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-sin^{2n}t}{\cos t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{\cos t} - \frac{sin^{2n}t}{\cos t}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{sin^{2n}t}{\cos t}\,dt = J_2 - I_n$

$\boldsymbol{L_n = J_2 - I_n}$ **(1)**

Déduisons-en que : $F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \alpha g\left(\frac{\pi}{6}\right) + \beta I_n$ $ou$ $\alpha$ $et$ $\beta$ sont des constantes réelles à déterminer.

$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} F_n'(t)\,dt = [F_n(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) - F_n(0) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{L_n = F_n\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ **(2)**

$\begin{cases} L_n = J_2 - I_n & (1) \\ L_n = F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) & (2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = J_2 - I_n = [g(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} - I_n = g\left(\frac{\pi}{6}\right) - g(0) - I_n = g\left(\frac{\pi}{6}\right) - I_n$

$\boldsymbol{F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) - I_n \quad \Leftrightarrow \quad F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \alpha g\left(\frac{\pi}{6}\right) + \beta I_n \;\; avec \;\; \alpha = 1 \;\; et \;\; \beta = -1}$

b) Déduisons-en la limite de la suite $(U_n)\ n \in \mathbb{N}$ définie par :

$U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times 2^{2n-1}}$

$F_n(t) = \sin t + \frac{sin^3 t}{3} + \frac{sin^5 t}{5} + \cdots + \frac{sin^{2n-1} t}{2n-1}$.

$$F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \frac{sin^3\frac{\pi}{6}}{3} + \frac{sin^5\frac{\pi}{6}}{5} + \cdots + \frac{sin^{2n-1}\frac{\pi}{6}}{2n-1}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}}{2n-1}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times 2^{2n-1}} = U_n$$

$$\begin{cases} F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = U_n \\ F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) - I_n \end{cases} \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{U_n = g\left(\frac{\pi}{6}\right) - I_n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right) - I_n\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad avec \quad \lim_{n\to+\infty} I_n = 0 \quad d'après\ c)\ de\ 3)\ partie\ A$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{6}}{1-\sin\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{1}{2}\ln(3) = \ln\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} U_n = \ln\sqrt{3}}$$

**Baccalauréat Malien : Session de juillet 2001 (SET – MTI – MTGC)**

## Exercice 1 : (5 pts)

1) Le système de numération est un système décimal.

a) Déterminer l'entier naturel ; $N = PGCD(17787 \ ; \ 689 \ ; \ 297)$

b) Résoudre l'équation : $\{13x - 84y = 7\}$

2) a) Déterminer tous les couples $(a \ ; \ b)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$ tels que : $\begin{cases} a \times b = \dot{0} \\ a - b = \dot{5} \end{cases}$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$ l'équation : $x^2 + \dot{3}x - \dot{4} = \dot{0}$

c) Démontrer que, quel que soit l'entier naturel $n$, on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$

3) On pose : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, cos^2 x \, dx \quad et \quad A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, sin^2 x \, dx$ . $Calculer \ A + B \ et \ A - B$ puis $A \ et \ B$.

## Exercice 2 : (5 pts)

1) a) Résoudre l'équation différentielle : $4y'' - 16y' + 17y = 0$

b) Déterminer la solution particulière $f$ telle que : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi} \quad et \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{15}{4}e^{\pi}$

2) Soit $ABC$ un triangle rectangle en A tel que $AB = 4 \ et \ AC = 6$, l'unité de longueur étant le centimètre.

a) Déterminer et construire le barycentre $G$ des points pondérés $(A \ ; \ 5)$ ; $(B \ ; -3)$ ; $(C \ ; \ 2)$.

Calculer : $GA^2$ ; $GB^2$ , $CC^2$.

b) Développer : $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$ ; $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$ ; $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$. Démontrer l' égalité:

$$5\overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MC}^2 = 4\overrightarrow{MG} - 48$$

c) Déterminer l'ensemble $(E)$ des points M du plan vérifiant la relation : $5\overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MC}^2 = 24$

Prouver que $A \in (E)$.

## Problème : (10 pts)

**Partie A :**

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto e^{2x} - 2e^x$

1) Vérifier que le tableau de variation de $f$ est bien le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $(-1)$ | $\nearrow$ | $(0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2) Donner une équation de la tangente $(T)$ à $(C)$ au point d'abscisse $-\ln 2$.

3) Soit $g$ la fonction de $\mathbb{R} \ vers \ \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$

a) Déterminer $g'(x)$ $et$ $g''(x)$ pour tout réel $x$.

b) Du signe de $g''(x)$, déduire celui de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$.

c) Etudier la position de $(c)$ par rapport à $(T)$.

4) Tracer $(T)$ $et$ $(C)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1 $cm$.

**Partie B :**

Pour tout entier naturel $n$, on note $f_n$ la fonction de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

et $(C_n)$ la courbe représentative. Prouver que toutes courbes $(C_n)$ passent par un même point fixe $A$ dont on déterminera les coordonnées.

**Partie C :**

On considère la fonction numérique $h$ de la variable réelle $x$ définie par : $h(x) = \frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}$

On désigne par $(\mathcal{H})$ la représentation graphique de $h$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1) a) Calculer $h(0)$ ; $h(1)$ ; $h(2)$.

b) Dresser le tableau de variation de $h$.

c) Prouver que la courbe $(\mathcal{H})$ admet une asymptote dont on précisera l'équation.

d) Utiliser les variation de $h$ pour déterminer le signe de $h(x)$ selon les valeurs de $x$.

2) Tracer la courbe $(\mathcal{H})$.

3) On considère la fonction numérique $\varphi$ de la variation réelle $x$ définie par : $\varphi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$.

On note $(\Gamma)$sa courbe représentation de $\varphi$ dans le repère précédent.

a) Etudier le sens de variation de $\varphi$ en précisant ses limites aux bornes de l'intervalle de définition.

b) Prouver que la courbe $(\Gamma)$ admet une asymptote que l'on précisera.

c) Etudier les positions relatives des courbe $(\mathcal{H})$ $et$ $(\Gamma)$.

d) Tracer la courbe $(\Gamma)$ sur le même graphique que la courbe $(\mathcal{H})$.

4) a) Etablir que, pour tout réel $x$ : $\varphi(x) = \int_x^{x+1} h(t)\,dt$.

b) Donner une interprétation géométrique de $\varphi(0)$.

## Exercice 1 : (5 pts)

1) Le système de numération est un système décimal.

a) Déterminons l'entier naturel ; $N = PGCD(17787\ ;\ 689\ ;\ 297)$

| | |
|---|---|
| 17787 | 3 |
| 5929 | 7 |
| 847 | 7 |
| 121 | 11 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 689 | 13 |
| 53 | 53 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 297 | 3 |
| 99 | 3 |
| 33 | 3 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

$17787 = 3 \times 7^2 \times 11^2$ $\qquad 689 = 13 \times 53$ $\qquad 297 = 3^3 \times 11$

$\boldsymbol{N = PGCD(17787\ ;\ 689\ ;\ 297) = 1}$ **Produit de facteurs communs avec leurs plus petit exposant**

b) Résolvons l'équation : $\{13x - 84y = 7\}$

Par congruence :

$13x - 84y = 7 \Leftrightarrow 84y = 13x - 7 \Leftrightarrow 84y \equiv -7[13] \Leftrightarrow 6y \equiv 6[13] \Leftrightarrow y \equiv 1[13] \Leftrightarrow y = 1 + 13k$

Trouvons $x$ en remplaçant $y$ par son valeur dans (E) :

$(E) :\ 13x - 84y = 7 \Leftrightarrow 13x - 84(1 + 13k) \Leftrightarrow 13x - 84 - 1092k = 7 \Leftrightarrow 13x = 91 + 1092k$

$\Leftrightarrow x = 7 + 84k$

$\boldsymbol{S = \{(7 + 84k\ ;\ 1 + 13k)\}\ avec\ k \in \mathbb{Z}}$

2) a) Déterminons tous les couples $(a\ ;\ b)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$ tels que : $\begin{cases} a \times b = \dot{0} & (1) \\ a - b = \dot{5} & (2) \end{cases}$

$(2) :\ a - b = \dot{5} \Leftrightarrow a = \dot{5} + b$

Dans (1) on aura :

$(\dot{5} + b) \times b = \dot{0} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dot{0} \\ \dot{5} + b = \dot{0} \end{cases}\ ou\ \begin{cases} b = \dot{3} \\ \dot{5} + b = \dot{4} \end{cases}\ ou\ \begin{cases} b = \dot{4} \\ \dot{5} + b = \dot{3} \end{cases}$

$\begin{cases} b = \dot{0} \\ \dot{5} + b = \dot{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b = \dot{0}} \\ \boldsymbol{b = -\dot{5} = \dot{7}} \end{cases}\ ou\ \begin{cases} b = \dot{3} \\ \dot{5} + b = \dot{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b = \dot{3}} \\ \boldsymbol{b = -\dot{1} = \dot{11}} \end{cases}\ ou\ \begin{cases} b = \dot{4} \\ \dot{5} + b = \dot{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b = \dot{4}} \\ \boldsymbol{b = -\dot{2} = \dot{10}} \end{cases}$

$b \in \{0\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 10\}$

Dans (2) : $a - b = \dot{5}$

Pour $b = \dot{0}$ alors $a = \dot{5}$ ; Pour $b = \dot{4}$ alors $a = \dot{9}$ ; Pour $b = \dot{11}$ alors $a = \dot{16}$ à rejeter

Pour $b = \dot{3}$ alors $a = \dot{8}$ ; Pour $b = \dot{7}$ alors $a = \dot{0}$ ; Pour $b = \dot{10}$ alors $a = \dot{15}$ à rejeter

$\boldsymbol{S = \{(\dot{5}\ ;\ \dot{0})\ ;\ (\dot{8}\ ;\ \dot{3})\ ;\ (\dot{9}\ ;\ \dot{4})\ ;\ (\dot{0}\ ;\ \dot{7})\}}$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$ l'équation : $x^2 + \dot{3}x - \dot{4} = \dot{0}$

| $x$ | $\dot{0}$ | $\dot{1}$ | $\dot{2}$ | $\dot{3}$ | $\dot{4}$ | $\dot{5}$ | $\dot{6}$ | $\dot{7}$ | $\dot{8}$ | $\dot{9}$ | $\dot{10}$ | $\dot{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $\dot{0}$ | $\dot{1}$ | $\dot{4}$ | $\dot{9}$ | $\dot{4}$ | $\dot{1}$ | $\dot{0}$ | $\dot{1}$ | $\dot{4}$ | $\dot{9}$ | $\dot{4}$ | $\dot{1}$ |
| $\dot{3}x$ | $\dot{0}$ | $\dot{3}$ | $\dot{6}$ | $\dot{9}$ | $\dot{0}$ | $\dot{3}$ | $\dot{6}$ | $\dot{9}$ | $\dot{0}$ | $3$ | $\dot{6}$ | $\dot{9}$ |
| $x^2 + \dot{3}x - \dot{4}$ | $-\dot{4}$ | $\dot{0}$ | $\dot{6}$ | $\dot{2}$ | $\dot{0}$ | $\dot{0}$ | $\dot{2}$ | $\dot{6}$ | $\dot{0}$ | $\dot{8}$ | $\dot{6}$ | $\dot{6}$ |

$\boldsymbol{S = \{\dot{1}\ ;\ \dot{4}\ ;\ \dot{5}\ ;\ \dot{8}\}}$

c) Démontrons que, quel que soit l'entier naturel $n$, on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$

Démontrons par récurrence :

Soit la proposition $P_n :\ 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$ ou $P_n :\ 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k$ ; $k \in \mathbb{Z}$

Initialisation :

Pour $n = 0$

$P_0 :\ 3 \times 5^{2(0)+1} + 2^{3(0)+1} = 3 \times 5 + 2 = 17 \equiv 0[17]$. D'où $P_n$ est vraie pour $n = 0$ (1)

Pour $n = 1$

$P_1 :\ 3 \times 5^{2(1)+1} + 2^{3(1)+1} 3 \times 5^3 + 2^4 = 391 \equiv 0[17]$. D'où $P_n$ est vraie pour $n = 1$

Transmission :

Supposons que pour tout entier naturel $n$, $P_n$ est vraie, c'est-à-dire $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$

ou ($3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k\ \ avec\ k \in \mathbb{Z}$ ) et montrons pour $P_{n+1}$ c'est-à-dire :

$P_{n+1} :\ 3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} \equiv 0[17]$ ou ($3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 17k'\ \ avec\ \ k' \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} P_{n+1} :\ 3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} &= 3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4} \\ &= 3 \times 5^{2n+1+2} + 2^{3n+1+3} \\ &= 3 \times 5^{2n+1} \times 25 + 2^{3n+1} \times 8 \\ &= 3 \times 5^{2n+1} \times (8 + 17) + 2^{3n+1} \times 8 \\ &= 8 \times 3 \times 5^{2n+1} + 17 \times 3 \times 5^{2n+1} + 8 \times 2^{3n+1} \\ &= 8(3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}) + 17 \times 3 \times 5^{2n+1} \\ &= 8(17k) + 17 \times 3 \times 5^{2n+1} \\ &= 17(8k + 3 \times 5^{2n+1}) \\ &= 17k' \quad avec \quad k' = 8k + 3 \times 5^{2n+1} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$P_{n+1} :\ 3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 17k' \equiv 0[17]$

D'où $P_{n+1}$ est vraie (2)

Conclusion :

**D'après (1) et (2) Quel que soit l'entier naturel $n$, on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$**

3) On pose : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, cos^2 x\, dx \quad et \quad A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, sin^2 x\, dx\ \ .\ Calculons\ A + B\ \ et\ \ A - B$ puis $A\ \ et\ \ B$.

$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(cos^2 x + sin^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ \ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$

$\boldsymbol{A + B = \frac{\pi^2}{8}}$

$A - B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(cos^2 x - sin^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x\, dx =$? (intégrons par partie)

Posons

$u = x \Leftrightarrow u' = 1$

$v' = \cos 2x \Leftrightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$A - B = \left[x \times \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\cos\pi - \frac{1}{4}\cos 0 = -\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{A - B = -\frac{1}{2}}$

Trouvons $A\ et\ \ B$ :

$$\begin{cases} A + B = \dfrac{\pi^2}{8} \\ A - B = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2A = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 - 4}{8} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{\pi^2 - 4}{16}$$

Dans (2) : $A - B = -\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ B = A + \frac{1}{2} = \frac{\pi^2-4}{16} + \frac{1}{2} = \frac{\pi^2-4+8}{16} \ \Leftrightarrow\ B = \frac{\pi^2+4}{16}$

**D'où $\boldsymbol{A = \frac{\pi^2-4}{16} \quad et \quad B = \frac{\pi^2+4}{16}}$**

## Exercice 2 :______________________________________________ (5 pts)

1) a) Résolvons l'équation différentielle : $4y'' - 16y' + 17y = 0$

Soit $4r^2 - 16r + 17 = 0$ son équation caractéristique

$\Delta' = 64 - 4(17) = -4 = (2i)^2$ ; $r_1 = \frac{8-2i}{4} = 2 - \frac{1}{2}i \quad et \quad r_1 = \frac{8+2i}{4} = 2 + \frac{1}{2}i$ D'où

$\boldsymbol{f(x) = e^{2x}\left(A\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \mathrm{B}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)}$ **(A et B sont des constantes réelles)**

b) Déterminons la solution particulière $f$ telle que : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi} \quad et \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{15}{4}e^{\pi}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\pi} \iff e^{\pi}\left(A\cos\frac{\pi}{4}+B\sin\frac{\pi}{4}\right)=e^{\pi} \iff \frac{\sqrt{2}}{2}A+\frac{\sqrt{2}}{2}B=1 \iff \boldsymbol{A\sqrt{2}+B\sqrt{2}=2}$ **(1)**

$f'(x)=2e^{2x}\left(A\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)+\left(-\frac{1}{2}A\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}B\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)e^{2x}$

$\boldsymbol{f'(x)=e^{2x}\left(2A\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+2B\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}A\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}B\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)}$

$f''(x)=2e^{2x}\left(2A\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+2B\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}A\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}B\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)+\left(-A\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+B\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{4}A\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{4}B\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)e^{2x}$

$=\left(4A\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+4B\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-A\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+B\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-A\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+B\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{4}A\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{4}B\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)e^{2x}$

$f''(x)=\left(\frac{15}{4}A\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{15}{4}B\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-2A\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+2B\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)e^{2x}$

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{15}{4}e^{\pi} \iff \left(\frac{15}{4}A\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{15}{4}B\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-2A\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+2B\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{\pi}=\frac{15}{4}e^{\pi}$

$\iff \frac{15\sqrt{2}}{8}A+\frac{15\sqrt{2}}{8}B-\sqrt{2}A+\sqrt{2}B=\frac{15}{4}$

$\iff \frac{7\sqrt{2}}{8}A+\frac{23\sqrt{2}}{8}B=\frac{15}{4}$

$\iff \boldsymbol{7\sqrt{2}A+23\sqrt{2}=30}$ **(2)**

$\begin{cases}\sqrt{2}A+\sqrt{2}B=2\\7\sqrt{2}A+23\sqrt{2}B=30\end{cases} \quad -7\begin{cases}\sqrt{2}A+\sqrt{2}B=2\\7\sqrt{2}A+23\sqrt{2}B=30\end{cases} \iff \begin{cases}-7\sqrt{2}A-7\sqrt{2}B=-14\\7\sqrt{2}A+23\sqrt{2}B=30\end{cases}$

$16\sqrt{2}B=16 \iff B=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dans (1) : $A\sqrt{2}+B\sqrt{2}=2 \iff A\sqrt{2}+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2 \iff A\sqrt{2}+1=2 \iff A=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où $\boldsymbol{A=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad et \quad B=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\boldsymbol{f(x)=e^{2x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)}$

2) Soit $ABC$ un triangle rectangle en A tel que $AB=4 \ et \ AC=6$, l'unité de longueur étant le centimètre.

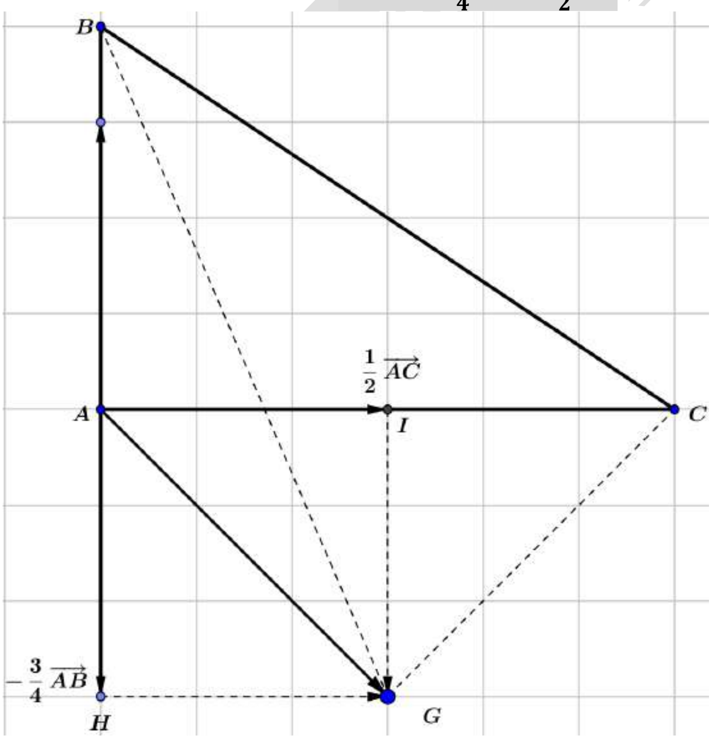
a) Déterminons et construire le barycentre $G$ des points pondérés $(A\ ;\ 5)$ ; $(B\ ;-3)$ ; $(C\ ;\ 2)$.

Le point $G$ vérifie : $5\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

En utilisant la relation de chasles, on a :

$5\overrightarrow{GA}-3\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+2\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$4\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC} \iff \boldsymbol{\overrightarrow{GA}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$




Calculons : $GA^2$ ; $GB^2$ , $GC^2$.

En utilisant le théorème de Pythagore :

Dans le triangle AIG rectangle en I, on a :

$GA^2=AI^2+IG^2=(3)^2+(3)^2=18$

$\boldsymbol{GA^2=18}$

Dans le triangle BHG rectangle en H, on a :

$GB^2=BH^2+HG^2=(7)^2+(3)^2=58$

$\boldsymbol{GB^2=58}$

Dans le triangle CIG rectangle en I, on a :

$GC^2=CI^2+IG^2=(3)^2+(3)^2=18$

$\boldsymbol{GC^2=18}$

b) Développons : $\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2$ ; $\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2$ ; $\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$.

$\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2=\overrightarrow{MG}^2+2\|\overrightarrow{MG}\|\times\|\overrightarrow{GA}\|+\overrightarrow{GA}^2$

$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2=\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}^2}$

$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2=\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}^2}$

$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}^2}$

Démontrer l'égalité : $5\overrightarrow{MA}^2-3\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2=4\overrightarrow{MG}-48$ ?

$$\begin{aligned}5\overrightarrow{MA}^2-3\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2&=5\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\&=5\left(\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}^2\right)-3\left(\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}^2\right)+2\left(\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}^2\right)\\&=5\overrightarrow{MG}^2-3\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\left(2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}\right)+5\overrightarrow{GA}^2-3\overrightarrow{GB}^2+2\overrightarrow{GC}^2\\&=4\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}^2(0)+5GA^2-3GB^2+2GC^2\\&=4\overrightarrow{MG}^2+5(18)-3(58)+2(18)\\&=4\overrightarrow{MG}^2+90-174+36=4\overrightarrow{MG}^2-48\quad\text{CQFD}\end{aligned}$$

D'où $\boldsymbol{5\overrightarrow{MA}^2-3\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2=4\overrightarrow{MG}^2-48}$

c) Déterminer l'ensemble $(E)$ des points M du plan vérifiant la relation : $5\overrightarrow{MA}^2-3\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2=24$

$5\overrightarrow{MA}^2-3\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2=24\Leftrightarrow4\overrightarrow{MG}^2-48=24\Leftrightarrow4\overrightarrow{MG}=72\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}^2=18\Leftrightarrow MG^2=18\Leftrightarrow MG=3\sqrt{2}$

**L'ensemble $(\boldsymbol{E})$ des points M du plan vérifiant la relation : $\boldsymbol{5\overrightarrow{MA}^2-3\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2=24}$ est le cercle de centre $\boldsymbol{G}$ et de rayon $\boldsymbol{R=3\sqrt{2}}$**

Prouvons que $A\in(E)$.

$(E):\ 5\overrightarrow{MA}^2-3\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2=24$

$A\in(E)$ si et seulement si $A$ vérifie l'équation $(E)$.

$(E):\ 5\overrightarrow{AA}^2-3\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}^2=24$ Pour $M=A$

$$\begin{aligned}5(0)^2-3(4)^2+2(6)^2&=24\\-48+72&=24\\24&=24\quad\text{Vraie}\end{aligned}$$

**D'où $\boldsymbol{A\in(E)}$**

## Problème :______________________________________________ (10 pts)

Partie A :

Soit la fonction $f:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longmapsto e^{2x}-2e^x$

1) Vérifions que le tableau de variation de $f$ est bien le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $(-1)$ | $\nearrow$ | $(0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- Domaine de définition :

$\boldsymbol{D_f}=]-\infty\ ;+\infty[$.

- Limite aux borne de $D_f$ :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=e^{-\infty}-2e^{-\infty}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty \ FI$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}(1-2e^{-x}) = +\infty(1-0) = +\infty \iff \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

- Sens de variation :

$\forall\, x \in \left]-\infty\ ;\ +\infty\right[,\ f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x} = e^{x}(2e^{x}-2)$

$\boldsymbol{\forall\ x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = e^{x}(2e^{x}-2)}$ le signe de $f'(x)$ depend de $2e^{x}-2$

Posons : $2e^{x}-2 \geq 0 \iff e^{x} \geq 1 \iff x \geq \ln 1 \iff x \geq 0 \iff x \in \left[0\ ;\ +\infty\right[$

$\forall x \in \left[0\ ;\ +\infty\right[\ ;\ f'(x) \geq 0$. **Alors $f$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.**

$\forall x \in \left]-\infty\ ;\ 0\right]\ ;\ f'(x) \leq 0$. **Alors $f$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$**

(4) $f(ln2) = e^{2\ln 2} - 2e^{\ln 2} = e^{\ln 4} - 2e^{\ln 2} = 4 - 4 = 0 \iff \boldsymbol{f(\ln 2) = 0}$

**Conclusion :**

**Le tableau de variation de $f$ est bien le tableau définie en haut**

2) Donnons une équation de la tangente $(T)$ à $(C)$ au point d'abscisse $-\ln 2$.

$(T):\ \ y = f'(-\ln 2)(x + \ln 2) + f(-\ln 2)$

$*\ \ f'(-\ln 2) = e^{-\ln 2}\left(2e^{-\ln 2} - 2\right) = \frac{1}{2}(1-2) = -\frac{1}{2}$

$*\ \ f(-\ln 2) = e^{-2\ln 2} - 2e^{-\ln 2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

$(T) : y = -\frac{1}{2}(x + \ln 2) - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x - \frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x - \frac{2\ln 2 + 3}{4}$

$\boldsymbol{(T):\ \ y = -\frac{1}{2}x - \frac{2\ln 2+3}{4}}$

3) Soit $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$

a) Déterminons $g'(x)$ $et$ $g''(x)$ pour tout réel $x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) + \frac{1}{2} = e^{x}(2e^{x}-2) + \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{\forall\ x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x} + \frac{1}{2}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = 4e^{2x} - 2e^{x}$

$\boldsymbol{\forall\ x \in \mathbb{R},\ g''(x) = 2e^{x}(2e^{x}-1)}$

b) Du signe de $g''(x)$, déduisons celui de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $g''(x)$ depend de celui de $2e^{x}-1$

Posons :

$2e^{x} - 1 > 0 \iff e^{x} > \frac{1}{2} \iff x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff x > -\ln 2 \iff x \in \left]-\ln 2\ \ ;\ +\infty\right[$

$\boldsymbol{g''(x) > 0\ \ pour\ \ x \in \left]-\ln 2\ \ ;\ +\infty\right[}$

$\boldsymbol{g''(x) < 0\ \ pour\ \ x \in \left]-\infty\ ;\ -\ln 2\right[}$

-Tableau de variation de $g'(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $(0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x} + \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} g'(x) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} g'(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left[2 - 2e^{-x} + \frac{1}{2e^{2x}}\right] = +\infty$

$g'(-\ln 2) = 2e^{-2\ln 2} - 2e^{-\ln 2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$

$g'(-\ln 2) = 0$

D'après la variation de $g'(x)$ :

$\boldsymbol{\forall\ x \in \left]-\infty\ ;\ +\infty\right[,\ g'(x) \geq 0.}$ **Alors $g$ est croissante sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.**

Tableau de variation de $g(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-\ln 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $(0)$ | $+\infty$ |

$Pour\ tout\ x \in \mathbb{R},\quad g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0 - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty + \infty = +\infty$

$g(-\ln 2) = 0$

D'après le tableau de variation de $g$ :

$\boldsymbol{g(x) \leq 0\ \ ;\ \ si\ \ x \in ]-\infty\ ;\ -\ln 2]}$

$\boldsymbol{g(x) \geq 0\ \ ;\ \ si\ \ x \in [-\ln 2\ \ ;\ +\infty[}$

c) Etudions la position de $(c)$ par rapport à $(T)$.

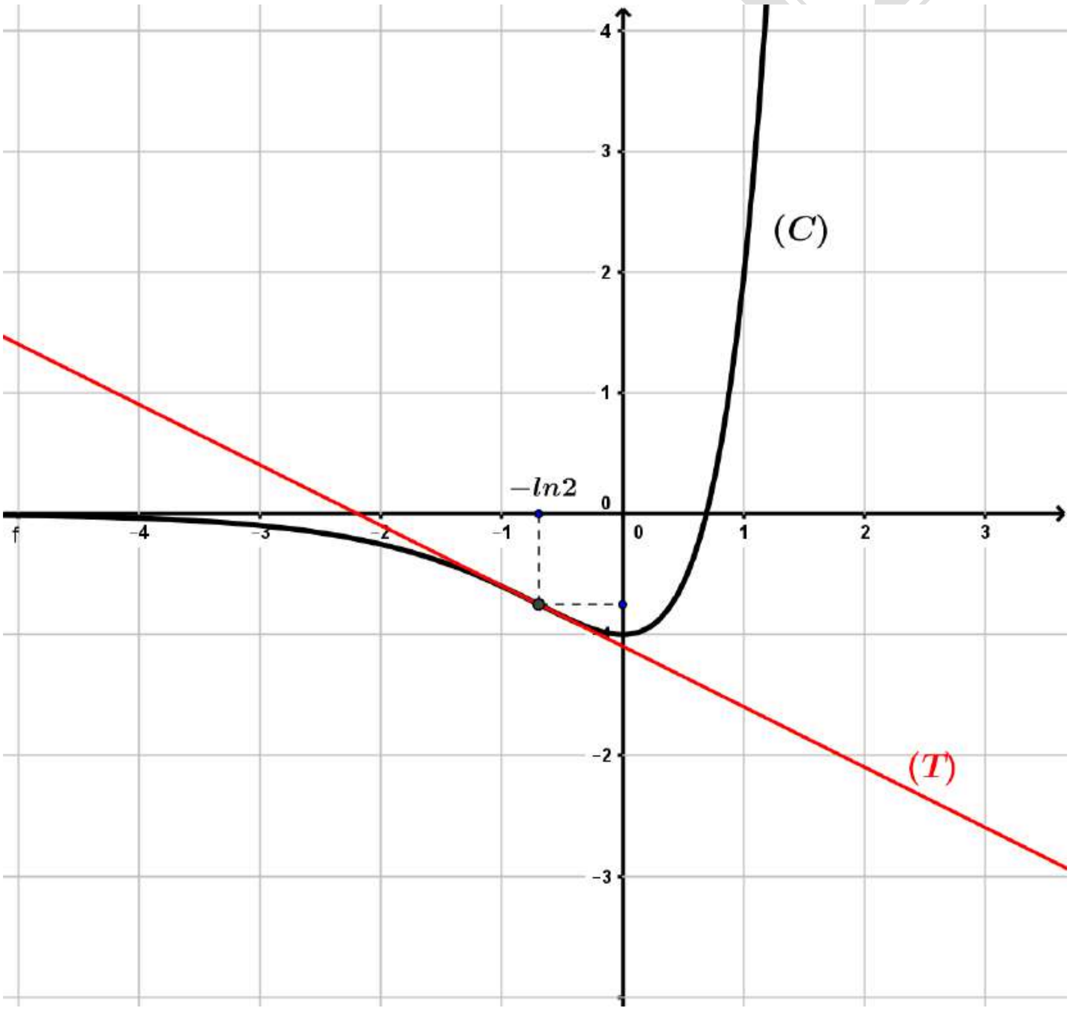
$f(x) - y = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4} = g(x)$

Le signe de $f(x) - y$ depend de celui de $g(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | $-\ln 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) - y$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| Position | $(T)/(C)$ | | $(C)/(T)$ |

* $\forall\ x \in ]-\infty\ ;\ -\ln 2[\ ,\ f(x) - y < 0$. Alors sur $]-\infty\ ;\ -\ln 2[$ la courbe $(C)$ est en dessous de la tangente $(T)$.
* $\forall\ x \in ]-\ln 2\ \ ;\ +\infty[\ ;\ f(x) - y > 0$. Alors sur $]-\ln 2\ \ ;\ +\infty[$ la courbe $(C)$ est au-dessus de la tangente $(T)$
* $\forall\ x \in \{-\ln 2\}\ , f(x) - y = 0$. Alors pour $x = -ln\ 2$ la courbe $(C)$ et la droite $(T)$ sont confondues

4) Traçons $(T)\ et\ (C)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1 $cm$.



**Partie B :**

Pour tout entier naturel $n$, on note $f_n$ la fonction de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

et $(C_n)$ la courbe représentative. Prouvons que toutes courbes $(C_n)$ passent par un même point fixe $A$ dont on déterminera les coordonnées.

Toutes courbes $(C_n)$ passent par un même point fixe $A(x\ ;\ f_n(x))$ s'il existe un réel $x$ tel que $f_n(x) = f_{n+1}(x)$

Pour $n = 0,\ \ on\ a:\ \ f_0(x) = f_1(x)$

$f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow e^x = \frac{e^x}{(x+1)} \Leftrightarrow e^x(x+1) = e^x \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$f_n(0) = \frac{e^0}{(0+1)^n} = 1$

**Toutes courbes $(C_n)$ passent par un même point fixe $A\binom{0}{1}$**

**Partie C :**

On considère la fonction numérique $h$ de la variable réelle $x$ définie par : $h(x) = \frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}$

On désigne par $(\mathcal{H})$ la représentation graphique de $h$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1) a) Calculons $h(0)\ ;\ h(1)\ ;\ h(2)$.

$h(0) = \frac{1}{e-1}e^0 - 0 - \frac{1}{e-1} = 0 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{h(0) = 0}$

$h(1) = \frac{1}{e-1}e^1 - 1 - \frac{1}{e-1} = \frac{e-1}{e-1} - 1 = 1 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{h(1) = 0}$

$h(2) = \frac{1}{e-1}e^2 - 2 - \frac{1}{e-1} = \frac{e^2-1}{e-1} - 2 = e + 1 - 2 = e - 1 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{h(2) = e - 1}$

b) Dressons le tableau de variation de $h$.

$D_h = \mathbb{R} = ]-\infty\ ;\ +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{e-1}.\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x(e-1)}\right] = +\infty(+\infty) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{1}{e-1}e^x - 1$

$h'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{e-1}e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e - 1 \Leftrightarrow x = \ln(e-1)$

$h'(x) \geq 0\ pour\ \ x \in [\ln(e-1)\ \ ;\ \ +\infty[$

$h'(x) \leq 0\ pour\ \ x \in ]-\infty\ \ ;\ \ln(e-1)]$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $\ln(e-1)$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $(0)$ | | $(-0{,}12)$ | | $(0)$ | $+\infty$ |

$h(\ln(e-1)) = \frac{1}{e-1}e^{\ln(e-1)} - \ln(e-1) - \frac{1}{e-1} = \frac{e-1}{e-1} - \ln(e-1) - \frac{1}{e-1} = 1 - \ln(e-1) - \frac{1}{e-1} = -0{,}12$

c) Prouvons que la courbe $(\mathcal{H})$ admet une asymptote dont on précisera l'équation.

$h(x) = \frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}$

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ $\quad Il\ y'apossibilité\ d'asymptoteoblique$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e-1}\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x(e-1)}\right] = +\infty$$

$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty.}$ ***Alors*** **la courbe $(\mathcal{H})$ admet une branche parabolique de direction (Oy).**

Posons $y = -x - \frac{1}{e-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)-y]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e-1}e^x\right)\frac{1}{e-1}\times 0=0$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)-y]=0.\ Alors,}$ **la courbe** $\boldsymbol{(\mathcal{H})}$ **admet une asymptote d'équation** $\boldsymbol{y=-x-\frac{1}{e-1}}$

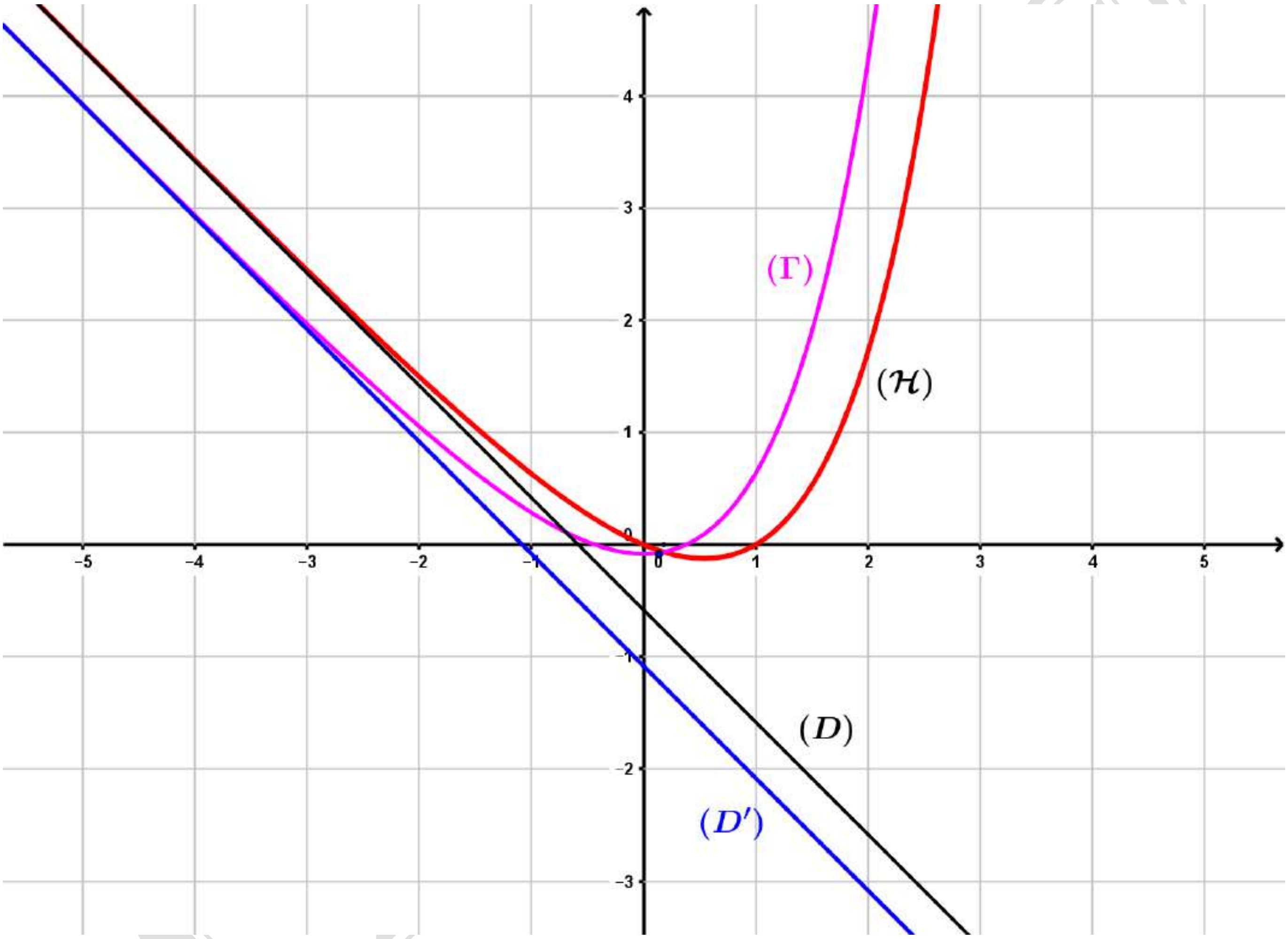
d) Utilisons les variation de $h$ pour déterminer le signe de $h(x)$ selon les valeurs de $x$.

D'après le tableau de variation de $h$ :

$\boldsymbol{h(x)\geq 0\ sur\ ]-\infty\ ;\ 0]\cup[1\ ;\ +\infty[}$

$\boldsymbol{h(x)\leq 0\ sur\ [0\ ;\ 1]}$

2) Tracer la courbe $(\mathcal{H})$.




3) On considère la fonction numérique $\varphi$ de la variation réelle $x$ définie par : $\varphi(x)=e^x-x-\frac{1}{2}-\frac{1}{e-1}$.

On note $(\Gamma)$sa courbe représentation de $\varphi$ dans le repère précédent.

a) Etudions le sens de variation de $\varphi$ en précisant ses limites aux bornes de l'intervalle de définition.

- Intervalle de définition : $\boldsymbol{D_\varphi}=\mathbb{R}=]-\infty\ ;\ +\infty[$

- limites aux bornes de l'intervalle de définition :

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{x(e-1)}\right)\right]=+\infty(+\infty)=+\infty\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty}$

- sens de variation :

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=e^x-1$

Posons $e^x-1=0\ \Leftrightarrow\ e^x=1\ \Leftrightarrow\ x=0$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**$\forall\ x \in ]-\infty\ ;\ 0]\ \varphi'(x) \leq 0, alors\ \varphi$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$**

**$\forall\ x \in [0\ ;\ +\infty[\ , \varphi'(x) > 0$ , alors $\varphi$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$**

- Tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\varphi'(x)$ | $+\infty$ ↘ | $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e-1}\right)$ | ↗ $-\infty$ |

b) Prouvons que la courbe $(\Gamma)$ admet une asymptote que l'on précisera.

$\varphi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ $\quad alors, il\ y'apossibilité\ d'asymptoteoblique\ en + \infty\ \ ou\ \ en - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{x(e-1)}\right) = +\infty$$

**Alors la courbe $(\Gamma)$ admet une branche parabolique de direction $(OJ)$.**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{x(e-1)}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} [\varphi(x) + x] = \lim_{x\to-\infty} \left(e^x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$$

**Alors la courbe $(\Gamma)$ admet une asymptote oblique d'équation $(D') : y = -x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$**

c) Etudions les positions relatives des courbe $(\mathcal{H})\ et\ (\Gamma)$.

Soit $(\mathcal{H})$ la représentation graphique de $h$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ et $(\Gamma)$ celle de $\varphi$ dans le même repère.

$$h(x) - \varphi(x) = \left(\frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}\right) - \left(e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}\right)$$
$$= \frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1} - e^x + x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e-1}$$
$$= \frac{1}{e-1}e^x - e^x + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{(1-e+1)e^x}{e-1} + \frac{1}{2}$$

$h(x) - \varphi(x) = \frac{2-e}{e-1}e^x + \frac{1}{2}$

$h(x) - \varphi(x) > 0 \iff \frac{2-e}{e-1}e^x + \frac{1}{2} > 0 \iff \frac{2-e}{e-1}e^x > -\frac{1}{2} \iff (2-e)e^x > -\frac{(e-1)}{2} \iff e^x < \frac{-e+1}{2(2-e)}$

$h(x) - \varphi(x) > 0 \iff x < \ln\left(\frac{1-e}{4-2e}\right)$

| $x$ | $-\infty$ | $\ln\left(\frac{1-e}{4-2e}\right)$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h(x) - \varphi(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| Position | $\mathcal{H}/\Gamma$ | | $\Gamma/\mathcal{H}$ |

$\forall\ x \in \left]-\infty\ ;\ \ln\left(\frac{1-e}{4-2e}\right)\right[$, $h(x) - \varphi(x) >$. **Alors la courbe $(\mathcal{H})$ de $h$ est au dessus de la courbe $(\Gamma)$ de $\varphi$.**

$\forall\ x \in \left]\ln\left(\frac{1-e}{4-2e}\right)\ ;\ +\infty\right[$, $h(x) - \varphi(x) < 0$. **Alors la courbe $(\mathcal{H})$ de $h$ est en dessous de la courbe $(\Gamma)$ de $\varphi$.**

$\forall\ x \in \left\{\ln\left(\frac{1-e}{4-2e}\right)\right\}$, $h(x) - \varphi(x) = 0$. **Alors la courbe $(\mathcal{H})$ de $h$ et la courbe $(\Gamma)$ de $\varphi$ sont confondues.**

d) Tracer la courbe $(\Gamma)$ sur le même graphique que la courbe $(\mathcal{H})$.

Voir 2)

4) a) Etablissons que, pour tout réel $x$ : $\varphi(x) = \int_x^{x+1} h(t)\,dt$.

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+1} h(t)\,dt &= \int_x^{x+1}\left(\frac{1}{e-1}e^t - t - \frac{1}{e-1}\right)dt \\
&= \left[\frac{1}{e-1}e^t - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{e-1}\right]_x^{x+1} \\
&= \left[\frac{1}{e-1}e^{x+1} - \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{x+1}{e-1}\right] - \left[\frac{1}{e-1}e^x - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{e-1}\right] \\
&= \frac{1}{e-1}e^{x+1} - \frac{x^2+2x+1}{2} - \frac{x+1}{e-1} - \frac{1}{e-1}e^x + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{e-1} \\
&= \frac{e^{x+1}-e^x}{e-1} + \frac{x^2-x^2-2x-1}{2} + \frac{x-x-1}{e-1} \\
&= \frac{(e-1)e^x}{e-1} - \frac{2x+1}{2} - \frac{1}{e-1} \\
&= e^x - \frac{2x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1} \\
&= e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1} = \varphi(x)
\end{aligned}$$

D'où $\boldsymbol{\varphi(x) = \int_x^{x+1} h(t)\,dt}$

b) Donnons une interprétation géométrique de $\varphi(0)$.

$\varphi(0) = \int_0^1 h(t)\,dt$

$\varphi(0)$ est la portion du plan limité par la courbe $(\mathcal{H})\ de\ h$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = 0\ et\ x = 1$

## Exercice 1 : (6pts)

1) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexe ci-dessous ; puis les écrire sous la forme trigonométrique $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ , $\theta \in \mathbb{R}$.

$Z_1 = -2(\sin x + i\cos x)$ ; $Z_2 = -3e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ ; $Z_3 = \frac{-\cos 2x + i\sin 2x}{2\cos 3x - 2i\sin 3x}$

2) Déterminer les suites d'entiers rationnels de raison 6 dont le produit des 4 premiers termes est 385.

3) Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesures respectivement 30m et 21m ; les deux autres côtés mesurent 18m et 12m. Pour la clôture, le propriétaire a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètres pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

a) Quelle est la distance entre deux poteau ?

b) Déterminer le nombre de poteaux nécessaire à la clôture.

## Exercice 2 : (4pts)

1) Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien ; A, B, C et D quatre points de $\mathcal{P}$ deux à deux distincts.

a) Montrer que ABCD est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système $\{(A\,,\ 1)\ ;\ (B\,,\ -1)\ ;\ (C\,,\ 1)\}$ . Déterminer l'ensemble $(S)$ des points $M$ et $\mathcal{P}$ tel que :

$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = BD$

b) On suppose maintenant que ABCD est un rectangle. Déterminer l'ensemble $(\Sigma)$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$

2) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$. Trouver la solution particulière $f$ dont la courbe représentative $(C)$ admet au point $A(0\ ;\ 1)$ une tangente parallèle à la droite d'équation : $3x + y - 2 = 0$. Quelles sont les coordonnées de l'extremum de $(C)$?

## Problème: (10pts)

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = x\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

1) Préciser l'ensemble de définition $D_f$ $de$ $f$ ; étudier sa continuité et sa dérivabilité en énonçant le théorème utisé.

2) a) Etudier la dérivabilité de $f'$ fonction dérivée de $f$, et en déduire les variation de $f'$.

b) soit $F$ la restriction de $f'$ à l'intervalle $I = ]-1\ ;\ 0]$. Démontrer que $F$ est une bijection de $I$ sur un intervalle à préciser. En déduire que dans $I$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique notée $\alpha$. On ne cherchera pas à calculer $\alpha$, mais on montrera que $\alpha > -\frac{1}{2}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

d) Des résultats précédents, déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in D_{f'}$ et les variations de $f$.

3) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D_f$.

4) Soit $h$ la fonction de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} h(x) = f(x) & si\quad x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

a) Démontrer que $h$ est le prolongement par continuité de $f$ $en$ $0$.

b) Etudier la dérivabilité de $h$

**Conclusion de la partie I :** Donner le tableau de variation de $f$ et construire sa courbe $(c)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ en précisant l'intersection de $(C)$ avec l'axe des abscisses.

**Partie II :**

$\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

Soit $(S)$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(\Delta)$ d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

1) Soit $C' = S(C)$ (image de $C$ par $S$). Construire $(C')$ dans le même repère que $(C)$.

Soit $g$ la fonction admettant $(C')$ comme courbe représentative dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

Vérifier que $g(x) = (x+1)\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$ et préciser $D_g$, ensemble de définition de $g$.

2) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.

Partie III

1) Justifier que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ f(n) < 1 < g(n)$. En déduire l'encadrement suivant de $e$ : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Préciser cet encadrement si $n = 1$.

soit $l(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ l(n)$ est majoré par $\frac{4}{n}$ et minoré par $\frac{2}{n}$.

2) Donner un rang à partir duquel l'encadrement ci-dessus de $e$ permet d'obtenir une valeur approchée de $e$ à $10^{-3}$ c'est-à-dire $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < 10^{-3}$.

## Exercice 1 : (6pts)

1) Déterminons le module et un argument de chacun des nombres complexe ci-dessous ; puis les écrivons sous la forme trigonométrique $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ , $\theta \in \mathbb{R}$.

$Z_1 = -2(\sin x + i\cos x) = -2i(\cos x - i\sin x) = -2i[\cos(-x) + i\sin(-x)] = a \times b$

où $a = -2i$ ; $b = \cos(-x) + i\sin(-x)$

$|Z_1| = |a| \times |b| = 2 \times 1 = 2 \iff \boldsymbol{|Z_1| = 2}$

$\arg(Z_1) = \arg(a) + \arg(b) = -\frac{\pi}{2} + (-x) \iff \boldsymbol{\arg(Z_1) = -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$

Forme trigonométrique de $Z_1$ : $\boldsymbol{Z_1 = 2\left[\cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right)\right]}$

$Z_2 = -3e^{-\frac{2\pi}{3}i} = a \times b$ où $a = -3$ $et$ $b = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

$|Z_2| = |a| \times |b| = 3 \times 1 = 3 \iff \boldsymbol{|Z_2| = 3}$

$\arg(Z_2) = \arg(a) + \arg(b) = \pi + \left(-\frac{2\pi}{3}\right) \iff \boldsymbol{\arg(Z_2) = \frac{\pi}{3}}$

Forme trigonométrique de $Z_2$ : $\boldsymbol{Z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

$Z_3 = \frac{-\cos 2x + i\sin 2x}{2\cos 3x - 2i\sin 3x} = \frac{-(\cos 2x - i\sin 2x)}{2(\cos 3x - i\sin 3x)} = -\frac{1}{2} \times \frac{\cos(-2x) + i\sin(-2x)}{\cos(-3x) + i\sin(-3x)} = a \times \frac{b}{c}$

$|Z_3| = |a| \times \frac{|b|}{|c|} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \iff \boldsymbol{|Z_3| = \frac{1}{2}}$

$\arg(Z_3) = \arg a + \arg b - \arg c = \pi + (-2x) - (-3x) = \pi - 2x + 3x = \pi + x \iff \boldsymbol{\arg(Z_3) = \pi + x}$

Forme trigonométrique de $Z_3$ : $Z_3 = \frac{1}{2}[\cos(x + \pi) + i\sin(x + \pi)]$

2) Déterminons les suites d'entiers rationnels de raison 6 dont le produit des 4 premiers termes est 385.

Soit $u_0$, $u_1$ , $u_2$ $et$ $u_3$ ces quatre suites.

$u_0$ ; $u_1 = u_0 + 6$ ; $u_2 = u_0 + 12$ ; $u_3 = u_0 + 18$

$u_0 \times u_1 \times u_2 \times u_3 = 385 \iff$

$u_0(u_0 + 6)(u_0 + 12)(u_0 + 18) = 385$

$$\begin{array}{r|l} 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

L'ensemble des diviseurs premiers de 386 est $\{-1 ; -5 ; -7 ; 11 ; 1 ; 5 ; 7 ; 11\}$

Alors $u_0 \in \{-1 ; -5 ; -7 ; -11 ; 1 ; 5 ; 7 ; 11\}$

Pour $u_0 = -1$, on a :

$-1(-1 + 6)(-1 + 12)(-1 + 18) = -(5)(11)(17) \neq 385$ à rejeter

Pour $u_0 = -5$, on a :

$-5(-5 + 6)(-5 + 12)(-5 + 18) = -5(1)(7)(17) \neq 385$ à rejeter

Pour $u_0 = -7$, on a :

$-7(-7 + 6)(-7 + 12)(-7 + 18) = -7(-1)(5)(11) = 385$ Vraie

Pour $u_0 = -11$, on a :

$-11(-11 + 6)(-11 + 12)(-11 + 18) = -11(-5)(1)(7) = 385$ Vraie

Pour $u_0 = 1$, on a :

$1(1 + 6)(1 + 12)(1 + 18) = (7)(13)(18) \neq 385$ à rejeter de même pour $u_0 \in \{5 ; 7 ; 11\}$

D'où $u_0(u_0 + 6)(u_0 + 12)(u_0 + 18) = 385 \iff u_0 = -7$ $ou$ $u_0 = -11$

Ainsi :

Pour $\boldsymbol{u_0 = -7}$

$u_1 = u_0 + 6 = -1 \iff \boldsymbol{u_1 = -1}$ ; $u_2 = u_0 + 12 = 5 \iff \boldsymbol{u_2 = 5}$ ; $u_3 = u_0 + 18 = 11 \iff \boldsymbol{u_3 = 11}$

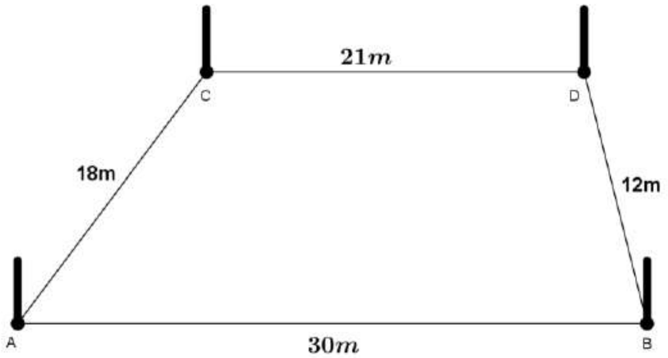
**D'où, $-7$ ; $-1$ ; $5$ ; $11$ sont les quatre premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6 dont le produit est 385**.

Pour $\boldsymbol{u_0 = -11}$

$u_1 = u_0 + 6 = -5 \iff \boldsymbol{u_1 = -5}$ ; $u_2 = u_0 + 12 = 1 \iff \boldsymbol{u_2 = 1}$ ; $u_3 = u_0 + 18 = 7 \iff \boldsymbol{u_3 = 7}$

**D'où, $-11$ ; $-7$ ; $1$ ; $7$ sont les quatre premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6 dont le produit est 385**

3)




a) La distance entre deux poteaux :

$d = PGCD(30\ ;\ 21\ ;\ 18\ ;\ 12) = 3$

**La distance entre deux poteaux est $d = 3\ m$**

b) Déterminons le nombre de poteaux nécessaire à la clôture.

$N = \frac{périmètre}{d} = \frac{30+21+18+12}{3} = \frac{81}{3} = 27$

**Le nombre de poteaux nécessaire à la clôture est $N = 27\ poteaux$**

## Exercice 2 :______________________________________________(4pts)

1) Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien ; A, B, C et D quatre points de $\mathcal{P}$ deux à deux distincts.

a) Montrons que ABCD est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système $\{(A\,,\ 1)\ ;\ (B\,,\ -1)\,;\ (C\,,\ 1)\}$ .

- Suposons que $ABCD$ est un parallélogramme (c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) et montrons que D est le barycentre du système $\{(A\,,\ 1)\ ;\ (B\,,\ -1)\,;\ (C\,,\ 1)\}$)

$ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ fixons $D$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow D}$ ***est le barycentre du système*** $\boldsymbol{\{(A\,,\ 1)\ ;\ (B\,,\ -1)\,;\ (C\,,\ 1)\}}$ **(1)**

- Supposons que D est le barycentre du système $\{(A\,,\ 1)\ ;\ (B\,,\ -1)\,;\ (C\,,\ 1)\}$ et montrons que $ABCD$ est un parallélogramme

(D est le barycentre du système $\{(A\,,\ 1)\ ;\ (B\,,\ -1)\,;\ (C\,,\ 1)\}$ ) $\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow ABCD}$ **est un parallélogramme (2)**

**Conclusion :**

**D'après (1) et (2). ABCD est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système $\boldsymbol{\{(A\,,\ 1)\ ;\ (B\,,\ -1)\,;\ (C\,,\ 1)\}}$** .

Déterminons l'ensemble $(S)$ des points $M$ et $\mathcal{P}$ tel que : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = BD$

Posons $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$\sum \alpha_i \neq 0$, alors fisons $D = bary\{(A\,,\ 1)\ ;\ (B\,,\ -1)\,;\ (C\,,\ 1)\}\ \ et\ \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\vec{u} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$\vec{u} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{MD} + \left(\underbrace{\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}_{\vec{0}}\right)$

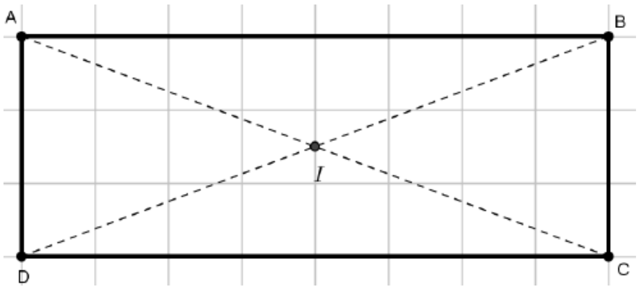
$\vec{u} = \overrightarrow{MD}$

$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = BD \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = BD \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = BD \Leftrightarrow \boldsymbol{MD = BD}$

**L'ensemble $(S)$ des points $M$ et $\mathcal{P}$ tel que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = BD$ est le cercle de centre $D$ et de rayon $BD$**

b) On suppose maintenant que ABCD est un rectangle. Déterminons l'ensemble $(\Sigma)$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$$




$MA^2 - MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 - \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}\right)^2 + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2$

$= (MD^2 + 2\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DA} + DA^2) - \left(MD^2 + 2\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DB} + DB^2\right) + \left(MD^2 + 2\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DC} + DC^2\right)$

$= MD^2 + 2\overrightarrow{MD}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right) + DA^2 - DB^2 + DC^2$

$= MD^2 + 2MD\left(\vec{0}\right) + DA^2 - DB^2 + DC^2$

$= \boldsymbol{MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2}$

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2 \Leftrightarrow MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2 = BD^2$

$\Leftrightarrow MD^2 = -DA^2 + 2DB^2 - DC^2$

$\Leftrightarrow MD^2 = 2DB^2 - (DA^2 + DC^2)$

$\Leftrightarrow MD^2 = 2DB^2 - AC^2$ car $AC^2 = DA^2 + DC^2$ $(Théorème\ de\ pythagore)$

$\Leftrightarrow MD^2 = 2DB^2 - DB$ car $AC = DB$ (voir figure)

$\Leftrightarrow MD^2 = DB^2$

$\Leftrightarrow MD = DB$

**L'ensemble $(\Sigma)$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$ est le cercle de centre $D$ et de rayon $DB$.**

2) Déterminons la solution générale de l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Equation caractéristique associée : $r^2 + 4r + 4 = 0$

$r_1 = r_2 = -2$

$\boldsymbol{f(x) = (Ax + B)e^{-2x}}$ **avec $A \in \mathbb{R}$ $et$ $B \in \mathbb{R}$**

Trouvons la solution particulière $f$ dont la courbe représentative $(C)$ admet au point $A(0\ ;\ 1)$ une tangente parallèle à la droite d'équation : $3x + y - 2 = 0$.

$f'(x) = Ae^{-2x} - 2e^{-2x}(Ax + B)$

$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A - 2B = -3 \Leftrightarrow A = -1 \end{cases}$ . Alors $\boldsymbol{f(x) = (-x + 1)e^{-2x}}$

Les coordonnées de l'extremum de $(C)$?

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -e^{-2x} - 2e^{-2x}.(-x + 1) = (-1 + 2x - 2)e^{-2x} = (2x - 3)e^{-2x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + 1\right)e^{-3} = -\frac{1}{2}e^{-3}$

**Le point $B\left(\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}e^{-3}\right)$ sont Les coordonnées de l'extremum de $(C)$**

## Problème:______________________________________________(10 pts)

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = x\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

1) Précisons l'ensemble de définition $D_f$ $de$ $f$ ; étudions sa continuité et sa dérivabilité en énonçant le théorème utisé.

$D_f = \left\{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ \frac{x+1}{x} \neq 0\ \ et\ \ x \neq 0\right\}$

$\boldsymbol{D_f = \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\}}$

**La fonction $x \longmapsto \ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$ continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\}$.**

**Le fonction $x \longmapsto x$ *est* continue et dérivables sur $\mathbb{R}$.**

**Alors la fonction $f(x) = x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\}$ car produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\}$**

2) a) Etudions la dérivabilité de $f'$ fonction dérivée de $f$, et déduisons-en les variation de $f'$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\}\ f'(x) = \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \times x = \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} \times x = \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\}\ f'(x) = \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}$

**$f'$*es*t définie continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\}$ car somme de deux fonctions définies continues et dérivables sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\}$**

$\forall x \in \mathbb{R} - \{\mathbf{-1}\ ;\ \mathbf{0}\}\ ;\ \boldsymbol{f''(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{\mathbf{-1}\ ;\ \mathbf{0}\}\ ;\ f''(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$ son signe depend de $-\frac{1}{x}$

**$\forall x \in ]-\infty\ ;\ -1[ \cup ]-1\ ;\ 0[\ ;\ f''(x) > 0$. Alors $f'$ est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ -1[ \cup ]-1\ ;\ 0[$.**

**$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f''(x) < 0$. Alors $f'$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$**

b) soit $F$ la restriction de $f'$ à l'intervalle $I = ]-1\ ;\ 0]$. Démontrons que $F$ est une bijection de $I$ sur un intervalle à préciser.

$f'/_I = F(x) = \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}$

**La fonction F est continue et strictement croissante sur $]-1\ ;\ 0[$, elle réalise donc une bijection de $]-1\ ;\ 0[$ *sur* $J = \left]\lim\limits_{x\to-1^+} f'(x)\ \ ;\ \ \lim\limits_{x\to0^-} f'(x)\right[ = ]-\infty\ ;\ +\infty[$**

En effet :

$\lim\limits_{x\to-1^+} F(x) = \ln\left|1+\frac{1}{-1}\right| - \frac{1}{-1+1} = \ln|0^+| - \frac{1}{0^+} = -\infty - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} F(x) = \ln\left|1+\frac{1}{0^-}\right| - \frac{1}{0+1} = +\infty$

- Déduisons-en que dans $I$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique notée $\alpha$.

$0 \in J = ]-\infty\ ;\ +\infty[$, Alors l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in ]-1\ ;\ 0[\ telle\ que\ f'(\alpha) = 0$

- Montrera que $\alpha > -\frac{1}{2}$.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln|1-2| - 2 = -2$

$\boldsymbol{f'\left(-\frac{1}{2}\right) \times \lim\limits_{x\to0} f'(x) < 0\ \ alors\ \alpha \in \left]-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right[}$ **é*quivaut* à** $\boldsymbol{\alpha > -\frac{1}{2}}$.

c) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\}\ f'(x) = \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0}$

d) Des résultats précédents, déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in D_{f'}$ et les variations de $f$.

- Tableau de variation de $f'$:

$\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = \ln\left|1+\frac{1}{0^+}\right| - \frac{1}{0+1} = +\infty$

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \ln\left|1+\frac{1}{-1}\right| - \frac{1}{-1+1} = \ln|0^{-1}| - \frac{1}{0^-} = -\infty + \infty \quad FI$$

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-}\left[\frac{(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1}{x+1}\right] = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | ¦ | | ‖ | $-$ | |
| $f'(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $(0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

D'après le tableau de variation de $f'$;

**$\forall\ x ]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ [\alpha\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) \geq 0$. Alors $f$ est croissante sur $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ [\alpha\ ;\ +\infty[$.**

**$\forall\ x \in\ ]-1\ ;\ \alpha]\ ;\ f'(x) \leq 0$. Alors $f$ est décroissante sur $]-1\ ;\ \alpha]$ .**

3) Déterminons les limites de $f$ aux bornes de $D_f$.

$f(x) = x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$ ; $D_f = \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\}$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty(0)\ FI$

Posons $1+\frac{1}{x} = X \Leftrightarrow x = \frac{1}{X-1}$

$si\ \ x \longrightarrow +\infty\ \ alors\ \ X \longrightarrow 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to 1}\left(\frac{1}{X-1}\ln|x|\right) = \lim_{X\to 1}\left(\frac{\ln|X|}{X-1}\right) = ln'(1)$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\ln(0^+) = +\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|\right) = 0^-(+\infty)\ \ FI$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = x\ln|x+1| - x\ln|x| = 0$$

$f(x) = x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$ ; $D_f = \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(0)\ FI$

Posons $1+\frac{1}{x} = X \Leftrightarrow x = \frac{1}{X-1}$

$si\ \ x \longrightarrow -\infty\ \ alors\ \ X \longrightarrow 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to 1}\left(\frac{1}{X-1}\ln|x|\right) = \lim_{X\to 1}\left(\frac{\ln|X|}{X-1}\right) = ln'(1)$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\ln(0^+) = +\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|\right) = 0^+(+\infty)\ \ FI$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = x\ln|x+1| - x\ln|x| = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

4) Soit $h$ la fonction de $\mathbb{R}\ \ vers\ \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} h(x) = f(x) & si\ \ x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

a) Démontrons que $h$ est le prolongement par continuité de $f\ \ en\ \ 0$.

**La fonction $f$ n'est pas définie en $x = 0$ mais elle admet une limite en ce point. Alors $f$ admet un prolongement par continuité au point $x = 0$ définie par : $\begin{cases} h(x) = f(x) & si\ \ x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$**

**Donc $h$ est le prolongement par continuité de $f\ \ en\ \ 0$.**

b) Etudions la dérivabilité de $h$

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

**La fonction $h$ n'est pas dérivable en $0$.**

**La fonction $h$ n'est pas dérivable en $-1$ car elle n'est pas continue en $-1$.**

**On en déduit que $h$ est continue et dérivable sur $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]-1\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.**

**Conclusion de la partie I :** Donnons le tableau de variation de $f$ et construire sa courbe $(c)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ en précisant l'intersection de $(C)$ avec l'axe des abscisses.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $0 \Vert 0$ | $\nearrow$ | $1$ |

$(C_f) \cap (0x) : f(x) = 0 = ?$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\; ou \;\; \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 0$

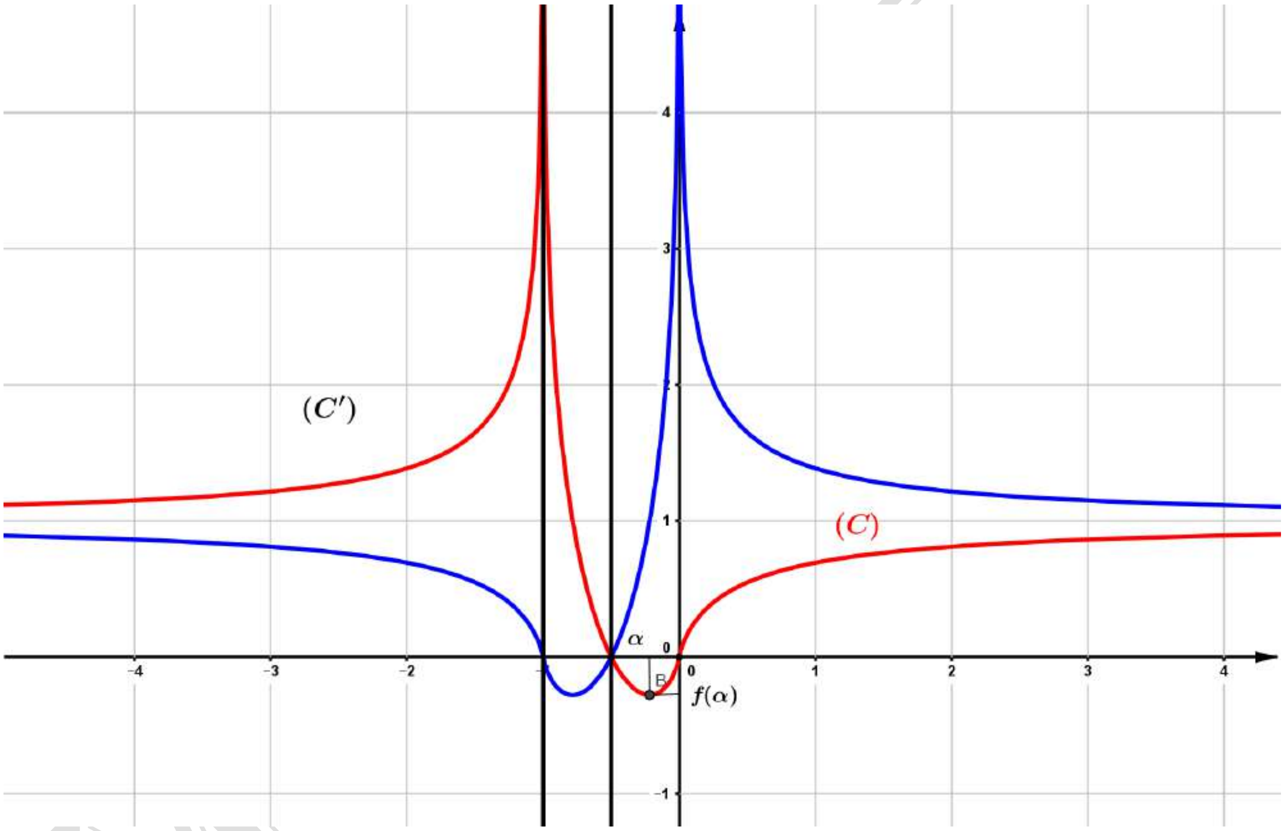
$\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|1 + \frac{1}{x}\right| = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = 1 \;\; ou \;\; 1 + \frac{1}{x} = -1$

$\Leftrightarrow \quad x + 1 = x \;\; ou \;\; x + 1 = -x$

$\Leftrightarrow \;\; x = -\frac{1}{2}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\; ou \;\; x = -\frac{1}{2}$

$(C_f) \cap (0x) = \left\{\left(-\frac{1}{2} \;;\; 0\right) \quad ; \quad (0 \;;\; 0)\right\}$




Partie II :

$\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O \;;\; \vec{\imath} \;;\; \vec{\jmath})$.

Soit $(S)$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(\Delta)$ d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

1) Soit $C' = S(C)$ (image de $C$ par $S$). Construisons $(C')$ dans le même repère que $(C)$. (voir repère)

- Soit $g$ la fonction admettant $(C')$ comme courbe représentative dans le repère $(O \;;\; \vec{\imath} \;;\; \vec{\jmath})$.

Vérifions que $g(x) = (x+1)\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$ et précisons $D_g$, ensemble de définition de $g$.

Soit $M(x \;;\; y) \in (C) \;\; et \;\; M'(x' ;\; y') \in (C')$

$$S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} I \;\; milieu\, de\, [MM'] \;;\;\; I \in \Delta \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \;\; ou \;\; \vec{u}(0 \;;\; 1) \;\; est\; un\; vecteur\; directeur\; de\; \Delta \end{cases}$$

$I \ milieu \ de \ [MM'] \Leftrightarrow I\left(\frac{x'+x}{2} \quad ; \quad \frac{y'+y}{2}\right)$

$\begin{cases} I \in \Delta \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x'+x}{2} = -\frac{1}{2} \\ \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+x = -1 \\ y'-y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1-x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x'-1 \\ y = y' \end{cases}$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y' = f(-x-1) \Leftrightarrow y' = (-x-1)\ln\left|1+\frac{1}{-x-1}\right| \Leftrightarrow y' = -(x'+1)\ln\left|\frac{-x-1+1}{-x'-1}\right|$

$\Leftrightarrow y' = -(x'+1)\ln\left|\frac{-x}{-x'-1}\right| \Leftrightarrow y' = -(x'+1)\ln\left|\frac{x'}{x'+1}\right| \Leftrightarrow y' = (x'+1)\ln\left|\frac{x'+1}{x'}\right|$

$\boldsymbol{M\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in (C') \Leftrightarrow y' = g(x') = (x'+1)\ln\left|\frac{x'+1}{x'}\right|}$

**D'où pour tout $\boldsymbol{x \in D_g}$, $\boldsymbol{g(x) = (x+1)\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}$ $\quad$ *ou* $\boldsymbol{g(x) = (x+1)\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|}$**

$D_g = \left\{x/x \in \mathbb{R} \ ; \quad x \neq 0 \ \ et \ \ \frac{x+1}{x} \neq 0\right\}$

$\boldsymbol{D_g = \mathbb{R} - \{0 \ ; -1\} = ]-\infty \ ; \ 0[\cup]0 \ ; -1[\cup]-1 \ ; +\infty[}$

2) Résolvons graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.

$(C) \cap (C') : \ f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$

**Partie III**

1) Justifions que $\forall \ n \in \mathbb{N}^* \ \ f(n) < 1 < g(n)$.

Graphiquement :

$\forall \ x \geq 0 \ \ ; \ \ f(x) - 1 < 0$ car $(C)$ est en dessous de la droite d'équation $y = 1, asymptote \ horyzontale$

$\forall \ x \geq 0 \ \ ; \ \ g(x) - 1 > 0$ car $(C')$ est au-dessus de la droite d'équation $y = 1, asymptote \ horyzontale$

Alors :

$\forall \ n \in \mathbb{N}^* \ ; \ f(n) - 1 < 0 \ \Leftrightarrow \ f(n) < 1 \quad (I)$

$\forall \ n \in \mathbb{N}^* \ ; \ g(n) - 1 > 0 \ \Leftrightarrow \ g(n) > 1 \quad (II)$

Conclusion :

$\boldsymbol{(I) \ et \ (II) \ \Leftrightarrow f(n) < 1 < g(n)}$

Déduisons-en l'encadrement suivant de $e$ : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

$\forall \ n \in \mathbb{N}^* \ ; \ f(n) < 1 < g(n) \ \Leftrightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \ln e < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e^1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

**D'où $\boldsymbol{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$**

Précisons cet encadrement si $n = 1$.

$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < e^1 < \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} \Leftrightarrow \boldsymbol{2 < e < 4}$

Soit $l(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Démontrons que $\forall \ n \in \mathbb{N}^* \ \ l(n)$ est majoré par $\frac{4}{n}$ et minoré par $\frac{2}{n}$.

$l(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{l(n) = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*;\ \ n \geq 1 \Leftrightarrow f(n) \geq f(1)$

$$\Leftrightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \ln 2$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \ln 2$$
$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{2}{n}$$
$$\Leftrightarrow l(n) \geq \frac{2}{n}$$

$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ ; $\boldsymbol{l(n)} \geq \boldsymbol{\frac{2}{n}}$**. Alors** $\boldsymbol{l(n)}$ **est minoré par** $\boldsymbol{\frac{2}{n}}$**. (1)**

D'après 1),

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ ; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e^1$ et $2 < e < 4$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ ; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < 4 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < 4$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{4}{n}$$
$$\Leftrightarrow l(n) < \frac{4}{n}$$

$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ ; $\boldsymbol{l(n)} < \boldsymbol{\frac{4}{n}}$**. Alors** $\boldsymbol{l(n)}$ **est majoré par** $\boldsymbol{\frac{4}{n}}$**. (2)**

Conclusion :

**D'après (1) et (2),** $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ ; $\boldsymbol{\frac{2}{n} \leq l(n) < \frac{4}{n}}$. $\boldsymbol{Alors,\ l(n)}$ **est borné** $\left(\boldsymbol{major\text{é}\ par\ \frac{4}{n}\ et\ minor\text{é}\ par\ \frac{2}{n}}\right)$.

2) Donnons un rang à partir duquel l'encadrement ci-dessus de $e$ permet d'obtenir une valeur approchée de $e$ à $10^{-3}$ c'est-à-dire $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < 10^{-3}$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e^1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow 0 < e^1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$\Leftrightarrow 0 < e^1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < l(n)$$
$$\Leftrightarrow \left|e^1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| < l(n)$$
$$\Leftrightarrow \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < l(n)$$

$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < 10^{-3} \Leftrightarrow l(n) < 10^{-3}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ ; $\frac{2}{n} \leq l(n) < \frac{4}{n}$ et $l(n) < 10^{-3}$. Alors $\frac{4}{n} \leq 10^{-3}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ ; $\frac{4}{n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{n}{4} \geq \frac{1}{10^{-3}} \Leftrightarrow \frac{n}{4} \geq 10^3 \Leftrightarrow n \geq 4 \times 10^3 \Leftrightarrow \boldsymbol{n \geq 4000}$

**Pour** $\boldsymbol{n = 4000}$ **, l'encadrement ci-dessus de** $\boldsymbol{e}$ **permet d'obtenir une valeur approchée de** $\boldsymbol{e}$ **à** $\boldsymbol{10^{-3}}$ **c'est-à-dire** $\boldsymbol{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < 10^{-3}}$.

## Exercice 1 : (5pts)

1) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(\alpha\ ;\ \beta)$ dans chacun des cas suivants :

a) $17\alpha - 19\beta = 2$ 0,5 pt

b) $17\alpha - 19\beta = -2$ 0,5 pt

2) Déterminer l'ensemble des entiers $n$ tels que :

a) $n \equiv 0[17]\ \ et\ \ n \equiv -2[19]$ 0,5 pt

b) $n \equiv 0[19]\ \ et\ \ n \equiv -2[17]$ 0,5 pt

3) En déduire l'ensemble des entiers $n$ tels que $n^2 + 2n$ soit divisible par 323. 1 pt

4) $P$ est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})\ et\ \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

On considère l'application affine $f : P \longrightarrow P\ ;\ M(x\ ;\ y) \longmapsto M'(x'\ ;\ y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

a) Vérifier que $f$ est bijective. 0,5 pt

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$. 0,5 pt

c) On désigne par $Z\ \ et\ \ Z'$ les affixes respectives des points $M\ \ et\ \ M'$. Exprimer $Z'$ en fonction de $Z$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $f$. 1 pt

## Exercice 2 : $(5pts)$

On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1er ordre tel que :

$$\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} \\ z' - y = e^{2x} \end{cases}$$ Où $y\ et\ z$ désignent deux fonctions inconnues de variables réels x.

a) Former l'équation différentielle du second ordre $(E)$ à la quelle satisfait $y(x)$ 0,5 pt

b) Intégrer l'équation $(E)$ et en déduire la solution générale du système. 0,5 pt

Préciser la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1\ \ et\ \ z = -1\ pour\ x = 0.$ 0,5 pt

2) On considère la suite complexe $(W_n)$ définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ ,\ W_n = \left(1 + \frac{1}{nz}\right)^n$ $où$ $z$ est un complexe non nul tel que $z = x + yi$.

a) Calculer $\ln|W_n|$ et montrer que $\ln|W_n| = \frac{n}{2}\ln(1 + \frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}$. 1 pt

b) On pose $\alpha_n = \frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}$

− Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n$. $1\ pt$

− Vérifier que $\ln|W_n| = \frac{n}{2}\alpha_n \frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}$. 0,5 pt

En déduire pour z, complexe de module 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln|W_n|$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} |W_n|$ . $1\ pt$

## Problème :______________________________________________(10 pts)

Pour tout réel $k$ strictement positif, on considère la fonction $f_k$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$. Soit $(C_k)$ la courbe représentant les variations de $f_k$ dans le plan muni d'un repère orthogonal, d'unité (5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

On considère la fonction $g$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - x$.

1) Etudier le sens de variation de $g$. 0,5 pt

2) En déduire que pour tout réel $\alpha$ positif ou nul, $\ln(1+\alpha) \leq a$. 0,5 pt

II) 1) Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction de $f_1$. 1pt

2) Montrer que pour tout réel $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de $f_1$ en $+\infty$.

3) Dresser le tableau de variation de $f_1$.

III) 1) Calculer $f_k'(x)$ pour tout $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction $f_k$.

2) Montrer que pour tout réel $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de $f_k$ $en$ $+\infty$. 0,5 pt

3) a) Dresser le tableau de variation de $f_k$. 0,5 pt

b) Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $on\ a :\ f_k(x) \leq \frac{k}{2}$. 0,5 pt

4) Déterminer une équation de la tangente $T_k$ à $(C_k)$. 0,5 pt

5) Soit $p$ $et$ $m$ deux réel strictement positifs tels que $p < m$. Etudier la position relative de $(C_p)$ $et$ $(C_m)$. 0,5 pt

6) Tracer les courbes $(C_1)$ et $(C_2)$ ainsi que leurs tangentes respectives $T_1$ $et$ $T_2$ en 0 dans le repère orthogonal du plan. 1,5 pt

IV) Soit $\lambda$ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $(C_k)$ et les droites d'équations $x = 0$ $et$ $x = \lambda$.

1) Sans calculer $A(\lambda)$, montrer que $A(\lambda) \leq \int_0^\lambda kxe^{-x}\,dx$. (On pourra utiliser les résultats de la question préliminaire I) 0,5 pt

2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale : $\int_0^\lambda kxe^{-k}\,dx$. 0,5 pt

3) On admet que $A(\lambda)$ a une limite en $+\infty$. Monter que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) \leq k$.

Interpréter graphiquement ce résultat. 0,5 pt

## Exercice 1 : (5pts)

1) Déterminons l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(\alpha\ ;\ \beta)$ dans chacun des cas suivants :

a) $17\alpha - 19\beta = 2 \quad (E)$

$19\beta = -2 + 17\beta \Leftrightarrow 19\beta \equiv -2[17] \Leftrightarrow 2\beta \equiv -2[17] \Leftrightarrow \beta \equiv -1[17] \Leftrightarrow \beta = -1 + 17k \ \ avec\ k \in \mathbb{Z}$

Remplaçons $\beta$ par sa valeur dans (E) :

$(E):\ 17\alpha - 19\beta = 2 \Leftrightarrow 17\alpha - 19(-1 + 17k) = 2 \Leftrightarrow 17\alpha + 19 - 323k = 2 \Leftrightarrow \alpha = -1 + 19k \ \ avec\ k \in \mathbb{Z}$

$\boldsymbol{S = \{(-1 + 19k\ \ ;\ \ -1 + 17k)\ ;k \in \mathbb{Z}\}}$ **0,5pt**

b) $17\alpha - 19\beta = -2 \ \ (E')$

$17\alpha - 19\beta = -2 \ \ (E') \Leftrightarrow 19\beta = 17\alpha + 2 \Leftrightarrow 19\beta \equiv 2[17] \Leftrightarrow 2\beta \equiv 2[17] \Leftrightarrow \beta \equiv 1[17] \Leftrightarrow \beta = 1 + 17k\ avec\ k \in \mathbb{Z}$

Remplaçons $\beta$ par sa valeur dans (E') :

$(E'):\ 17\alpha - 19\beta = -2 \Leftrightarrow 17\alpha - 19(1 + 17k) = -2 \Leftrightarrow 17\alpha - 19 - 323k = -2 \Leftrightarrow \alpha = 1 + 19k \ \ avec\ k \in \mathbb{Z}$

$\boldsymbol{S = \{(1 + 19k\ \ ;\ \ 1 + 17k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}}$ **0,5pt**

2) Déterminons l'ensemble des entiers $n$ tels que :

a) $n \equiv 0[17] \quad et \quad n \equiv -2[19]$

$\begin{cases} n \equiv 0[17] \\ n \equiv -2[19] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 17u & (1) \\ n = -2 + 19v & (2) \end{cases}$ avec $u \in \mathbb{Z}\ ;\ v \in \mathbb{Z}$

$(1) = (2) \Leftrightarrow 17u = -2 + 19v \Leftrightarrow 17u - 19v = -2 \Leftrightarrow 17\alpha - 19\beta = -2 \Leftrightarrow \alpha = u = 1 + 19k \quad et \quad \beta = v = 1 + 17k$

$$\begin{cases} n = 17u \\ n = -2 + 19v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 17(1 + 19k) \\ n = -2 + 19(1 + 17k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 17 + 323k \\ n = 17 + 323k \end{cases} \ k \in \mathbb{Z}$$

$\boldsymbol{S = \{n \in \mathbb{Z}/17 + 323k \quad avec\ \ k \in \mathbb{Z}\}}$ **0,5pt**

b) $n \equiv 0[19] \quad et \quad n \equiv -2[17]$

$\begin{cases} n \equiv 0[19] \\ n \equiv -2[17] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 19u & (1) \\ n = -2 + 17v & (2) \end{cases}$ avec $u \in \mathbb{Z}\ ;\ v \in \mathbb{Z}$

$(1) = (2) \Leftrightarrow 19u = -2 + 17v \Leftrightarrow 17v - 19u = 2 \Leftrightarrow v = \alpha = -1 + 19k \ \ et\ u = \beta = -1 + 17k$

$$Ainsi:\ \begin{cases} n = 19u \\ n = -2 + 17v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 19(-1 + 17k) \\ n = -2 + 17(-1 + 19) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -19 + 323k \\ n = -19 + 323k \end{cases}$$

$\boldsymbol{S = \{n \in \mathbb{Z}/-19 + 323k \quad avec\ \ k \in \mathbb{Z}\}}$ **0,5pt**

3) Déduisons-en l'ensemble des entiers $n$ tels que $n^2 + 2n$ soit divisible par 323.

$n^2 + 2n \equiv 0[223] \Leftrightarrow n(n + 2) \equiv 0[323] \Leftrightarrow n(n + 2) = 323k \qquad avec\ \ k \in \mathbb{Z}$

$$n(n + 2) = 323k \Leftrightarrow n(n + 2) = 19 \times 17k \Leftrightarrow \begin{cases} n = 19 \\ n + 2 = 17k \end{cases} ou \begin{cases} n = 17k \\ n + 2 = 19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0[19] \\ n + 2 \equiv 0[17] \end{cases} ou \begin{cases} n \equiv 0[17] \\ n + 2 \equiv 0[19] \end{cases}$$

$\begin{cases} n \equiv 0[19] \\ n + 2 \equiv 0[17] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0[19] \\ n \equiv -2[17] \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = -1 + 323k\ avec\ k} \in \mathbb{Z}$ D'après b)

$\begin{cases} n \equiv 0[17] \\ n + 2 \equiv 0[19] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0[17] \\ n \equiv -2[19] \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = 17 + 323k\ avec\ k} \in \mathbb{Z}$ D'après a)

$\boldsymbol{S = \{n \in \mathbb{Z}/n = 17 + 323k \quad ou \quad n = -1 + 323k\}\ avec\ k} \in \mathbb{Z}$ **1pt**

4) $P$ est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )\ et\ \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres

complexes. On considère l'application affine $f : P \longrightarrow P$ ; $M(x\ ;\ y) \longmapsto M'(x'\ ;\ y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

a) Vérifions que $f$ est bijective.

Une application affine $f$ est bijective si et seulement si $\det(M_\varphi) \neq 0$

La matrice de l'application linéaire $\varphi$ associée à $f$ est $M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

$\det(M_\varphi) = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-3) = 4 \neq 0$

**$\det(M_\varphi) \neq 0$, alors l'application affine $f$ est bijective.** **0,5pt**

b) Déterminons l'ensemble des points invariants par $f$.

Un point $M$ est invariant par une application affine $f$ si et seulement si $f(M) = M$.

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0 \\ x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M\binom{1}{2}$$

**$M\binom{1}{2}$ est le seul point invariant par $f$.** **0,5pt**

c) On désigne par $Z$ et $Z'$ les affixes respectives des points $M$ et $M'$. Exprimons $Z'$ en fonction de $Z$.

$$i\ \times \begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ iy' = xi\sqrt{3} + yi - \sqrt{3}i \end{cases}$$

$$x' + y'i = (x + yi) + (xi - y)\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}i$$

$$x' + y'i = (x + yi) + i(x + yi)\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}i$$

$$x' + y'i = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(x + yi) + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}i$$

$$\boldsymbol{Z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)Z + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}i}$$

Déduisons-en la nature et les éléments caractéristiques de $f$.

$Z' = aZ + b$ avec $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}i$

**$a \in \mathbb{C}^*$ et $|a| = 2$. Alors $f$ est une similitude directe**

Ses éléments caractéristiques sont :

**Son rapport : $k = |a| = 2$;** **1pt**

**Son angle : $\theta = \arg a = \frac{\pi}{3}$;**

**Son centre : $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{1-1-i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{-i\sqrt{3}} = \frac{2-i}{-i} = 1 + 2i$**

## Exercice 2 :______________________________________________ ____(4pts)

On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1er ordre tel que :

$$\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} & (1) \\ z' - y = e^{2x} & (2) \end{cases}$$

Où $y$ et $z$ désignent deux fonctions inconnues de variables réels x.

a) Formons l'équation différentielle du second ordre $(E)$ à la quelle satisfait $y(x)$

Dans (1) : $y' + 4z = 2e^{2x} \Leftrightarrow 4z = 2e^{2x} - y' \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}y' \Leftrightarrow z' = e^{2x} - \frac{1}{4}y''$

Remplaçons $z'$ par son expression dans (2)

(2) : $z' - y = e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x} - \frac{1}{4}y'' - y = e^{2x} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}y'' - y = 0 \Leftrightarrow y'' + 4y = 0$

**L'équation différentielle du second ordre $(E)$ à la quelle satisfait $y(x)$ est : $y'' + 4y = 0$** **0,5pt**

b) Intégrons l'équation $(E)$ et déduisons-en la solution générale du système.

$y'' + 4y = 0$

Son équation caractéristique est :

$r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -4 \Leftrightarrow r = 2i \;\; ou \;\; r = -2i$

$\boldsymbol{y = A\cos 2x + B\sin 2x}$ $\quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R} \;;\; \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}$ Intégrale de l'équation $(E)$

$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$

$z = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}y' = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(e^{2x} + A\sin 2x - B\cos 2x)$

$\boldsymbol{S = \left\{\left(A\cos 2x + B\sin 2x \;\;;\;\; \frac{1}{2}(e^{2x} + A\sin 2x - B\cos 2x)\right)\right\}}$ $\boldsymbol{A \in \mathbb{R} \;;\; B \in \mathbb{R}}$ **Solution générale du système** **0,5pt**

Précisons la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1 \;\; et \;\; z = -1 \; pour \; x = 0$.

C'est-à-dire : $y(0) = 1 \;\; et \;\; z(0) = -1$

$y(0) = 1 \Leftrightarrow A\cos 0 + B\sin 0 = 1 \Leftrightarrow A = 1$

$z(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^0 + A\sin 0 - B\cos 0) = -1 \Leftrightarrow 1 - B = -2 \Leftrightarrow B = 3$

D'où :

$\boldsymbol{S = \left\{\left(\cos 2x + 3\sin 2x \;\;;\;\; \frac{1}{2}(e^{2x} + \sin 2x - 3\cos 2x)\right)\right\}}$ **Solution générale du système** **0,5pt**

2) On considère la suite complexe $(W_n)$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ , $W_n = \left(1 + \frac{1}{nz}\right)^n$ $où$ $z$ est un complexe non nul tel que $z = x + yi$.

a) Calculons $\ln|W_n|$ et montrons que $\ln|W_n| = \frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}\right)$.

$$W_n = \left(1 + \frac{1}{nz}\right)^n = \left(1 + \frac{x - yi}{n(x^2+y^2)}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n(x^2+y^2)} - \frac{1}{n(x^2+y^2)}y\right)^n$$

$$\ln|W_n| = \ln\left|\left(1 + \frac{x}{n(x^2+y^2)} - \frac{y}{n(x^2+y^2)}i\right)^n\right| = \ln\left|1 + \frac{x}{n(x^2+y^2)} - \frac{y}{n(x^2+y^2)}i\right|^n = n\ln\left|1 + \frac{x}{n(x^2+y^2)} - \frac{y}{n(x^2+y^2)}i\right|$$

$$= n\ln\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n(x^2+y^2)}\right)^2 + \left(\frac{y}{n(x^2+y^2)}\right)^2} = \frac{n}{2}\ln\left[\left(1 + \frac{x}{n(x^2+y^2)}\right)^2 + \left(\frac{y}{n(x^2+y^2)}\right)^2\right]$$

$$\boldsymbol{\ln|W_n| = \frac{n}{2}\ln\left[\left(1 + \frac{x}{n(x^2+y^2)}\right)^2 + \left(\frac{y}{n(x^2+y^2)}\right)^2\right]}$$ **0,5pt**

Montrons que $\ln|W_n| = \frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}\right)$ :

$$\ln|W_n| = \frac{n}{2}\ln\left[\left(1 + \frac{x}{n(x^2+y^2)}\right)^2 + \left(\frac{y}{n(x^2+y^2)}\right)^2\right]$$

$$\ln|W_n| = \frac{n}{2}\ln\left[1 + \frac{2x}{n(x^2+y^2)} + \frac{x^2}{n^2(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{n^2(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \frac{n}{2}\ln\left[1 + \frac{2x}{n(x^2+y^2)} + \frac{(x^2+y^2)}{n^2(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \frac{n}{2}\ln\left[1 + \frac{2x}{n(x^2+y^2)} + \frac{1}{n^2(x^2+y^2)}\right]$$

$= \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2nx+1}{n^2(x^2+y^2)}\right)$ CQFD

D'où $\mathbf{\ln|W_n| = \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}\right)}$ **0,5pt**

b) On pose $\alpha_n = \frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}$

− Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2nx}{n^2(x^2+y^2)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2x}{n(x^2+y^2)}\right) = 0 \iff \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0} \quad \mathbf{0,5pt}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\alpha_n = \lim_{n\to+\infty}\left[n.\frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2n^2x}{n^2(x^2+y^2)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2x}{n^2(x^2+y^2)}\right) = \frac{2x}{x^2+y^2} \iff \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} n\alpha_n = \frac{2x}{x^2+y^2}} \quad \mathbf{0,5pt}$$

− Vérifions que $\ln|W_n| = \frac{n}{2}\alpha_n\frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}$.

$\frac{n}{2}\alpha_n\frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{n}{2}\ln(1+\alpha_n) = \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}\right) = \ln|W_n|$

D'où $\mathbf{\ln|W_n| = \frac{n}{2}\alpha_n\frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}}$ **0,5pt**

− Déduisons − en pour z, complexe de module 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln|W_n|$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} |W_n|$.

$$\lim_{n\to+\infty} \ln|W_n| = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2}\alpha_n\frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}(n\alpha_n) \times \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}\right) = ?$$

$$* \lim_{n\to+\infty}(n\alpha_n) = \frac{2x}{x^2+y^2} = 2x \quad car \ |z| = 1 \ c'est-à-dire \ x^2+y^2 = 1$$

$$* \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}\right) = \frac{\infty}{\infty} \ FI$$

Posons $\alpha_n = X$ *si* $n$ tend vers $\infty$ alors $\alpha_n = X$ tend vers 0. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}\right) = \lim_{X\to 0}\left(\frac{\ln(1+X)}{X}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln|W_n| = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}(n\alpha_n) \times \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2x) \times (1)$$

$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \ln|W_n| = x.}$ **0,5pt**

$\lim\limits_{n\to+\infty} |W_n| = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln|W_n| = x \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |W_n| = e^x \iff \boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} |W_n| = e^x}$ **0,5pt**

## Problème : (10 pts)

Pour tout réel $k$ strictement positif, on considère la fonction $f_k$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$. Soit $(C_k)$ la courbe représentant les variations de $f_k$ dans le plan muni d'un repère orthogonal, d'unité (5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

On considère la fonction $g$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - x$.

1) Etudions le sens de variation de $g$.

Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x} \leq 0$

**$\forall\, x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) \leq 0$. Alors $g$ est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.** **0,5pt**

2) Déduisons-en que pour tout réel $\alpha$ positif ou nul, $\ln(1+\alpha) \leq \alpha$.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$g(0) = \ln(1+0) + 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty - \infty \ FI$

Levons l'indétermination

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x} - 1\right]$

$= +\infty[0 \times 1 - 1] = -\infty$

$\forall\, x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ \ g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x$

$\boldsymbol{D'o}$**ù**, $\ \forall\, \boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0}\ ;\ +\infty[\ ;\ \ \mathbf{ln}(\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}) \leq \boldsymbol{\alpha}$

**Alors, pour tout réel $\boldsymbol{\alpha}$ positif ou nul, $\mathbf{ln}(\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}) \leq \boldsymbol{\alpha}$** **0,5pt**

II) 1) Calculons $f_1'(x)$ pour tout réel $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ déduisons en le sens de variation de la fonction de $f_1$.

$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x \Leftrightarrow f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ \ f_1'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \frac{e^x+1-e^x-x}{e^x+x} = \frac{1-x}{e^x+x}$

$\forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}\ ;\ +\infty[\ ;\ \ \boldsymbol{f_1'(x)} = \frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e^x}+\boldsymbol{x}}$ **0,5pt**

Pour tout $x \geq 0$, $\ e^x + x \geq 0$. Alors le signe de $f_1'(x)$ dépend de celui $1 - x$.

$1 - x = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$

| $\boldsymbol{x}$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}\ ;\ \ \mathbf{1}[\ ;\ \ \boldsymbol{f_1}'(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$.

**Alors, $\boldsymbol{f_1}'$ est strictement croissante sur $[\mathbf{0}\ ;\ \ \mathbf{1}[$.**

$\forall\, \boldsymbol{x} \in ]\mathbf{1}\ ;\ +\infty[\ ;\ \ \boldsymbol{f_1}'(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0}$. **0,5pt**

**Alors, $\boldsymbol{f_1}'$ est strictement décroissante sur $]\mathbf{1}\ ;\ +\infty[$**

$\forall \boldsymbol{x} \in \{\mathbf{1}\}\ ;\ \boldsymbol{f_1'(x)} = \mathbf{0}$. **Alors, $\boldsymbol{f_1}'$ est constante sur $\{\mathbf{1}\}$**

2) Montrons que pour tout réel $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $\ f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$.

$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ \ f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

$= \ln\left[e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right] - x$

$= \ln e^x + \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) - x$

$= x + \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) - x$

$= \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$

**Pour tout réel $\boldsymbol{x}$ appartenant à $[\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$, $\ \boldsymbol{f_1(x)} = \mathbf{ln}\left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e^x}}\right)$.**

$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + xe^{-x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln[1 - (-x)e^{-x}] = \ln 0 = 0$

$\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to +\infty} \boldsymbol{f_1(x)} = \mathbf{0}$. **0,5pt**

3) Dressons le tableau de variation de $f_1$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\ln(1+e^{-1})$ | $\searrow$ | $0$ |

$\lim_{x \to 0} f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{0}{e^0}\right) = \mathbf{0}$ **0,5pt**

III) 1) Calculons $f_k'(x)$ pour tout $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduisons-en le sens de variation de la fonction $f_k$.

$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$

$\forall\ \ x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ \ f_k'(x) = \frac{e^x+k}{e^x+kx} - 1 = \frac{e^x+k-e^x-kx}{e^x+kx} = \frac{k(1-x)}{e^x+kx}$

$\forall\ \ \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}\ ;\ +\infty[\ ;\ \ \boldsymbol{f_k'(x)} = \frac{\boldsymbol{k}(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{e^x}+\boldsymbol{kx}}$ **0,5pt** pour tout $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $k$ strictement positif, le signe de $f_k'(x)$ est du signe de $1-x$

$\forall x \in [0\ ;\ 1[\ ;\ f_k'(x) > 0$. **Alors $f_k$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1[$.**

$\forall x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ f_k'(x) < 0$. **Alors $f_k$ est strictement décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$** 0,5pt

$\forall x \in \{1\}\ ;\ f_k'(x) = 0$. **Alors $f_k$ est constante pour $x = 1$.**

2) Montrons que pour tout réel $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$.

$$\begin{aligned}\forall\ x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ f_k(x) &= \ln(e^x + kx) - x\\ &= \ln\left[e^x\left(1+\frac{kx}{e^x}\right)\right] - x\\ &= lne^x + \ln\left(1+\frac{kx}{e^x}\right) - x\\ &= x + \ln\left(1+\frac{kx}{e^x}\right) - x\\ &= \ln\left(1+\frac{kx}{e^x}\right)\end{aligned}$$

**D'où, pour tout réel $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$.** 0,5pt

Déduisons-en la limite de $f_k$ $en\ +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{kx}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln[1-k(-xe^{-x})] = \ln 1 = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = 0$. 0, 5pt

3) a) Dressons le tableau de variation de $f_k$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_k{}'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_k(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\ln(1+ke^{-1})$ | $\searrow$ | $0$ |

0,5pt

b) Montrons que pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $on\ a :\ f_k(x) \leq \frac{k}{2}$.

$\forall\ x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ \ k \geq 0\ ;\ \ \ln(1+ke^{-1}) > 0$. Alors :

$\forall\ x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ \ k \geq 0\ ;\ f_k(x) \leq \ln(1+ke^{-1}) \leq ke^{-1}$ d'après I-2)

$\forall\ x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ \ k \geq 0\ ;\ f_k(x) \leq ke^{-1} \Leftrightarrow f_k(x) \leq \frac{k}{e} \Leftrightarrow f_k(x) \leq \frac{k}{2}\quad CQFD$

**Ainsi, pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $on\ a :\ f_k(x) \leq \frac{k}{2}$.** 0,5pt

4) Déterminer une équation de la tangente $T_k$ à $(C_k)$.

$f_k$ est continue et dérivable en $x_0 = 0$

$(T): y = f_k'(0)(x-0) + f_k(0) = k(x-0) + 0 = kx$

$(T): y = kx$ 0,5pt

5) Soit $p\ et\ m$ deux réel strictement positifs tels que $p < m$. Etudions la position relative de $(C_p)\ et\ (C_m)$.

Pour tout réel $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$.

$f_p(x) = \ln\left(1 + p\frac{x}{e^x}\right)$ et $f_m(x) = \ln\left(1 + m\frac{x}{e^x}\right)$

$\forall\ p > 0\ ;\ m > 0\ ;\ x \geq 0\ tels\ que :\ p < m \Leftrightarrow p\frac{x}{e^x} < m\frac{x}{e^x}$

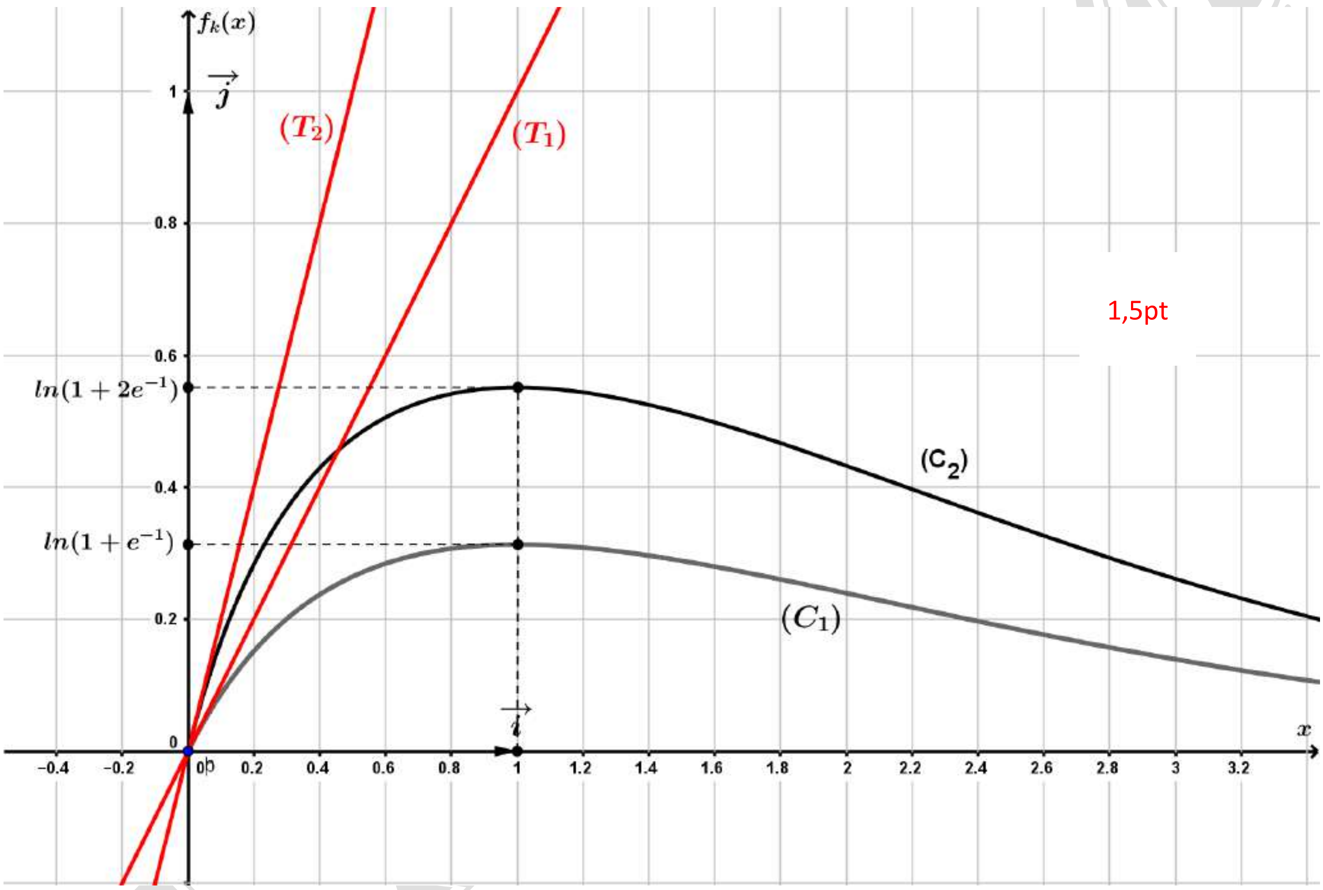
$$\Leftrightarrow 1 + p\frac{x}{e^x} < 1 + m\frac{x}{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+p\frac{x}{e^x}\right) < \ln\left(1+m\frac{x}{e^x}\right)$$
$$\Leftrightarrow f_p(x) < f_m(x)$$
$$\Leftrightarrow f_p(x) - f_m(x) < 0$$

**$\forall\ x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ p > 0\ ;\ m > 0\ f_p(x) - f_m(x) < 0$. Alors la courbe $(C_p)$ et $f_p$ est en-dessous de la courbe $(C_m)$ de $f_m$** **0,5pt**

6) Traçons les courbes $(C_1)$ et $(C_2)$ ainsi que leurs tangentes respectives $T_1\ \ et\ \ T_2$ en 0 dans le repère orthogonal du plan.

$f_1(x) = \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$ ; $f_2(x) = \ln\left(1+\frac{2x}{e^x}\right)$ ; $(T_1) : y = x$ ; $(T_2) : y = 2x$




1,5pt

IV) Soit $\lambda$ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $(C_k)$ et les droites d'équations $x = 0\ \ et\ \ x = \lambda$.

1) Sans calculer $A(\lambda)$, montrons que $A(\lambda) \leq \int_0^\lambda kxe^{-x}\,dx$.(On pourra utiliser les résultats de la question préliminaire I)

$\forall\ \ x \in [0\ ;\ +\infty[\ ,\ \ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right) \leq k\frac{x}{e^x} \Leftrightarrow \ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right) \leq kxe^{-x}$

$$\Leftrightarrow \int_0^\lambda \ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)dx \leq \int_0^\lambda kxe^{-x}\,dx$$
$$\Leftrightarrow A(\lambda) \leq \int_0^\lambda kxe^{-x}\,dx \quad \text{CQFD}$$

**D'où $A(\lambda) \leq \int_0^\lambda kxe^{-x}\,dx$** **0,5pt**

2) Calculons à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale : $\int_0^\lambda kxe^{-k}\,dx$.

Posons : $u = kx \Leftrightarrow u' = k$

$v' = e^{-x} \Leftrightarrow v = -e^{-x}$

$\int_0^\lambda kxe^{-k}\,dx = [-kxe^{-x}]_0^\lambda - \int_0^\lambda -ke^{-x} = -k\lambda e^{-\lambda} + k\int_0^\lambda e^{-x} = -k\lambda e^{-\lambda} + k[-e^{-x}]_0^\lambda = -k\lambda e^{-\lambda} + k(-e^{-\lambda}+1)$

$\int_0^\lambda kxe^{-k}\,dx = -k\lambda e^{-\lambda} - ke^{-\lambda} + k = -ke^{-\lambda}(\lambda+1) + k$

$\int_0^\lambda kxe^{-k}\,dx = -k\left(e^{-\lambda}(\lambda+1)-1\right)$ **0,5pt**

3) On admet que $A(\lambda)$ a une limite en $+\infty$. Montrons que $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) \leq k$.

$A(\lambda) \leq \int_0^\lambda kxe^{-x}\,dx \Leftrightarrow A(\lambda) \leq -k(e^{-\lambda}(\lambda+1)-1)$

$\Leftrightarrow \lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) \leq \lim_{\lambda\to+\infty}\left(-k\left(e^{-\lambda}(\lambda+1)-1\right)\right)$

$\Leftrightarrow \lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) \leq \lim_{\lambda\to+\infty}\left(-k(0(\lambda+1)-1)\right)$

$\Leftrightarrow \lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) \leq k \quad CQFD$ **0,5pt**

**$D'o$ù $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) \leq k$**

Interpréter graphiquement ce résultat.

**L’aire $A(\lambda)$ est inférieur ou égale à $k$ lorsque $\lambda$ prend des valeurs de plus en plus**

## Exercice 1 : 4pts

Soit $A \ et \ B$ deux points distincts du plan affine euclidien $P$ et $G$ le barycentre du système $\{(A, \ -2) \ ; \ (B, \ 1)\}$.

1) Démontrer que $A$ est le milieu du segment $[GB]$. 0,5pt

2) Montrer que l'ensemble $(\Gamma)$ des points du plan $P$ vérifiant $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$ est le cercle de centre $G$ et de rayon $r$ que l'on déterminera en fonction de $AB$. 1pt

3) Soit $C$ un point de $(\Gamma) \ et \ (D)$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$

Montrer que le point $C$ appartient à $(D)$. 0,5pt

4) Calculer $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}$ et en déduire l'ensemble $(D)$. 1pt

5) Démontrer que $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$. 1pt

## Exercice 2 : 5pts

1) a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $(p \ ; \ q)$ : $11p - 7q = 1$ 0,5pt

b) La division euclidienne d'un entier naturel $n$ par 7 donne pour reste 4 ; le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera son reste dans la division par 77 ? 0,5pt

c) Déterminer les valeurs de l'entier naturel $n$ inférieures à 200. 0,5pt

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle d'inconnue $f$ : $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$ 0,5pt

b) Soit l'équation $(E)$ : $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$. On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Montrer que l'équation $(E)$ est équivalente à : $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$ 0,5pt

Déduisez-en la résolution de l'équation $(E)$. 0,5pt

3) Soit $(U_n)$ une suite arithmétique croissante d'entiers naturels.

a) Sachant que $U_1 + U_2 + U_3 = 105$ Calculer $U_2$. 0,5pt

b) On désigne par $m \ et \ d$ respectivement le $PPCM \ et \ le \ PGCD \ de \ U_1 \ et \ U_3$. Sachant que $\frac{m}{d} = 12$. Déterminer $U_1 \ et \ U_3$. 0,75pt

c) En déduire l'expression de $U_n$ en fonction de $n$.

Calculer $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$ en fonction de $n$.

Déterminer $n$ pour que $S_n$ soit égale à 525. 0,75pt

## Problème : 11pts

Les parties A et B du problème sont indépendantes

Partie A :

La plan est muni d'un repère orthonormal $(O \ ; \ \vec{u} \ ; \ \vec{v})$ direct. On désigne par $f$ l'application du plan qui à tout point $M$ distinct de 0 et d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par $z' = \frac{5}{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de $z$.

1) Déterminer l'affixe du point $A'$ image par $f$ du point $A$ d'affixe $1 + i$. Vérifier que les points $O, A \ et \ A'$ sont alignés. 0,5pt

2) Montrer que pour tout point $M$ distinct de O, les points $O, M \ et \ M'$ sont alignés. 0,5pt

3) Trouver l'ensemble $(\Gamma)$ des points invariants par $f$. 0,5pt

4) a) Soit $z \neq 0$, montrer que si $|z-(1+i)| = \sqrt{2}$ alors $\left|\frac{5}{1-i} - \frac{5}{z}\right| = \left|\frac{5}{z}\right|$ 0,75pt

b) En déduire que si $M$ est un autre point autre que O du cercle $(C)$ de centre $A$ passant par O, alors son image $M'$ par $f$ appartient ç une autre droite $(D)$ que l'on déterminera. 0,75pt

c) Montrer que tout point de $(D)$ est l'image par $f$ d'un point de $(C) - \{O\}$ par $f$. 0,75pt

d) Tracer $(\Gamma)$, $(D)$ $et$ $(C)$ dans le même repère. 0,75pt

e) En déduire l'image $(C) - \{O\}$ par $f$. 0,5pt

Partie B : $n$ est un entier naturel non nul, on considère la fonction $f_n$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$

1) a) Etudier les variations de $f_1$ puis donner une équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(C_1)$ au point d'abscisse 0. 0,75pt

b) Tracer $(C_1)$ $et$ $(T)$ dans le même repère (unité 3 cm) 0,5pt

c) Exprimer en cm² l'aire du domaine plan limité par $(T)$, $(C_1)$ et la droite d'équation $x = 1$. 0,5pt

2) Montrer que $f_1$ réalise une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ vers un intervalle $J$ que l'on précisera. Construire sur le même repère que $(C_1)$ la courbe $(C'_1)$ de la bijection réciproque ${f_1}^{-1}$. 0,5pt

3) a) Calculer ${f_n}'(x)$ et donner son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$. Préciser ${f_n}'(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

Donner le tableau de variation de $f_n$ . 0,5pt

b) Calculer $f_n(n)$ quel est son signe ? 0,5pt

c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, $e^{n+1} > 2n+1$, en déduire le signe de $f_n(n+1)$. 0,75pt

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n\ ;\ n+1]$. Cette solution est notée $U_n$. 0,5pt

$e)$ $Calculer$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ $puis$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n}$. 0,5pt

f) En remarquant que pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ \frac{x-n}{x+n} = 1 - \frac{2n}{x+n}$. Montrer que la valeur moyenne $M_n$ de $f_n$ sur $[0\ ;\ U_n]$ est égale à : $1 - \frac{1}{U_n} + \frac{e^{-U_n}}{U_n} - 2\left(\frac{n}{U_n}\right)\ln\left(\frac{U_n}{n} + 1\right)$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$ . 0,5pt

## Exercice 1 : ________________________________________________ 4pts

Soit $A$ $et$ $B$ deux points distincts du plan affine euclidien $P$ et $G$ le barycentre du système $\{(A,\ -2)\ ;\ (B,\ 1)\}$.

1) Démontrons que $A$ est le milieu du segment $[GB]$.

$G = bary\{(A,\ -2)\ ;\ (B,\ 1)\} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$. **Alors $A$ est le milieu du segment $[GB]$** **0,5pt**

2) Montrons que l'ensemble $(\Gamma)$ des points du plan $P$ vérifiant $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$ est le cercle de centre $G$ et de rayon $r$ que l'on déterminera en fonction de $AB$.

$\frac{MB}{MA} = \sqrt{2} \Leftrightarrow MB = \sqrt{2}MA \Leftrightarrow MB^2 = 2MA^2 \Leftrightarrow MB^2 - 2MA^2 = 0$

$\sum \alpha_i \neq 0$. Alors il existe $G = bary\{(A,\ -2)\ ;\ (B,\ 1)\}\ et\ -2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Fixons $G$ :

$$\begin{aligned}
-2MA^2 + MB^2 = 0 &\Leftrightarrow -2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow -2\left(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + 2GA^2\right) + \left(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + GB^2\right) = 0\\
&\Leftrightarrow -MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right) - 2GA^2 + GB^2 = 0\\
&\Leftrightarrow -MG^2 - 2GA^2 + GB^2 = 0\\
&\Leftrightarrow -MG^2 - 2GA^2 + (2GA)^2 = 0 \quad \text{Car } \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GA}\\
&\Leftrightarrow -MG^2 + 2GA^2 = 0\\
&\Leftrightarrow -MG^2 = -2GA^2\\
&\Leftrightarrow MG = \sqrt{2}GA
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}
-2MA^2 + MB^2 = 0 &\Leftrightarrow MG = \sqrt{2}GA\\
&\Leftrightarrow MG = \sqrt{2}AB
\end{aligned}$$

**L'ensemble des points $(\Gamma)$ des points du plan $P$ vérifiant $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$ est le cercle de centre $G$ et de rayon $\sqrt{2}AB$** **1pt**

3) Soit $C$ un point de $(\Gamma)$ $et$ $(D)$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$

Montrons que le point $C$ appartient à $(D)$.

$C$ un point de $(\Gamma)$ alors $\boldsymbol{\frac{CB}{CA} = \sqrt{2}\quad ou\quad CB = \sqrt{2}CA\ \ ou\ \ CB^2 = 2CA^2}$

$C$ appartient à $(D)$ si et seulement si, $-2CA^2 + CB^2 + CC^2 = 0$

$-2CA^2 + CB^2 + CC^2 = -2CA^2 + CB^2 = -2CA^2 + \left(\sqrt{2}CA\right)^2 = -2CA^2 + 2CA^2 = 0$

**$-2CA^2 + CB^2 + CC^2 = 0$ alors $C$ appartient à $(D)$.** **0,5pt**

4) Calculons $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}$ et

$$\begin{aligned}
-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0 &\Leftrightarrow -2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow -2\left(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2\right) + \left(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + GB^2\right) + \left(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + GC^2\right) = 0\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG}\left(-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \left(-2GA^2 + GB^2 + GC^2\right) = 0\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{GC}\right) - 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 0\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} - 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 0
\end{aligned}$$

D'autre part :

$\overrightarrow{GA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow \boldsymbol{GB^2 = 4GA^2}$

$C$ un point de $(\Gamma)$ alors $\frac{CB}{CA} = \sqrt{2}\ \ ou\ \ CG = \sqrt{2}GA \Leftrightarrow \boldsymbol{CG^2 = 2GA^2}$

Alors :

$$\begin{aligned}
-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0 &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} - 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 0\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} - 2GA^2 + 4GA^2 + 2GA^2 = 0\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + 4GA^2\\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} = -2GA^2}
\end{aligned}$$

**0,5pt**

Déduisons-en l'ensemble $(D)$.

$\boldsymbol{-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} = -2GA^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GM} = 2GA^2}$

Soit H le projeté orthogonale $M$ sur (GC).

$\overline{GC}.\overline{GH} = 2GA^2 \Leftrightarrow \overline{GH} = \frac{2GA^2}{GC}$

**L'ensemble $(D)$ des points $M$ cherchés est la droite $(\Delta)$ perpendiculaire à la droite $(GC)$ au point $H$ tel que $\overline{GH} = \frac{2GA^2}{GC}$** **0,5pt**

5) Démontrons que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Par changement de variable :

Posons $x = \sin X \quad et \quad dx = \cos X\,dX$

Si $x = 1$ alors $\sin X = 1 \Leftrightarrow X = \frac{\pi}{2}$

Si $x = 0$ alors $\sin X = 0 \Leftrightarrow X = 0$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sin^2X}\cos X\,dX = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos^2X}\cos X\,dX = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 X\,dX = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dX$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dX + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos 2X\,dX = \left[\frac{1}{2}X\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \quad \text{CQFD}$$

D'où $\boldsymbol{\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}}$ **1pt**

## Exercice 1 : 5pts

1) a) Résolvons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $(p\ ;\ q)$ : $11p - 7q = 1$ (E)

$11p - 7q = 1 \Leftrightarrow 11p = 1 + 7q \Leftrightarrow 11p \equiv 1[7] \Leftrightarrow 22p \equiv 2[7] \Leftrightarrow p \equiv 2[7] \Leftrightarrow p = 2 + 7k\ \ avec\ k \in \mathbb{Z}$

Remplaçons p par sa valeur dans (E) :

$11p - 7q = 1 \Leftrightarrow 11(2+7k) - 7q = 1 \Leftrightarrow 7q = 21 + 77k \Leftrightarrow q = 3 + 11k$

$\boldsymbol{S = \{(2+7k\ \ ;\ \ 3+11k)\}\ \ avec\ k \in \mathbb{Z}}$ **0,5pt**

b) La division euclidienne d'un entier naturel $n$ par 7 donne pour reste 4 ; le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Son reste dans la division par 77 sera :

$\begin{cases} n \equiv 4[7] \\ n \equiv 3[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 + 7q \\ n = 3 + 11p \end{cases} \quad avec\ p \in \mathbb{Z}\ \ ;\ \ q \in \mathbb{Z}$

$n = n \Leftrightarrow 4 + 7q = 3 + 11p \Leftrightarrow 11p + 3q = 1 \Leftrightarrow p = 2 + 7k \quad et\ \ q = 3 + 11k \quad avec\ k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} n = 4 + 7q \\ n = 3 + 11p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 + 7(3+11k) \\ n = 3 + 11(2+7k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 + 21 + 77k \\ n = 3 + 22 + 77k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 25 + 77k \\ n = 25 + 77k \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{n \equiv 25[77]}$

$\boldsymbol{n \equiv 25[77]}$. ***Alors*****Le reste de la division euclidienne de $n$ par 77 est 25** **0,5pt**

c) Déterminons les valeurs de l'entier naturel $n$ inférieures à 200.

$n < 200 \Leftrightarrow 25 + 77k < 200 \Leftrightarrow 77k < 175 \Leftrightarrow k < 2{,}27 \Leftrightarrow k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$

$k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = \{25\ ;\ 102\ ;\ 179\}}$ **0,5pt**

2) a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle d'inconnue $f$ : $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$

$x^2f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2f'(x) + 2xf(x) = 1 \Leftrightarrow x^2f(x) = x + c = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x) = \frac{x+c}{x^2} \quad avec\ c \in \mathbb{R}}$

**0,5pt**

b) Soit l'équation $(E)$ : $x^2f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$. On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

$g(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

Montrons que l'équation $(E)$ est équivalente à : $x^2g'(x) + 2xg(x) = 1$

$(E)$ : $x^2f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x)\left[\frac{x^2f'(x)}{f^2(x)} - \frac{2xf(x)}{f^2(x)} + 1\right] = 0$

$$\Leftrightarrow x^2.\frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x.\frac{1}{f(x)} + 1 = 0 \quad car \quad f^2(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2g'(x) - 2xg(x) + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow x^2g'(x)+2xg(x)=1$

$(\boldsymbol{E}):\ \boldsymbol{x^2f'(x)-2xf(x)+f^2(x)=0 \Leftrightarrow x^2g'(x)+2xg(x)=1}$ **avec** $\boldsymbol{g(x)=\frac{1}{f(x)}}$

**Alors l'équation $(E)$ est équivalente à : $x^2g'(x)+2xg(x)=1$** **0,5pt**

Déduisons-en la résolution de l'équation $(E)$.

$(E):\ x^2f'(x)-2xf(x)+f^2(x)=0 \Leftrightarrow x^2g'(x)+2xg(x)=1$ alors $g(x)=\frac{x+c}{x^2}$ d'après a)

$g(x)=\frac{x+c}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=\frac{x+C}{x^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x)=\frac{x^2}{x+c}\quad avec\ c\in\mathbb{R}}$ **0,5pt**

3) Soit $(U_n)$ une suite arithmétique croissante d'entiers naturels.

a) Sachant que $U_1+U_2+U_3=105$ Calculons $U_2$.

$U_1+U_2+U_3=105 \Leftrightarrow (U_1+U_3)+U_2=105 \Leftrightarrow 2U_2+U_2=105 \Leftrightarrow 3U_2=105 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{U_2=35}$ **0,5pt**

b) On désigne par $m\ et\ d$ respectivement le $PPCM\ et\ le\ PGCD\ de\ U_1\ et\ U_3$. Sachant que $\frac{m}{d}=12$. Déterminons $U_1\ et\ U_3$.

$U_1+U_2+U_3=105 \Leftrightarrow U_1+U_3=70$

$m\times d=U_1\times U_2 \Leftrightarrow m=\frac{U_1\times U_3}{d}$

$\frac{m}{d}=12 \Leftrightarrow \frac{\frac{U_1\times U_2}{d}}{d}=12 \Leftrightarrow U_1\times U_2=12d^2$

$PGCD(U_1\ ;\ U_3)=d$ alors il existe deux entiers naturels $a\ et\ b$ tels que : $U_1=a\times d\ ;\ U_2=b\times d$ $et\ PGCD(a\ ;\ b)=1\ ;\ a<b$

$U_1\times U_2=12d^2 \Leftrightarrow a.d\times b.d=12d^2 \Leftrightarrow a\times b=12$

$U_1+U_3=70 \Leftrightarrow a+b=\frac{70}{d}$

$\begin{cases} a\times b=12 \\ a+b=\frac{70}{d}\end{cases}$ $\quad d\in D_{70}=\{1\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 10\ ;\ 14\ ;\ 35\ ;\ 70\}$ et $a+b\leq 12$ alors

$d\in\{7\ ;\ 10\ ;\ 14\ ;\ 35\ ;\ 70\}$

| Pour $d=7$ | Pour $d=10$ | Pour $d=14$ | Pour $d=35$ | Pour $d=70$ |
|---|---|---|---|---|
| $\begin{cases} a\times b=12 \\ a+b=10\end{cases}$ $ou$ | $\begin{cases} a\times b=12 \\ a+b=7\end{cases}$ $ou$ | $\begin{cases} a\times b=12 \\ a+b=5\end{cases}$ $ou$ | $\begin{cases} a\times b=12 \\ a+b=2\end{cases}$ $ou$ | $\begin{cases} a\times b=12 \\ a+b=1\end{cases}$ |
| $(a\ ;\ b)\notin\mathbb{N}^2$ imp | $a=3\ \ et\ \ b=4$ | $\Delta<0$ imp | $\Delta<0$ imp | $\Delta<0$ imp |

$\begin{cases} a\times b=12 \\ a+b=7\end{cases} \Leftrightarrow\ a=3\ et\ b=4 \Leftrightarrow \boldsymbol{U_1=30\ \ et\ \ U_3=40}$ **0,75pt**

c) En déduire l'expression de $U_n$ en fonction de $n$.

Calculons $S_n=U_1+U_2+U_3+\cdots+U_n$ en fonction de $n$.

$U_1=30\ ;\ U_2=35\ et\ U_3=40$

$(U_n)$ $est$ une suite arithmétique de premier terme $U_1=30\ \ et\ de\ raison\ \ r=5$

Son terme général est : $U_n=U_1+(n+1)r=30+(n-1)5=25+5n$

**Pout tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=25+5n$** **0,25pt**

$S_n=U_1+U_2+U_3+\cdots+U_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n)=\frac{n}{2}(30+25+5n)=\frac{5n}{2}(11+n)$

$\boldsymbol{S_n=\frac{5n}{2}(11+n)}$ **0,25pt**

Déterminons $n$ pour que $S_n$ soit égale à 525.

$S_n=525 \Leftrightarrow \frac{5n^2+55n}{2}=525 \Leftrightarrow 5n^2+55n=1050 \Leftrightarrow 5n^2+55n-1050=0 \Leftrightarrow n^2+11x-210=0$

$S_n=525 \Leftrightarrow n^2+11x-210=0$

$\Delta=961$

$n=\frac{-11-\sqrt{961}}{2}=-21$ et $n=\frac{-11+\sqrt{961}}{2}=10$

**Pour $n = 10$ ; $S_n$ est égale à 525** **0,25pt**

## Problème: 11pts

Les parties A et B du problème sont indépendantes

**Partie A :**

La plan est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ direct. On désigne par $f$ l'application du plan qui à tout point $M$ distinct de 0 et d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par $z' = \frac{5}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de $z$.

1) Déterminons l'affixe du point $A'$ image par $f$ du point $A$ d'affixe $1 + i$.

$z'_A = \frac{5}{\overline{z_A}} = \frac{5}{1-i} = \frac{5(1+i)}{2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$

Le point $A'$ image par $f$ du point $A$ a pour affixe : $\boldsymbol{Z_A' = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i}$ **0,25pt**

Vérifier que les points $O, A$ et $A'$ sont alignés.

Les points $O, A$ et $A'$ sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_O}{z_{A'} - z_O} = a\ \ (a \in \mathbb{R}^*)$

$\frac{z_A - z_O}{z_{A'} - z_O} = \frac{1+i}{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i} = \frac{1}{\frac{5}{2}} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{2}{5}$

$\boldsymbol{\frac{z_A - z_O}{z_{A'} - z_O} = \frac{2}{5} \in \mathbb{R}}$. **Alors les points $O, A$ et $A'$ sont alignés.** **0,25pt**

2) Montrer que pour tout point $M$ distinct de O, les points $O, M$ et $M'$ sont alignés.

Posons $z_M = x + yi$

Les points $O, M$ et $M'$ sont alignés si et seulement si $\frac{z_M - z_O}{z_{M'} - z_O} = a\ \ (a \in \mathbb{R}^*)$

$\boldsymbol{\frac{z_M - z_O}{z_{M'} - z_O} = \frac{z_M}{\frac{5}{\overline{z_M}}} = \frac{1}{5} z_M \times \overline{z_M} = \frac{1}{5}(x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^*}$ . **Alors les points $O, M$ et $M'$ sont alignés.** **0,5pt**

3) Trouver l'ensemble $(\Gamma)$ des points invariants par $f$.

$f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{5}{\bar{z}} \Leftrightarrow z \times \bar{z} = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$

**L'ensemble $(\Gamma)$ des points invariants par $f$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$** **0,5pt**

4) a) Soit $z \neq 0$, montrons que si $|z - (1 + i)| = \sqrt{2}$ alors $\left|\frac{5}{1-i} - \frac{5}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{5}{\bar{z}}\right|$

Supposons que : $|z - (1 - i)| = \sqrt{2}$

$\left|\frac{5}{1-i} - \frac{5}{\bar{z}}\right| = \left|5\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{\bar{z}}\right)\right| = \left|5 \times \frac{\bar{z}-(1-i)}{\bar{z}(1-i)}\right| = \left|\frac{5}{\bar{z}} \times \frac{\bar{z}-(1-i)}{1-i}\right| = \left|\frac{5}{\bar{z}}\right| \times \left|\frac{\overline{z-(1+i)}}{1-i}\right| = \left|\frac{5}{\bar{z}}\right| \times \frac{|z-(1+i)|}{|1-i|}$ Car $|\bar{z}| = |z|$

$= \left|\frac{5}{\bar{z}}\right| \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \left|\frac{5}{\bar{z}}\right|$

**D'où, si $|z - (1 - i)| = \sqrt{2}$ alors $\left|\frac{5}{1-i} - \frac{5}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{5}{\bar{z}}\right|$.** **0,75pt**

b) Déduisons-en que si $M$ est un autre point autre que O du cercle $(C)$ de centre $A$ passant par O, alors son image $M'$ par $f$ appartient à une autre droite $(D)$ que l'on déterminera.

$M(z) \in (C) \Leftrightarrow AM = AO \Leftrightarrow |z - (1 + i)| = \sqrt{2} \Rightarrow \left|\frac{5}{1-i} - \frac{5}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{5}{\bar{z}}\right| \Leftrightarrow |z'_A - z'| = |z'| \Leftrightarrow M'A' = OM'$

$A'M' = OM'$. Alors l'image $M'$ de $M$ par $f$ appartient à la médiatrice du segment $[OA']$ **0,75pt**

Autre méthode :

$(z) \in (C) \Leftrightarrow AM = AO \Leftrightarrow |z - (1 + i)| = \sqrt{2} \Rightarrow \left|\frac{5}{1-i} - \frac{5}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{5}{\bar{z}}\right| \Leftrightarrow |z'_A - z'| = |z'|$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i - x' - y'i\right| = |x' + y'i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{5}{2} - x'\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - y'\right)^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{4} - 5x' + x'^2 + \frac{25}{4} - 5y' + y'^2 = x'^2 + y'^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{2} - 5x' - 5y' = 0$$

$\Leftrightarrow 10x' + 10y' - 25 = 0$

$|z-(1+i)| = \sqrt{2} \Longrightarrow 2x' + 2y' - 5 = 0$

$\boldsymbol{AM = OA \Leftrightarrow M'\binom{x'}{y'} \in (D) : 2x' + 2y' - 5 = 0}$ .

**Alors $M$ est un autre point autre que O du cercle $(C)$ de centre $A$ passant par O, alors son image $M'$ par $f$ appartient à une autre droite $(D)$: $2x' + 2y' - 5 = 0$**

c) Montrons que tout point de $(D)$ est l'image par $f$ d'un point de $(C) - \{O\}$ par $f$.

Pour cela, montrons que si $M' \in (D)$ alors $M \in (C) - \{O\}$ par $f$

$z' = \frac{5}{\bar{z}} = \frac{5x}{x^2+y^2} + \frac{5y}{x^2+y^2} i \Leftrightarrow M'\left(\frac{5x}{x^2+y^2} \quad ; \quad \frac{5y}{x^2+y^2}\right)$

$M' \in (D) :\ 2x' + 2y' - 5 = 0$

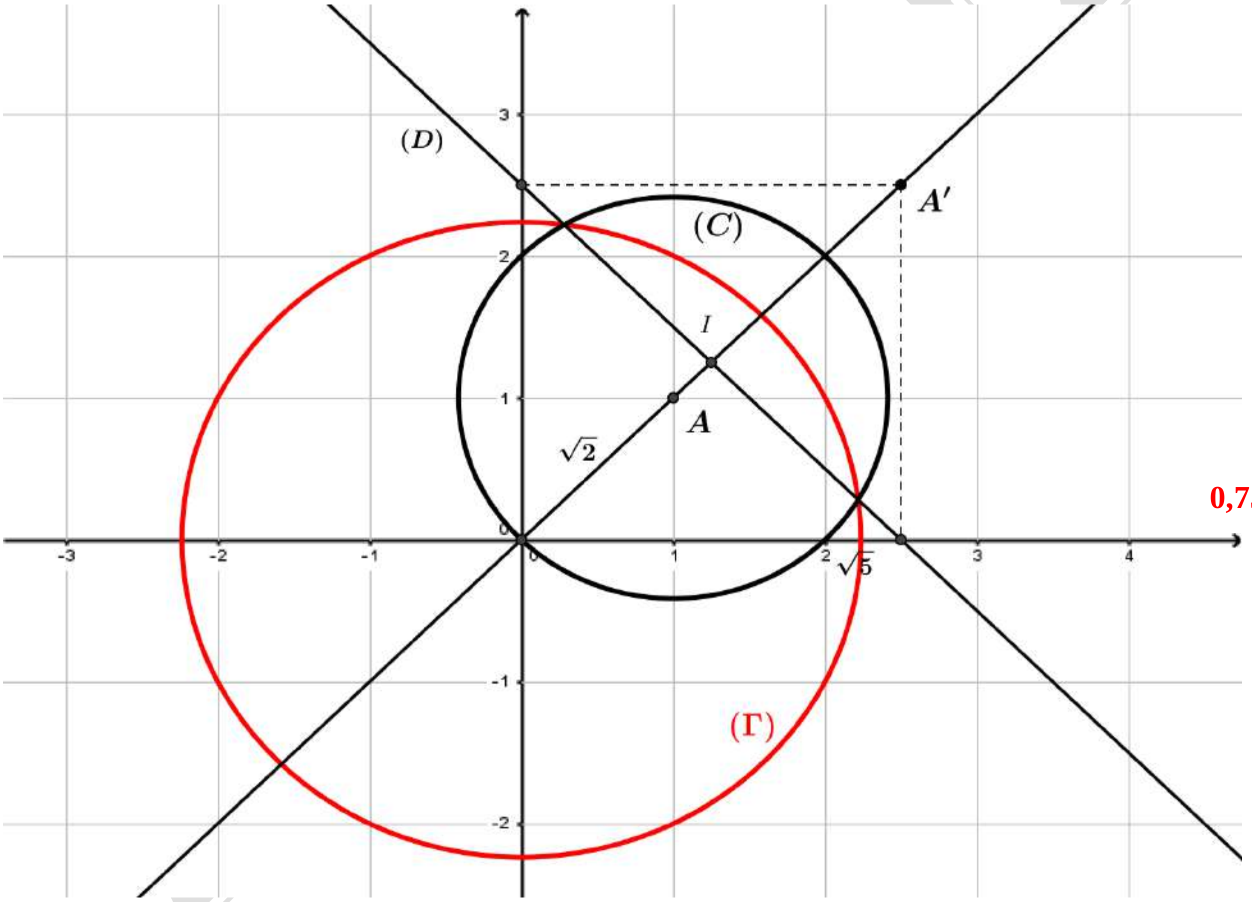
$:\ 2\left(\frac{5x}{x^2+y^2}\right) + 2\left(\frac{5y}{x^2+y^2}\right) - 5 = 0$

$:\ \frac{10x+10y-5x^2-5y^2}{x^2+y^2} = 0$

$\boldsymbol{M' \in (D) :\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow M\binom{x}{y} \in (C) - \{O\}}$ **par $f$**

**Alors, tout point M' de $(D)$ est l'image par $f$ d'un point M de $(C) - \{O\}$ par $f$.** 0,75pt

d) Tracer $(\Gamma)$, $(D)$ $et$ $(C)$ dans le même repère.




0,75pt

e) En déduire l'image $(C) - \{O\}$ par $f$.

$Si\ M \in (D);\ alors\ \ M' \in (C) - \{O\}\ par\ f$ D'après b)

$Si\ M' \in (D)\ alors\ \ M \in (C) - \{O\}$ par $f$ D'après c)

**$D'o$ù, l'image $(C) - \{O\}$ par $f$ *est la droite* $(D)$, médiatrice du segment $[OA']$** 0,5pt

**Partie B :** $n$ est un entier naturel non nul, on considère la fonction $f_n$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$

1) a) Etudions les variations de $f_1$ puis donnons une équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(C_1)$ au point d'abscisse 0.

$f_1(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$

$f'_1(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} + e^{-x} = \frac{2}{(x+1)^2} + e^{-x} > 0$ pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$.

**$\forall\, x \in [0\ ;\ +\infty[\,,\ f'_1(x) > 0$. Alors $f_1$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.** **0,5pt**

Tableau de variation :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'_1(x)$ | $+$ |
| $f_1(x)$ | $2$ $\nearrow$ $1$ |

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = f_1(0) = \frac{0-1}{0+1} - e^{-0} = -2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 1 - 0 = 1$$

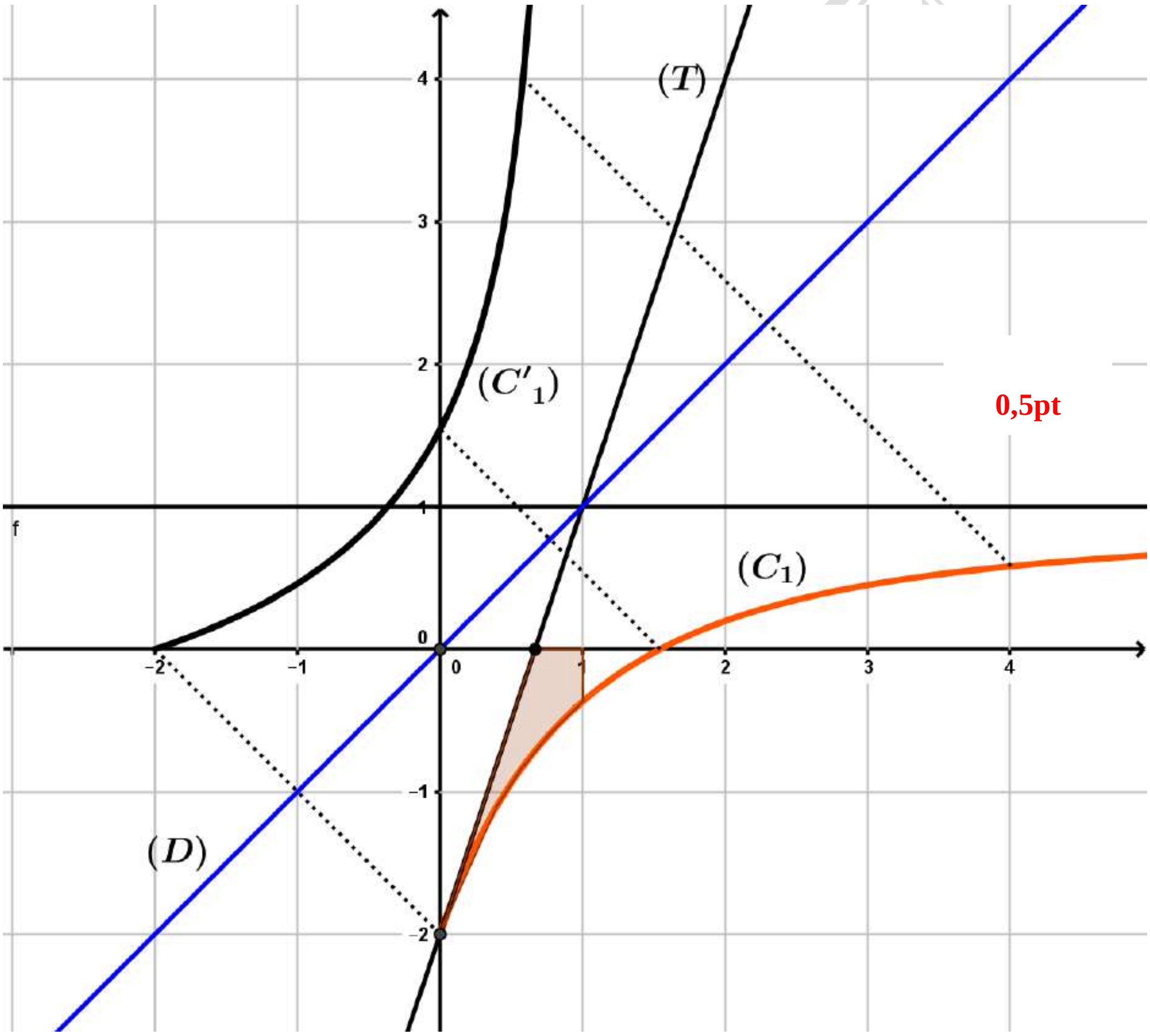
Equation de la tangente :

$(T)$ : $y = f'_1(0)(x-0) + f_1(0) = 3x - 2$

**$(T) : y = 3x - 2$** **0,25pt**

b) Traçons $(C_1)$ $et$ $(T)$ dans le même repère (unité 3 cm)

$f(1) = -037$ ; $f(3) = 0{,}45$ ; $f(5) = 0{,}66$




**0,5pt**

c) Exprimons en cm² l'aire du domaine plan limité par $(T)$, $(C_1)$ et la droite d'équation $x = 1$.

$A = \int_0^1 [y - f(x)]\, dx.ua$

$\int_0^1 [y - f(x)]\, dx = \int_0^1 \left[3x - 2 - \frac{x-1}{x+1} + e^{-x}\right] dx = \int_0^1 \left[3x - 2 - 1 + \frac{2}{x+1} + e^{-x}\right] dx = \int_0^1 \left[3x - 3 + \frac{2}{x+1} + e^{-x}\right] dx$

$= \left[\frac{3}{2}x^2 - 3x + 2\ln|x+1| - e^{-x}\right]_0^1 = \left(\frac{3}{2} - 3 + 2\ln 2 - e^{-1}\right) - \left(0 - 0 + 2\ln(1) - e^{-(0)}\right)$

$= \frac{3}{2} - 3 + 2\ln 2 - e^{-1} + 1 = -\frac{1}{2} + 2\ln 2 - e^{-1}$

$A = \left(-\frac{1}{2} + 2\ln 2 - e^{-1}\right) \times 9cm^2$

$\boldsymbol{A = \left(18\ln 2 - \frac{9}{2} - 9e^{-1}\right) cm^2}$ **Valeur exacte de A ou** $\boldsymbol{A = 4,6\ cm^2}$ **Valeur approchée de A d'ordre 1.** **0,5pt**

2) Montrer que $f_1$ réalise une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ vers un intervalle $J$ que l'on précisera.

**La fonction $f_1$ est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Alors, elle réalise une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ *vers* $J = [-2\ ;\ -1[$.** **0,25pt**

Construisons sur le même repère que $(C_1)$ la courbe $(C'_1)$ de la bijection réciproque $f_1^{-1}$. **(Voir figure)** **0,25pt**

3) a) Calculons $f_n'(x)$ et donnons son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$. Précisons $f_n'(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

– Calculons $f_n'(x)$

$f_n$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$

$f'_n(x) = \frac{x+n-x+n}{(x+n)^2} + e^{-x} \Leftrightarrow \boldsymbol{f'_n(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x}}$ **pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$**

– donnons son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$:

$\boldsymbol{f'_n(x) > 0}$ **pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$.**

– Précisons $f_n'(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

$\boldsymbol{f_n'(0) = -2}$ ***et*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1}$

Donner le tableau de variation de $f_n$ .

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'_1$ | | $+$ | |
| $f_1$ | $-2$ | $(0)$ | $1$ |

**0,5pt**

b) Calculer $f_n(n)$ quel est son signe ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$\boldsymbol{f_n(n) = -e^{-n}}$. **Le signe de $f_n(n)$ est négatif** **0,5pt**

c) Démontrons par récurrence que, pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, $e^{n+1} > 2n+1$

**-Initialisation :**

$Pour\ n = 0,\ on\ a :\ e^1 > 1\ vraie$

**- Transmission :**

Pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, supposons que $e^{n+1} > 2n+1$ est vraie et montrons que $e^{(n+1)+1} > 2(n+1)+1$

$e^{(n+1)+1} = e^{n+1} \times e > (2n+1)e$

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ ; e > 2 \Leftrightarrow (2n+1)e > 2(2n+1) > 2(n+1)+1$

$e^{(n+1)+1} = e^{n+1} \times e > (2n+1)e > 2(n+1)+1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{(n+1)+1} > 2(n+1)+1 \quad vraie$

**-Conclusion :**

**Pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, $e^{n+1} > 2n+1$** **0,5pt**

Déduisons-en le signe de $f_n(n+1)$.

$f_n(n+1) = \frac{n+1-n}{n+1+n} - e^{-(n+1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}}$

Or pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, $e^{n+1} > 2n+1$ *alors* $\frac{1}{e^{n+1}} < \frac{1}{2n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}} > 0$

Donc : $f_n(n+1) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}} > 0$

$\boldsymbol{f_n(n+1) > 0. D'où le signe de f_n(n+1) est positif.}$ **0,25pt**

d) Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n\ ;\ n+1]$. Cette solution est notée $U_n$.

La fonction $f_n(x)$ est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, elle réalise une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ vers $[-2\ ;\ 1[$. Or $0 \in [-2\ ;\ 1[$ Alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $U_n \in [0\ ;\ +\infty[$.

En plus $f_n(n) \times f_n(n+1) < 0 \Leftrightarrow U_n \in [n\ ;\ n+1] \subset [0\ ;\ +\infty[$.

**Conclusion :**

**L'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $U_n$ sur $[n\ ;\ n+1]$ telle que $f(U_n) = 0$.** **0,5pt**

e) *Calculons* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ *puis* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n}$.

$n \leq U_n \leq n+1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ *alors* $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$ **0,25pt**

$n \leq U_n \leq n+1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{U_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$

$1 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n} = 1}$ **0,25pt**

f) En remarquant que pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ ; $\frac{x-n}{x+n} = 1 - \frac{2n}{x+n}$. Montrer que la valeur moyenne $M_n$ de $f_n$ sur $[0\ ;\ U_n]$ est égale à : $1 - \frac{1}{U_n} + \frac{e^{-U_n}}{U_n} - 2\left(\frac{n}{U_n}\right)\ln\left(\frac{U_n}{n}+1\right)$.

$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

$M = \frac{1}{U_n}\int_0^{U_n} f_n(x)\,dx = \frac{1}{U_n}\int_0^{U_n}\left(1 - \frac{2n}{x+n} - e^{-x}\right)dx = \frac{1}{U_n}[x - 2n\ln(x+n) + e^{-x}]_0^{U_n}$

$= \frac{1}{U_n}[U_n - 2n\ln(U_n+n) + e^{-U_n}] - \frac{1}{U_n}[-2n\ln(n) + 1]$

$= \frac{1}{U_n}[U_n - 2n(\ln(U_n+n) - \ln(n) + e^{-U_n} - 1]$

$= \frac{1}{U_n}\left[U_n - 2n\ln\left(\frac{U_n+n}{n}\right) + e^{-U_n} - 1\right]$

$= 1 - \frac{2n}{U_n}\ln\left(\frac{U_n}{n}+1\right) + \frac{e^{-U_n}}{U_n} - \frac{1}{U_n}$

**D'où** $\boldsymbol{M = 1 - \frac{1}{U_n} + \frac{e^{-U_n}}{U_n} - 2\left(\frac{n}{U_n}\right)\ln\left(\frac{U_n}{n}+1\right)}$. **0,5pt**

Déduisons – en $\lim_{n\to+\infty} M_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{U_n} + \frac{e^{-U_n}}{U_n} - 2\left(\frac{n}{U_n}\right)\ln\left(\frac{U_n}{n}+1\right)\right] = 1 - 2\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 1 - 2\ln 2}$ **0,5pt**

## Exercice 1: 6pts

1) a) Déterminer sous forme algébrique les racines sixième de l'unité, c'est à dire trouver les nombres $u$ tels que $u^6 = 1$. 1pt

b) Calculer $(1-i)^6$ 0,5pt

c) En utilisant les équations a) et b) donner la forme algébrique des solutions de l'équation d'inconnue $z$ : $8z^6 + i = 0$ 1,5pt

2) a) Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49. 1pt

b) En déduire que si l'entier $n$ n'est pas multiple de 3, alors $5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49. 0,5pt

3) Soient $A, B$ et $C$ trois points non alignés d'un plan $P$ et $\alpha$ un nombre réel. A tout point $M$ de $P$ on associe par l'application $f_\alpha$ le point $M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = (2-\alpha)\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{MC}$.

Préciser, suivant les valeurs de $\alpha$ la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f_\alpha$. 1,5pt

## Exercice 2: 4pts

1) Soit $(U_n)$ la suite numérique définie par $U_0 = 0$ et pour $n \geq 1$.

$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n$ : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$. 1pt

(On pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction qui à $x$ associe $\ln x$ sur l'intervalle $[n\ ;\ n+1]$.

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul $n$ on a : $U_n \geq \ln(n+1)$ puis calculer la limite de $(U_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$. 1pt

2) Le plan affine euclidien $P$ est muni d'un repère orthonormé et $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes. A tout $M(x\ ;\ y)$ d'affixe $z$ l'application $f$ associe le point $M'(x'\ ;\ y')$ d'affixe $z'$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

Exprimer $z'$ en fonction de $z$ puis donner la nature et les éléments caractéristiques de $f$. 2pt

## Problème: 10pts

**Partie A :**

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2}[\ln x - \ln(1-x)]$ et $(C)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ (Unité graphique 5 cm).

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de $f$ puis calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de cet ensemble. En déduire les équations des droites asymptotes à la courbe $(C)$. 1pt

b) Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation. 0,5pt

2) a) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ est centre de symétrie de $(C)$. 0,5pt

b) Déterminer une équation de la tangente $(D)$ à $(C)$ au point $A$. 0,5pt

c) On pose : $\varphi(x) = f(x) - 2x + 1$. Etudier les variations de $\varphi$ puis déduire les positions relatives de $(C)$ et $(D)$. 0,5pt

3) Tracer $(C)$ et $(D)$ dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. 1pt

**Partie B :**

1) On considère la fonction $h$ définie sur $]0\ ;\ 1[$ par : $h(x) = f(x) - x$

a) En utilisant les variation de la fonction $h$, démontrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique que l'on notera $\alpha$ dans $]0\ ;\ 1[$. 0,5pt

b) Montrer que $0{,}8 \leq \alpha \leq 0{,}9$. 0,5pt

2) On appelle $S$ la réflexion d'axe $\Delta : y = x$ et $(C')$ l'image de $(C)$ par $S$.

a) Démontrer qu'un point $M(x\ ;\ y) \in (C')$ si et seulement si $x \in ]0\ ;\ 1[$ et $2x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$.

En déduire que $(C')$ est la représentation graphique de la fonction $g$ définie par : $g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$. 1pt

b) Tracer $\Delta$ et $(C')$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ de la partie A) 1pt

c) Montrer que le réel $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$. 0,5pt

**Partie C :**

1) On appelle $I$ l'intervalle $]0{,}8\ ;\ 0{,}9[$

a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$. 0,5pt

b) Montrer que pour tout réel $x$ de $I$, $g(x)$ est aussi élément de $I$ et que : $0 \leq g'(x) \leq 0{,}3$. 0,5pt

c) En déduire que pour tout $x$ élément de $I$ on a : $|g(x) - \alpha| \leq 0{,}3|x - \alpha|$. 0,5pt

2) On considère la suite $(U_n)$ d'élément de $I$, définie par $U_0 = 0{,}8$ et pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $|U_n - \alpha| \leq 0{,}1(0{,}3)^n$. 0,5pt

b) Déterminer un entier $p$ tel que $U_p$ soit une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-4}$ près. Donner une valeur approchée de $U_p$ à $10^{-4}$ près. 0,5pt

## Exercice 1: (6pts)

1) a) Déterminons sous forme algébrique les racines sixième de l'unité, c'est à dire trouver les nombres $u$ tels que $u^6 = 1$.

Soit $z^n = u$ avec $|u| = r$ et $\arg u = \theta + 2k\pi$. La racine n ième de $z$ est :

$Z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$ avec $k \in \{0 \ ; \ 1 \ ; \ 2 \ ; \ ... \ ; \ n-1\}$

$u^6 = 1 \Leftrightarrow Z_k = \sqrt[6]{1}\left[\cos\left(\frac{0+2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{6}\right)\right] \Leftrightarrow Z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ avec $k \in \{0 \ ; \ 1 \ ; \ 2 \ ; \ ; \ 5\}$

Pour $k = 0$ $on\ a$:

$\boldsymbol{Z_0 = 1}$

Pour $k = 1$ on a :

$Z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boldsymbol{Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

Pour $k = 2$ on a :

$Z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \boldsymbol{Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

Pour $k = 3$ on a :

$Z_3 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) \Leftrightarrow \boldsymbol{Z_3 = -1}$

Pour $k = 4$ on a :

$Z_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{Z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

Pour $k = 5$ on a :

$Z_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{Z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$\boldsymbol{Z_k = \left\{1 \ ; \ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ ; \ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ ; \ -1 \ ; \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \ ; \ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}}$ ***sont les racines sixième de l'unité.*** **1pt**

b) Calculons $(1-i)^6$

$(1-i)^6 = (1-i)^2(1-i)^2(1-i)^2 = (-2i)(-2i)(-2i) = (-2i)^3 = 8i$

$\boldsymbol{(1-i)^6 = 8i}$ **0,5pt**

c) En utilisant les équations a) et b) donnons la forme algébrique des solutions de l'équation d'inconnue $z$ : $8z^6 + i = 0$

$8z^6 + i = 0 \Leftrightarrow 8iz^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow 8iz^6 = 1 \Leftrightarrow (1-i)^6 z^6 = 1 \Leftrightarrow [(1-i)z\,]^6 = 1$

Posons $Z = (1-i)z$ , alors :

$Z^6 = 1$

$* \ Z_0 = 1 \Leftrightarrow (1-i)z_0 = 1 \Leftrightarrow z_0 = \frac{1}{1-i} \Leftrightarrow \boldsymbol{z_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$

$* \ Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow (1-i)z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow z_1 = \frac{(1+\sqrt{3}i)}{2(1-i)} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1+i)}{4} = \frac{1+i+\sqrt{3}i-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \boldsymbol{z_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i}$

$* \ Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow (1-i)z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow z_1 = \frac{(-1+\sqrt{3}i)}{2(1-i)} = \frac{(-1+\sqrt{3}i)(1+i)}{4} = \frac{-1-i+\sqrt{3}i-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \boldsymbol{z_2 = -\frac{1+\sqrt{3}}{4} - \frac{1-\sqrt{3}}{4}i}$

$* \ Z_3 = -Z_0 \Leftrightarrow z_3 = -z_0 \Leftrightarrow \boldsymbol{z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$

$* \ Z_4 = -Z_1 \Leftrightarrow z_4 = -z_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{z_4 = -\frac{1-\sqrt{3}}{4} - \frac{1+\sqrt{3}}{4}}i$

$* \ Z_5 = -Z_2 \Leftrightarrow z_5 = -z_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{z_5 = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}i}$

$\boldsymbol{z_k = \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \ ; \ \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i \ ; \ -\frac{1+\sqrt{3}}{4} - \frac{1-\sqrt{3}}{4}i \ ; \ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \ ; \ -\frac{1-\sqrt{3}}{4} - \frac{1+\sqrt{3}}{4}i \ ; \ \frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}i\right\}}$ **1,5pt**

2) a) Démontrons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49.

Soit la proposition $P_n$ : $5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49 ou $5^{3n} - 3^{3n} \equiv 0[49]$

- Initialisation :

Pour $n = 0$ on a :

$P_0$ : $5^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ est divisible par 49. Alors $P_0$ est vraie

Pour $n = 1$ on a :

$P_1$ : $5^3 - 3^3 = 125 - 27 = 98$ est divisible par 49. Alors $P_1$ est vraie

- Transmission :

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, Supposons $P_n$ vraie c'est-à-dire $5^{3n} - 3^{3n} \equiv 0[49]$ et montrons que $P_{n+1}$ est vraie c'est-à-dire :

$5^{3(n+1)} - 3^{3(n+1)} \equiv 0[49]$

$$\begin{aligned}5^{3(n+1)} - 3^{3(n+1)} &= 5^{3n}.5^3 - 3^{3n}.3^3\\ &= 125 \times 5^{3n} - 27 \times 3^{3n}\\ &= (98+27)5^{3n} - 27 \times 3^{3n}\\ &= 98 \times 5^{3n} + 27 \times 5^{3n} - 27 \times 3^{3n}\\ &= 98 \times 5^{3n} + 27(5^{3n} - 3^{3n})\\ &= 98 \times 5^{3n} - 27(49k) \quad \text{car} \quad 5^{3n} - 3^{3n} \equiv 0[49] \quad ou \quad 5^{3n} - 3^{3n} = 49k\,;\ k \in \mathbb{Z}\\ &= 49[2 \times 5^{3n} - 49k]\end{aligned}$$

$\boldsymbol{5^{3(n+1)} - 3^{3(n+1)} = 49k' \qquad avec \quad k' = 2 \times 5^{3n} - 49k \quad et \quad k' \in \mathbb{Z}}$

**Alors la proposition $P_{n+1}$ : $5^{3(n+1)} - 3^{3(n+1)}$ est divisible par 49 est vraie**

**- Conclusion :**

**$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P_n$ : $5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49.** **0,5pt**

b) Déduisons-en que si l'entier $n$ n'est pas multiple de 3, alors $5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49.

On sait que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Donc

$5^{3n} - 3^{3n} \equiv 0[49] \Leftrightarrow (5^n - 3^n)(5^{2n} + 5^n \times 3^n + 3^{2n}) \equiv 0[49]$ .

Si l'entier $n$ n'est pas multiple de 3, alors $5^n - 3^n$ n'est pas divisible par 49. Par conséquent :

$(5^n - 3^n)(5^{2n} + 5^n \times 3^n + 3^{2n}) \equiv 0[49] \Leftrightarrow \boldsymbol{(5^{2n} + 15^n + 3^{2n}) \equiv 0[49]}$

**D'où si l'entier $n$ n'est pas multiple de 3, alors $5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49** **0,5pt**

3) Soient $A, B\ et\ C$ trois points non alignés d'un plan $P$ et $\alpha$ un nombre réel. A tout point $M\ de\ P$ on associe par l'application $f_\alpha$ le point $M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = (2-\alpha)\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{MC}$.

Précisons, suivant les valeurs de $\alpha$ la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f_\alpha$.

$Si\ \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0\ ;\ c'est - à - dire : (2-\alpha) - 4 + (1+2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} &= (2-\alpha)\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{MC} \quad \text{fixons A}\\ &= (2-\alpha)\overrightarrow{MA} +'\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB}\right) + (1+2\alpha)\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= (2-\alpha-4+1+2\alpha)\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{AC}\\ &= (-1+\alpha)\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{AB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{AC} \qquad \alpha = 1\\ &= -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ avec $\vec{u} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

**Si $\alpha = 1$, *alors* l'application $f_\alpha$ est une translation de vecteur $\vec{u} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.**

$Si\ \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ c-à-d $\alpha \neq 1$, $i$l existe un unique point $G = bary\{(A,\ 2-\alpha)\quad;\quad (B,-4)\quad;\quad (C,\ 1+2\alpha)\}$ tel que

$(2-\alpha)\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} &= (2-\alpha)\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{MC} \quad \text{fixons } G\\ &= (2-\alpha)\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) - 4\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + (1+2\alpha)\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)\\ &= (\alpha-1)\overrightarrow{MG} + (2-\alpha)\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{GC}\\ &= (\alpha-1)\overrightarrow{MG} + \vec{0}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{MM'} = (\alpha-1)\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = (\alpha-1)\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = (\alpha-2)\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = (\alpha-2)\overrightarrow{GM}$

**Si $\alpha \neq 2$ ; $\overrightarrow{GM'} = (\alpha-2)\overrightarrow{GM}$. Alors l'application $f_\alpha$ est une homothétie de centre $G$ et de rayon $k = (\alpha-2)$**

**Si $\alpha = 2$, $\overrightarrow{GM'} = (2-2)\overrightarrow{GM} = 0$. Alors $f_\alpha$ est une application constante définie par : $f_2$: $M \longrightarrow f_2(M) = G$**

**Conclusion :**

**Si $\alpha = 1$, *alors* l'application $f_\alpha$ est une translation de vecteur $\vec{u} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.**

**Si $\alpha = 2$, $\overrightarrow{GM'} = (2-2)\overrightarrow{GM} = 0$. Alors $f_\alpha$ est une application constante définie par : $f_2$: $M \longrightarrow f_2(M) = G$** **1,5pt**

**Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\ ;\ 2\}$ ; $\overrightarrow{GM'} = (\alpha - 2)\overrightarrow{GM}$. Alors l'application $f_\alpha$ est une homothétie de centre $G$ et de rayon $k = (\alpha - 2)$**

## Exercice 2 : 4pts

1) Soit $(U_n)$ la suite numérique définie par $U_0 = 0$ et pour $n \geq 1$.

$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

a) Montrons que pour tout entier naturel $n$ : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

Posons $f(x) = \ln x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$\forall\ x \in [n\ ;\ n+1]$ ; $n \leq x \leq n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{n+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{n}}$

En appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[n\ ;\ n+1]$. On aura :

$\frac{1}{n+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}[(n+1)-(n)] \leq f(n+1) - f(n) \leq \frac{1}{n}[(n+1)-(n)]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) + \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ CQFD

**Alors, pour tout entier naturel $n$ : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$** **1pt**

b) Déduisons-en que pour tout entier naturel non nul $n$ on a : $U_n \geq \ln(n+1)$ puis calculons la limite de $(U_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$

Pour $n = 1, on\ a$: $\frac{1}{2} \leq \cancel{\ln(2)} - \ln(1) \leq \frac{1}{1}$

Pour $n = 2, on\ a$: $\frac{1}{3} \leq \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)} \leq \frac{1}{2}$

Pour $n = 3, on\ a$: $\frac{1}{4} \leq \cancel{\ln(4)} - \cancel{\ln(3)} \leq \frac{1}{3}$

Pour $n = 4, on\ a$: $\frac{1}{5} \leq \cancel{\ln(5)} - \cancel{\ln(4)} \leq \frac{1}{4}$

…. …. ….

…. …. ….

Pour $n = n, on\ a$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \cancel{\ln(n)} \leq \frac{1}{n}$

$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) \leq \ln(n+1) \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

$$U_{n+1} \leq \ln(n+1) \leq U_n$$

**Alors, pour tout entier naturel non nul $n$ on a : $U_n \geq \ln(n+1)$** **0,5pt**

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty\ alors$ $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$ **0, 5pt**

2) Le plan affine euclidien $P$ est muni d'un repère orthonormé et $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes. A tout $M(x\ ;\ y)$ d'affixe $z$ l'application $f$ associe le point $M'(x';\ y')$ d'affixe $z'$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

Exprimons $z'$ en fonction de $z$ puis donnons la nature et les éléments caractéristiques de $f$.

$i\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

$x' + y'i = (x - y - 1) + i(x + y - 1)$

$= (x + yi) + (xi - y) - (1 + i)$

$= (x + yi) + i(x + yi) - (1 + i)$

$= (x + yi)[1 + i] - (1 + i)$

$x' + y'i = (x + yi)(1 + i) - (1 + i)$

$\boldsymbol{z' = (1+i)z - 1 - i}$ **1pt**

$z' = az + b \quad$ où $a = 1 + i \quad et \quad b = -1 - i$

$\boldsymbol{a \in \mathbb{C}}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{|a| = 2 \neq 1}$. **Alors** $\boldsymbol{l'application\ f}$ **est une similitude directe :**

**de centre : Ω d'affine** $\boldsymbol{\frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-1-i} = \frac{-1-i}{-i} = 1 - i}$ **1pt**

**de rapport** $\boldsymbol{k = |a| = 2}$

**de centre** $\boldsymbol{\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{4}}$

## Problème : 10 pts

**Partie A :**

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2}[\ln x - \ln(1-x)]$ $et$ $(C)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ (Unité graphique 5 cm).

1) a)

- Déterminons l'ensemble de définition de $f$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, x > 0\ \ et\ \ 1 - x > 0\}$

$x = 0\ \ et\ \ 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | 0 $+$ | | $+$ |
| $1-x$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ |

$\boldsymbol{D_f = ]0\ ;\ 1[}$ **0,5pt**

- calculons les limites de $f(x)$ aux bornes de cet ensemble.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}[\ln 0^+ - \ln(1-0)] = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}[\ln 1 - \ln(1-1)] = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty}$$

Déduire les équations des droites asymptotes à la courbe $(C)$.

$\boldsymbol{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$. ***Alors la droite d'équation*** $\boldsymbol{x = 0}$ ***est asymptote verticale*** à $\boldsymbol{(C)}$ ***en*** $-\infty$. **0,25pt**

$\boldsymbol{\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty}$. ***Alors la droite d'équation*** $\boldsymbol{x = 1}$ ***est asymptote verticale*** à $\boldsymbol{(C)}$ ***en*** $+\infty$ **0,25pt**

b) Etudions les variations de $f$ et dressons son tableau de variation.

$\forall\ x \in ]0\ ;\ 1[\ ;\ f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x+x}{x(1-x)}\right) = \frac{1}{2x(1-x)}$

$\boldsymbol{\forall\ x \in ]0\ ;\ 1[\ ;\ f'(x) = \frac{1}{2x(1-x)}}$

$\boldsymbol{\forall\ x \in ]0\ ;\ 1[\ ;\ f'(x) > 0}$. **Alors** $\boldsymbol{f}$ **est strictement croissante sur** $\boldsymbol{]0\ ;\ 1[}$. **0,25pt**

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**0,25pt**

2) a) Montrons que le point $A\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ est centre de symétrie de $(C)$.

$(a\ ;\ b)$ est centre de symétrie de $(C)$ si et seulement si : $f(2a-x)+f(x)=2b$

Véeifions que : $f(1-x)+f(x)=0$

$$f(1-x)+f(x)=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(x)]+\frac{1}{2}[\ln x-\ln(1-x)]$$
$$=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(x)+\ln x-\ln(1-x)]$$

**$f(1-x)+f(x)=0$ . Alors le point $A\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ est centre de symétrie de $(C)$.** **0,5pt**

b) Déterminons une équation de la tangente $(D)$ à $(C)$ au point $A$.

$(T) : y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\forall\ x\in\, ]0\ ;\ 1[\ ;\ f'(x)=\frac{1}{2x(1-x)}$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$(T) : y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)+0$

**$(T)$ : $y=2x-1$ *est* une équation de la tangente $(D)$ à $(C)$ au point $A\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.** **0,5pt**

c) On pose : $\varphi(x)=f(x)-2x+1$. Etudions les variations de $\varphi$ puis déduisons les positions relatives de $(C)$ $et$ $(D)$.

$\varphi(x)=\frac{1}{2}[\ln x-\ln(1-x)]-2x+1$

$D_\varphi=D_f=\,]0\ ;\ 1[$

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\frac{1}{2}[\ln 0^+-\ln(1)]+1=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\varphi(x)=\frac{1}{2}[\ln 1-\ln(0^+)]-1=+\infty$$

$\forall\ x\in\, ]0\ ;\ 1[\ ,\ \varphi'(x)=f'(x)-2=\frac{1}{2x(1-x)}-2=\frac{1-4x+4x^2}{2x(1-x)}$

$\forall\ x\in\, ]0\ ;\ 1[\ ,\ \varphi'(x)=\frac{4x^2-4x+1}{2x(1-x)}=\frac{(2x-1)^2}{2x(1-x)}\geq 0$

**$\forall\ x\in\, ]0\ ;\ 1[\ ,\ \varphi'(x)\geq 0$. Alors $\varphi$ est croissante sur $]0\ ;\ 1[$.**

Tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $\varphi(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $(0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

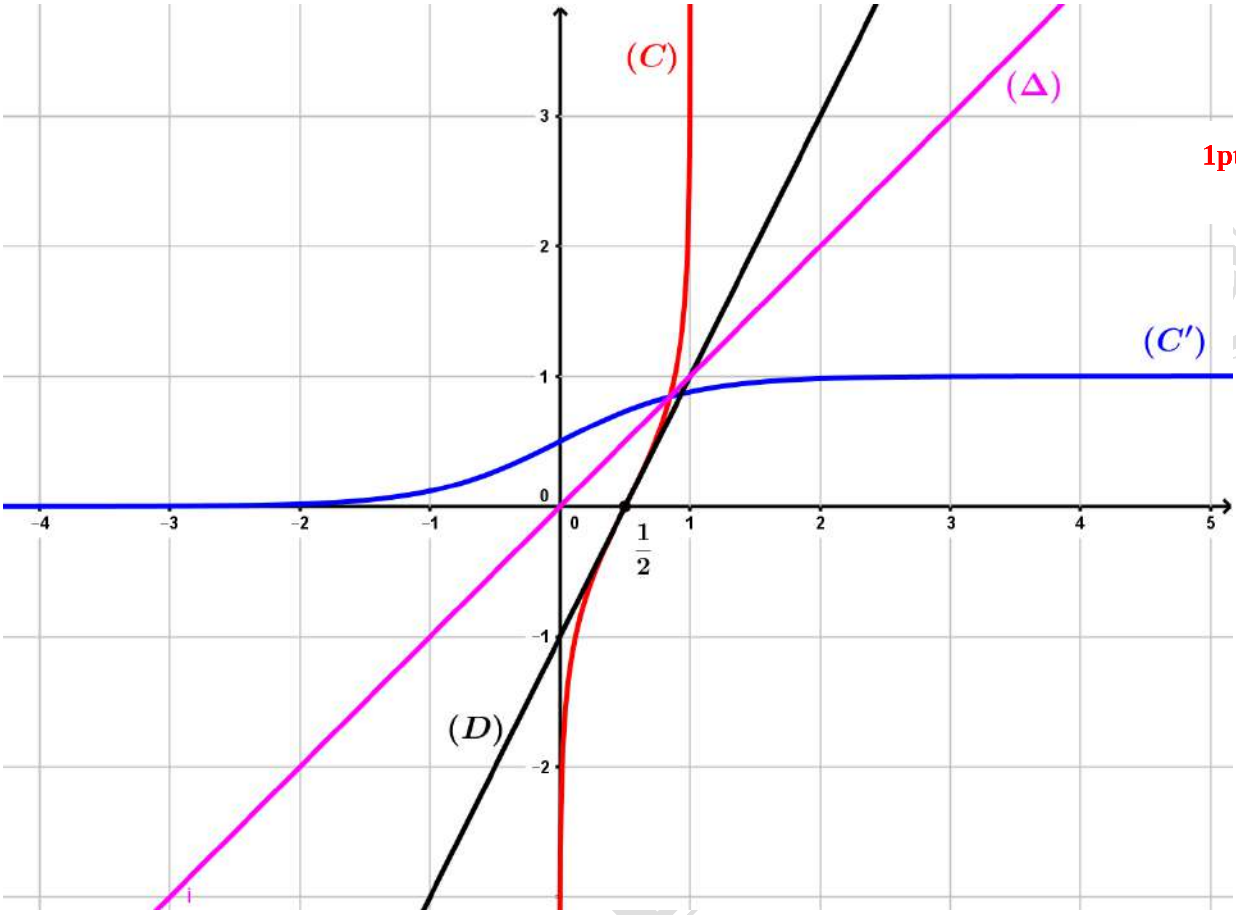
**0,25pt**

Positions relatives de $(C)$ $et$ $(D)$ :

$\forall x\in\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[, \varphi(x)<0$ c'est-à-dire $f(x)-y<0$. Alors la courbe $(C)$ de $f$ est en dessous de la tangente $(D)$. $\forall x\in\left]\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[, \varphi(x)>0$ c'est-à-dire $f(x)-y>0$. Alors la courbe $(C)$ de $f$ est au dessus de la tangente $(D)$. **$0,25pt$**

$\forall x \in \left\{\frac{1}{2}\right\}, \varphi(x) = 0$ c'est-à-dire $f(x) - y = 0$. Alors la courbe $(C)$ de $f$ et la tangente $(D)$ sont confondues au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

3) Traçons $(C)$ $et$ $(D)$ dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.




**1pt**

Partie B :

1) On considère la fonction $h$ définie sur $]0\ ;\ 1[$ par : $h(x) = f(x) - x$

a) En utilisant les variation de la fonction $h$, démontrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique que l'on notera $\alpha$ dans $]0\ ;\ 1[$.

$D_h = D_f = ]0\ ;\ 1[\quad ;\quad \lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to 1^-} h(x) = +\infty.$

$$\forall\, x \in ]0\ ;\ 1[\ ;\ h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{2x(1-x)} - 1 = \frac{1-2x(1-x)}{2x(1-x)} = \frac{1-2x+2x^2}{2x(1-x)}$$

$$\forall\, x \in ]0\ ;\ 1[\ ;\ h'(x) = \frac{2x^2-2x+1}{2x(1-x)} \quad et\ son\ signe\ depend\ du\ numérateur$$

Posons : $2x^2 - 2x + 1 = 0\quad ;\quad \Delta = -4 < 0$

alors $\forall\, x \in ]0\ ;\ 1[\ ;\ h'(x) > 0$

- Tableau de variation :

| $x$ | $0$      $\alpha$      $1$ |
|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ |
| $h(x)$ | $-\infty$ ↗ $(0)$ ↗ $+\infty$ |

**La fonction $h$ est continue et strictement croissante sur $]0\ ;\ 1[$, elle réalise une bijection de $]0\ ;\ 1[$ vers $]-\infty\ ;\ +\infty[$ Or $0 \in ]-\infty\ ;\ +\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in ]0\ ;\ 1[$ telle que $h(\alpha) = 0$** **0,5pt**

En plus : $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$

**Ainsi, l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]0\ ;\ 1[$.**

b) Montrons que $0,8 \leq \alpha \leq 0,9$.

$\begin{cases} h(0,8) = f(0,8) - 0,8 = -0,11 \\ h(0,9) = f(0,9) - 0,9 = 0,2 \end{cases}$. Alors $\boldsymbol{h(0,8) \times h(0,9) < 0 \Leftrightarrow 0,8 \leq \alpha \leq 0,9}$ **0,5pt**

2) On appelle $S$ la réflexion d'axe $\Delta : y = x$ et $(C')$ l'image de $(C)$ par $S$.

a) Démontrons qu'un point $M(x\ ;\ y) \in (C')$ si et seulement si $x \in ]0\ ;\ 1[$ et $2x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$.

$S_\Delta(C) = C' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

$M(x\ ;\ y) \in (C') \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow f(y) = x$

$f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\ln y - \ln(1-y)] = x \Leftrightarrow \ln y - \ln(1-y) = 2x \Leftrightarrow \boldsymbol{2x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)}$ **et $x \in ]0\ ;\ 1[$** **0,25pt**

Déduire que $(C')$ est la représentation graphique de la fonction $g$ définie par : $g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

$g(x) = y$ alors :

$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = 2x \Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = e^{2x} \Leftrightarrow y = (1-y)e^{2x} \Leftrightarrow y + ye^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow (1+e^{2x})y = e^{2x} \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ CQFD

**Alors $(C')$ est la représentation graphique de la fonction $g$ définie par : $g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$** **0,25pt**

b) Traçons $\Delta$ et $(C')$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ de la partie A) (Voir repère) **1pt**

c) Montrons que le réel $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

L'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]0\ ;\ 1[$ *telle* que $f(\alpha) = \alpha$

$f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\ln\alpha - \ln(1-\alpha)] = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) = \alpha \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) = 2\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha} = e^{2\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{e^{2\alpha}}{1+e^{2\alpha}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = g(\alpha)}$

**D'où le réel $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$** **0,5pt**

**Partie C :**

1) On appelle $I$ l'intervalle $]0,8\ ;\ 0,9[$

a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

$\forall\, x \in ]-\infty\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{4x}+2e^{2x}-2e^{4x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$\boldsymbol{\forall\, x \in ]-\infty\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}}$ **0,25pt**

$\forall\, x \in ]-\infty\ ;\ +\infty[\ ;\ g''(x) = \frac{4e^{2x}(e^{2x}+1)^2 - 4e^{2x}(e^{2x}+1)(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^4} = \frac{4e^{2x}(e^{2x}+1)[(e^{2x}+1) - 2e^{2x}]}{(e^{2x}+1)^4} = \frac{4e^{2x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^3}$

$\boldsymbol{\forall\, x \in ]-\infty\ ;\ +\infty[\ ;\ g''(x) = \frac{4e^{2x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^3}}$ **0,25pt**

b) Montrons que pour tout réel $x$ de $I$, $g(x)$ est aussi élément de $I$ et que : $0 \leq g'(x) \leq 0,3$.

$\forall\, x \in ]-\infty\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) > 0$. Alors $g$ est strictement croissante sur $]0,8\ ;\ 0,9[ \subset ]-\infty\ ;\ +\infty[$.

$\forall x \in ]0,8\ ;\ 0,9[\ ;\ 0,8 < x < 0,9 \Leftrightarrow g(0,8) < g(x) < g(0,9)$

$\Leftrightarrow 0,83 < g(x) < 0,86$

$\Leftrightarrow 0,8 < 0,83 < g(x) < 0,86 < 0,9$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow g(x) \in ]0,8\ ;\ 0,9[}$ **CQFD (1)**

**D'où pour tout réel $x$ de $I = ]0,8\ ;\ 0,9[$, $g(x)$ est aussi élément de $I$.** **0,25pt**

$\forall\, x \in ]-\infty\ ;\ +\infty[\ ;\ g''(x) = \frac{4e^{2x}(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^3}$. Le signe de $g''(x)$ dépend de celui de $(1 - e^{2x})$

Posons : $1 - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tableau de variation de $g''$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$\forall\, x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ g''(x) < 0$. Alors $g'$ est strictement décroissante sur $]0{,}8\ ;\ 0{,}9[ \subset ]0\ ;\ +\infty[$

$\forall\, x \in ]08\ ;\ 0{,}9[$ on a : $0{,}8 < x < 0{,}9 \Leftrightarrow g'(0{,}9) < g'(x) < g'(0{,}8)$

$\Leftrightarrow 0{,}24 < g'(x) < 0{,}28$

$\Leftrightarrow 0 \leq 0{,}24 < g'(x) < 0{,}28 \leq 0{,}3$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{0 \leq g'(x) \leq 0{,}3 \quad CQFD \quad (2)}$

**D'après (1) et (2) pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{g(x)}$ est aussi élément de $\boldsymbol{I}$ et : $\boldsymbol{0 \leq g'(x) \leq 0{,}3}$** **0,25pt**

c) Déduisons-en que pour tout $x$ élément de $I$ on a : $|g(x) - \alpha| \leq 0{,}3|x - \alpha|$.

$\forall\ x \in I = ]08\ ;\ 0{,}9[\ ;\ g(x) \in I \quad et \quad \alpha \in I \ \ 0 \leq g'(x) \leq 0{,}3$

En appliquant l'inégalité des accroissement finis sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ x]$ à la fonction g on a :

$|g(x) - g(\alpha)| \leq 0{,}3|x - \alpha| \Leftrightarrow \boldsymbol{|g(x) - \alpha| \leq 0{,}3|x - \alpha|}$ car $\boldsymbol{\alpha}$ **est l'unique solution de l'équation $\boldsymbol{g(x) = x}$ c'est-à-dire $\boldsymbol{g(\alpha) = \alpha}$.** **0,5pt**

2) On considère la suite $(U_n)$ d'élément de $I$, définie par $U_0 = 0{,}8$ et pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrons que pour tout entier naturel $n$, $|U_n - \alpha| \leq 0{,}1(0{,}3)^n$.

$U_n \in I \Leftrightarrow g(U_n) = U_{n+1} \in I$ d'après la question précédente b)

Pour tout $x$ élément de $I$ on a : $|g(x) - \alpha| \leq 0{,}3|x - \alpha|$

Posons $x = U_n \in I$; $on\ a$ : $|g(U_n) - \alpha| \leq 0{,}3|U_n - \alpha| \Leftrightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3|U_n - \alpha|$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $on\ a$ : $|U_{k+1} - \alpha| \leq 0{,}3|U_k - \alpha|$

En variant $k$ on obtient :

Pour $k = 0$ : $\quad \cancel{|U_1 - \alpha|} \leq 0{,}3|U_0 - \alpha|$

Pour $k = 1$ : $\quad \cancel{|U_2 - \alpha|} \leq 0{,}3\cancel{|U_1 - \alpha|}$

Pour $k = 2$ : $\quad \cancel{|U_3 - \alpha|} \leq 0{,}3\cancel{|U_2 - \alpha|}$

Pour $k = 3$ : $\quad \cancel{|U_4 - \alpha|} \leq 0{,}3\cancel{|U_3 - \alpha|}$

Pour $k = 4$ : $\quad \cancel{|U_5 - \alpha|} \leq 0{,}3\cancel{|U_4 - \alpha|}$

…………… ………… …………..

…………… ………… …………..

…………… ………… …………..

Pour $k = n - 1$ : $\quad |U_n - \alpha| \leq 0{,}3\cancel{|U_{n-1} - \alpha|}$

En multipliant membre à membre les deux termes de l'inégalité et en simplifiant, on obtient :

Donc : $|U_n - \alpha| \leq \underbrace{(0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times \ldots \times 0{,}3)}_{n\ fois} |U_0 - \alpha|$

: $|U_n - \alpha| \leq (0{,}3)^n|U_0 - \alpha|$

: $|U_n - \alpha| \leq (0{,}3)^n|0{,}8 - \alpha|$

$\alpha$ étant élément de $]0{,}8\ ;\ 0{,}9[$ ; on a :

$0{,}8 < \alpha < 0{,}9 \Leftrightarrow -0{,}9 < -\alpha < -0{,}8$

$\Leftrightarrow 0{,}8 - 0{,}9 < 0{,}8 - \alpha < 0{,}8 - 0{,}8$

$\Leftrightarrow -0{,}1 < 0{,}8 - \alpha < 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{|0{,}8 - \alpha| \leq 0{,}1}$

Alors : $|U_n - \alpha| \leq (0{,}3)^n|0{,}8 - \alpha| \leq (0{,}3)^n \times (0{,}1)$

: $\boldsymbol{|U_n - \alpha| \leq 0{,}1(0{,}3)^n \quad CQFD}$

**D'où pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{|U_n - \alpha| \leq 0{,}1(0{,}3)^n}$** **0,5pt**

Autre methode : démonstration par récurrence :

Soit les proposition $P_n$ : $\ |U_n - \alpha| \leq 0{,}1(0{,}3)^n$

Pour $n = 0$, on a : $P_0$ : $|U_0 - \alpha| = |0{,}8 - \alpha| \leq |0{,}8 - 0{,}9| = 0{,}1 = 0{,}1(0{,}3)^0 \Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 0{,}1(0{,}3)^0\ Vraie$

Pour tout entier naturel $n$, supposons $P_n$ vraie c'est-à-dire : $|U_n - \alpha| \leq 0{,}1(0{,}3)^n$ et montrons pour $P_{n+1}$ est vraie c'est-à-dire $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}1(0{,}3)^{n+1}$

On a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3|U_n - \alpha|$

: $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3 \times 0{,}1(0{,}3)^n$

: $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}1(0{,}3)^{n+1}$ vraie

**D'où pour tout entier naturel $n$, $|U_n - \alpha| \leq 0{,}1(0{,}3)^n$.**

b) Déterminons un entier $p$ tel que $U_p$ soit une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-4}$ près.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|U_p - \alpha| \leq 10^{-4} \Leftrightarrow (0{,}1)(0{,}3)^p \leq 10^{-4} \Leftrightarrow (0{,}3)^p \leq 10^{-3} \Leftrightarrow p \geq \frac{-3\ln(10)}{\ln(0{,}3)} = 5{,}7374\ldots$

**D'où, $p = 6$. *Alors* $U_6$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-4}$ près** 0,25pt

- Donnons une valeur approchée de $U_p$ à $10^{-4}$ près.

$|U_6 - \alpha| \leq 10^{-4} \Leftrightarrow U_6 = \alpha \quad et \quad 0{,}8 \leq \alpha \leq 0{,}9$

Or, l'équation $f(x) - x = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $[0{,}8\ ;\ 0{,}9] \subset ]0\ ;\ 1[$

Par balayage :

Ordre 2 :

| $x$ | 0,8 | 0,81 | 0,82 | 0,83 | 0,84 | 0,85 | 0,86 | 0,87 | 0,88 | 0,89 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x) - y$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Alors : $0{,}84 \leq \alpha \leq 0{,}85$

Ordre 3 :

| $x$ | 0,84 | 0,841 | 0,842 | 0,843 | 0,844 | 0,845 | 0,846 | 0,847 | 0,848 | 0,849 | 0,85 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x) - x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Alors : $0{,}843 \leq \alpha \leq 0{,}844$

Ordre 4 :

| $x$ | 0,843 | 0,8431 | 0,8432 | 0,8433 | 0,8434 | 0,8435 | 0,8436 | 0,8437 | 0,8438 | 0,8439 | 0,844 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x) - x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |

Alors : $0{,}8439 \leq \alpha \leq 0{,}8440$ .

0,8439 est la valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-4}$ près par defaut

D'où **$0{,}8439$ est une valeur approchée de $U_6$ à $10^{-4}$ près**. 0,25pt

Autre méthode :

$U_0 = 0{,}8$ et pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = g(U_n)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $U_1 = g(U_0) = \frac{e^{2(0,8)}}{e^{2(0,8)}+1}$ | $U_2 = g(U_1) = \frac{e^{2U_1}}{e^{2U_1}+1}$ | $U_3 = g(U_2) = \frac{e^{2U_2}}{e^{2U_2}+1}$ | $U_4 = g(U_3) = \frac{e^{2U_3}}{e^{2U_3}+1}$ | $U_5 = g(U_4) = \frac{e^{2U_4}}{e^{2U_4}+1}$ | $U_6 = g(U_5) = \frac{e^{2U_5}}{e^{2U_5}+1}$ |
| $U_1 = 0{,}8320$ | $U_2 = 0{,}8407$ | $U_3 = 0{,}8431$ | $U_4 = 0{,}8437$ | $U_5 = 0{,}8438$ | $\boldsymbol{U_6 = 0{,}8439}$ |

D'où **$0{,}8439$ est une valeur approchée de $U_6$ à $10^{-4}$ près**

# Baccalauréat Malien : Session de juin 2006 (SET)

## Exercice 1: 4,5pts

1) Calculer les intégrales suivantes:

a) $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1} dx$ (On pourra mettre $\frac{x^2-1}{2x-1}$ sous la forme $ax+b+\frac{c}{2x-1}$ où $a$ ; $b$ $et$ $c$ sont trois réels que l'on déterminera). 0,5pt

b) $\int_{0}^{1} x^3\sqrt{1+x}\, dx$ (On pourra utiliser le changement de variable $u=x+1$). 0,5pt

2) a) Décomposer les nombres 450 et 320 en produit de facteurs premiers. 0,5pt

b) Quel est le PGCD de 450 et de 320 ? 0,5pt

c) Une pièce rectangulaire a pour dimension $4{,}5m$ $et$ $3{,}2m$. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ? 1pt

3) Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé on désigne par $(H)$ l'ellipse d'équation :

$4x^2+9y^2-8x+36y+4=0.$

Donner l'équation réduite de $(H)$ et préciser son centre, ses sommets et ses foyers. 1,5pt

## Exercice 2 : 4pts

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation :

$(F)$: $z^4-2z^3(1+\sqrt{3})+2z^2(3+2\sqrt{3})-4z(2+\sqrt{3})+8=0$

a) Démontrer que si le complexe $z_0$ est une solution de $(F)$ alors il en est de même pour son conjugué $\overline{z_0}$ (c'est-à-dire $\overline{z_0}$ est aussi une solution de $(F)$). 0,5pt

b) Vérifier que le complexe $z_0=1+i$ est une solution de l'équation de l'équation $(F)$.

En déduire une seconde solution $z_1$ de l'équation. 1pt

c) Déterminer les deux autres solutions de $z_2$ $et$ $z_3$ de l'équation $(F)$. 1pt

d) Représenter dans le plan complexe les points images des quatre solution de l'équation $(F)$. (Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm). 0,5pt

e) Déterminer la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm² l'aire de sa surface. 1pt

## Problème : 11,5 pts

**Partie I :**

P est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ direct. $f$ $et$ $g$ sont les applications affines de P qui associent à tout point $M(x\ ;\ y)$ le point $M'(x'\ ;\ y')$ telles que $f$ : $\begin{cases} x'=2x+1 \\ y'=2y+1 \end{cases}$ et $g$ : $\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y-1 \end{cases}$

1) Pour chacune des applications $f$ $et$ $g$ :

a) Déterminer l'ensemble des points invariants, préciser celles qui sont bijectives. 1pt

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles. 1pt

2) Déterminer analytiquement la réflexion d'axe $\Delta$ d'équation : $y=x$. 0,5pt

**Partie II :**

A) Soit $f$ la fonction numérique à variable réelle $x$ défine pour tout $x\neq 1$ par : $f(x)=\frac{e^{-x}}{2(1-x)}$.

On appelle $(\Gamma)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ (On ne demande pas de représenter $(\Gamma)$).

1) a) Etudier les limites de $f$ en $+\infty$ $et\ en$ 1. Interpréter graphiquement ces résultats. 1pt

b) Vérifier que pour $x \neq 1$, $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{x}{2(x-1)}$.

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$. 0,75pt

2) a) Montrer que $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$. 0,5pt

b) Etudier les variations de $f$. 0,5pt

c) Montrer que $f$ admet un minimum que l'on précisera sur $]-\infty\ ;\ 1[$. 0,5pt

B) On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 0$, $o$ù $y$ est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Résoudre $(E)$. 0,5pt

2) On considère les solution de $(E)$ dont la courbe représentative passe par le point $A\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

a) Montrer que ces solutions s'écrivent sous la forme $\left(ax + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$. On note $h_a(x) = \left(ax + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$ où $a$ est un réel. 0,5pt

b) Etudier le sens de variation de $h_a$ selon les valeurs de $a$ et montrer que pour tout réel $a \neq 0$, $h_a$ admet un extremum pour une valeur de $x$ que l'on déterminera en fonction de $a$. 1,25pt

c) On note $C_a$ la courbe représentative de $h_a$ et $S_a$ le point de $C_a$ correspont à l'extremum de $h_a$ ; vérifier que pour tout $a \neq 0$, $S_a$ est un point de la courbe $(\Gamma)$ de la partie A).

3) Construire das le plan muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ (unité 4cm) les courbes $C_a$ pour les valeurs suivantes de $\frac{1}{4}\ ;\ -2\ ;\ 0\ ;\ 1\ et\ 2.$ 2pts

4) Soit $\lambda$ un réel supérieur à $-2$ ; on appelle $D_\lambda$ l'ensemble des points $M$ du plan limite par l'axe des abscisses, la courbe $C_{\frac{1}{4}}$ et la droite d'équation $x = \lambda$.

a) exprimer $I = \int_{-2}^{\lambda} h_{\frac{1}{4}}(t)\,dt$ en fonction de $\lambda$ ; on pourra utiliser une intégration par parties, ou se servir de l'équation différentielle $(E)$. 0,5pt

b) Soit $A(\lambda)$ la mesure de l'aire de $D_\lambda$ ; quelle est la limite de $A(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $\infty$. 0,5pt

## Exercice 1 : 4,5 pts

1) calculons les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}\,dx$

$$\begin{array}{l|l} x^2-1 & 2x-1 \\ \cline{2-2} -x^2+\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\ \cline{1-1} \quad \frac{1}{2}x-1 & \\ \quad -\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} & \\ \cline{1-1} \quad 0 \quad \frac{-3}{4} & \end{array}$$

$\frac{x^2-1}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)}$. **0,25pt**

$\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}\,dx = \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)}\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\ln|2x-1|\right]_{-1}^{0} = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\ln 3\right) = \frac{3}{8}\ln 3$

$\boldsymbol{\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}\,dx = \frac{3}{8}\ln 3}$ **0,25pt**

b) $\int_0^1 x^3\sqrt{1+x}\,dx$

Posons $u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1 \quad et\ du = du$

$si\ x = 0 \ \ alors\ u = 1$

$Si\ x = 1\ \ alors\ \ u = 2$

$\int_0^1 x^3\sqrt{1+x}\,dx = \int_1^2 (u-1)^3\sqrt{u}\,du = \int_1^2 (u^3-3u^2+3u-1)\sqrt{u}\,du = \int_1^2 \left(u^3u^{\frac{1}{2}} - 3u^2u^{\frac{1}{2}} + 3uu^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)du$

$= \int_1^2 \left(u^{\frac{7}{2}} - 3u^{\frac{5}{2}} + 3u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)du = \left[\frac{u^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} - 3.\frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + 3.\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^2 = \left[\frac{u^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} - 3.\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 3.\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2$

$= \left[\frac{2}{9}u^4\sqrt{u} - \frac{6}{7}u^3\sqrt{u} + \frac{6}{5}u^{2\sqrt{u}} - \frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^2 = \left(\frac{2}{9}.16\sqrt{2} - \frac{6}{7}.8\sqrt{2} + \frac{6}{5}.4\sqrt{2} - \frac{2}{3}.2\sqrt{2}\right) - \left(\frac{2}{9} - \frac{6}{7} + \frac{6}{5} - \frac{2}{3}\right)$

$= \frac{(3360-6480+4536-1260)}{945}\sqrt{2} - \left(\frac{210-810+1134-630}{945}\right) = \frac{156\sqrt{2}+96}{945} = \frac{52\sqrt{2}+32}{315}$

$\boldsymbol{\int_0^1 x^3\sqrt{1+x}\,dx = \frac{52\sqrt{2}+32}{315}}$ **0,5pt**

2) a) Décomposons les nombres 450 et 320 en produit de facteurs premiers

| | |
|---|---|
| 450 | 2 |
| 225 | 3 |
| 75 | 3 |
| 25 | 5 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

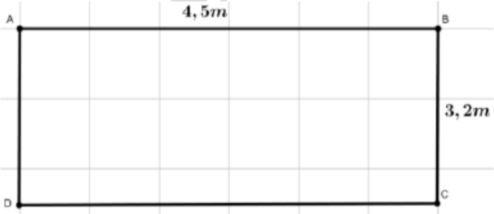
| | |
|---|---|
| 320 | 2 |
| 160 | 2 |
| 80 | 2 |
| 40 | 2 |
| 20 | 2 |
| 10 | 2 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$ **0,25pt** et $320 = 2^6 \times 5$ **0,25pt**

b) Le PGCD de 450 et de 320 est :

$\boldsymbol{PGCD(450\ ;\ 320) = 2 \times 5 = 10}$ **0,5pt**

c) Une pièce rectangulaire a pour dimension 4,5$m$ $et$ 3,2$m$.




On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée est le plus grand commun diviseur des deux dimensions en cm, soit :

$\boldsymbol{PGCD(450\ ;\ 320) = 10\ cm}$ **5pt**

3) Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé on désigne par $(H)$ l'ellipse d'équation : $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$.

Donnons l'équation réduite de $(H)$ et préciser son centre, ses sommets et ses foyers.

$$4x^2+9y^2-8x+36y+4=0 \Leftrightarrow (4x^2-8x)+(9y^2+36y)+4=0$$
$$\Leftrightarrow [(2x-2)^2-4]+[(3y+6)^2-36]+4=0$$
$$\Leftrightarrow 4(x-1)^2+9(x+2)^2=36$$
$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)^2}{36}+\frac{9(y+2)^2}{36}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

**L'équation réduite de $(H)$ est :** $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$ avec $\begin{cases}X=x-1\\Y=y-2\end{cases}$ 0,5pt

de demi distance focale : $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

Son centre est $S(1\ ;\ -2)$ 0,25pt

Ses sommets sont : $A(3\ ;\ 0)$ ; $A'(-3\ ;\ 0)$ ; $B(0\ ;\ 2)$ et $B'(0\ ;\ -2)$. 0,5pt

Ses foyers sont : $F(\sqrt{5}\ ;\ 0)$ ; $F'(-\sqrt{5}\ ;\ 0)$ *droite de repère* $(S\ ;\ \vec{\imath})$ 0,25pt

## Exercice 2 : 4 pts

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation :

$(F)$: $z^4-2z^3(1+\sqrt{3})+2z^2(3+2\sqrt{3})-4z(2+\sqrt{3})+8=0$

a) Démontrons que si le complexe $z_0$ est une solution de $(F)$ alors il en est de même pour son conjugué $\overline{z_0}$ .

Supposons que $z_0$ est une solution de $(F)$ ; c'est-à-dire : ${z_0}^4-2{z_0}^3(1+\sqrt{3})+2{z_0}^2(3+2\sqrt{3})-4z_0(2+\sqrt{3})+8=0$

Et montrons que $\overline{z_0}$ est une solution de $(F)$.

$$\overline{z_0}^4-2\overline{z_0}^3(1+\sqrt{3})+2\overline{z_0}^2(3+2\sqrt{3})-4\overline{z_0}(2+\sqrt{3})+8=\overline{{z_0}^4-2{z_0}^3(1+\sqrt{3})+2{z_0}^2(3+2\sqrt{3})-4z_0(2+\sqrt{3})+8}$$
$$=\overline{0}=0 \quad \text{CQFD}$$

**$\overline{z_0}^4-2\overline{z_0}^3(1+\sqrt{3})+2\overline{z_0}^2(3+2\sqrt{3})-4\overline{z_0}(2+\sqrt{3})+8=0$. Alors $\overline{z_0}$ est une solution de $(F)$.** 0,5pt

b) Vérifions que le complexe $z_0=1+i$ est une solution de l'équation de l'équation $(F)$.

$(F)$ : ${z_0}^4-2{z_0}^3(1+\sqrt{3})+2{z_0}^2(3+2\sqrt{3})-4z_0(2+\sqrt{3})+8$

$(F)$ : $(1+i)^4-2(1+i)^3(1+\sqrt{3})+2(1+i)^2(3+2\sqrt{3})-4(1+i)(2+\sqrt{3})+8$

: $-4-2(2i-2)(1+\sqrt{3})+4i(3+2\sqrt{3})-4(1+i)(2+\sqrt{3})+8$

: $-4-4i-4\sqrt{3}i+4+4\sqrt{3}+12i+8\sqrt{3}i-8-4\sqrt{3}-8i-4\sqrt{3}i+8$

: $(-4+4+4\sqrt{3}-8-4\sqrt{3}+8)+(-4-4\sqrt{3}+12+8\sqrt{3}-8-4\sqrt{3})i$

: $0 \quad + \quad 0 \quad = \quad 0$ CQFD

**$(F)$ : $(1+i)^4-2(1+i)^3(1+\sqrt{3})+2(1+i)^2(3+2\sqrt{3})-4(1+i)(2+\sqrt{3})+8=0$. Alors $z_0=1+i$ est une solution de l'équation de l'équation $(F)$** 0,5pt

Déduisons-en une seconde solution $z_1$ de l'équation.

Si le complexe $z_0=1+i$ est une solution de $(F)$ alors il en est de même pour son conjugué $\overline{z_0}=1-i$

**D'où $z_1=1-i$ est une solution de $(F)$.** 0,5pt

c) Déterminons les deux autres solutions de $z_2$ $et$ $z_3$ de l'équation $(F)$.

$z^4 - 2z^3(1+\sqrt{3}\,) + 2z^2(3+2\sqrt{3}\,) - 4z(2+\sqrt{3}\,) + 8 = (z-1-i)(z-1+i)(az^2+bz+c)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-2-2\sqrt{3}$ | $6+4\sqrt{3}$ | $-8-4\sqrt{3}$ | $8$ |
| $1+i$ | | $1+i$ | $-2-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}i$ | $4+4\sqrt{3}+4i$ | $-8$ |
| | $1$ | $-1-2\sqrt{3}+i$ | $4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}i$ | $-4+4i$ | $0$ |
| $1-i$ | | $1-i$ | $-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$ | $4-4i$ | |
| | $1$ | $-2\sqrt{3}$ | $4$ | $0$ | |

$z^4 - 2z^3(1+\sqrt{3}\,) + 2z^2(3+2\sqrt{3}\,) - 4z(2+\sqrt{3}\,) + 8 = (z-1-i)(z-1+i)(z^2-2\sqrt{3}\,z+4)$

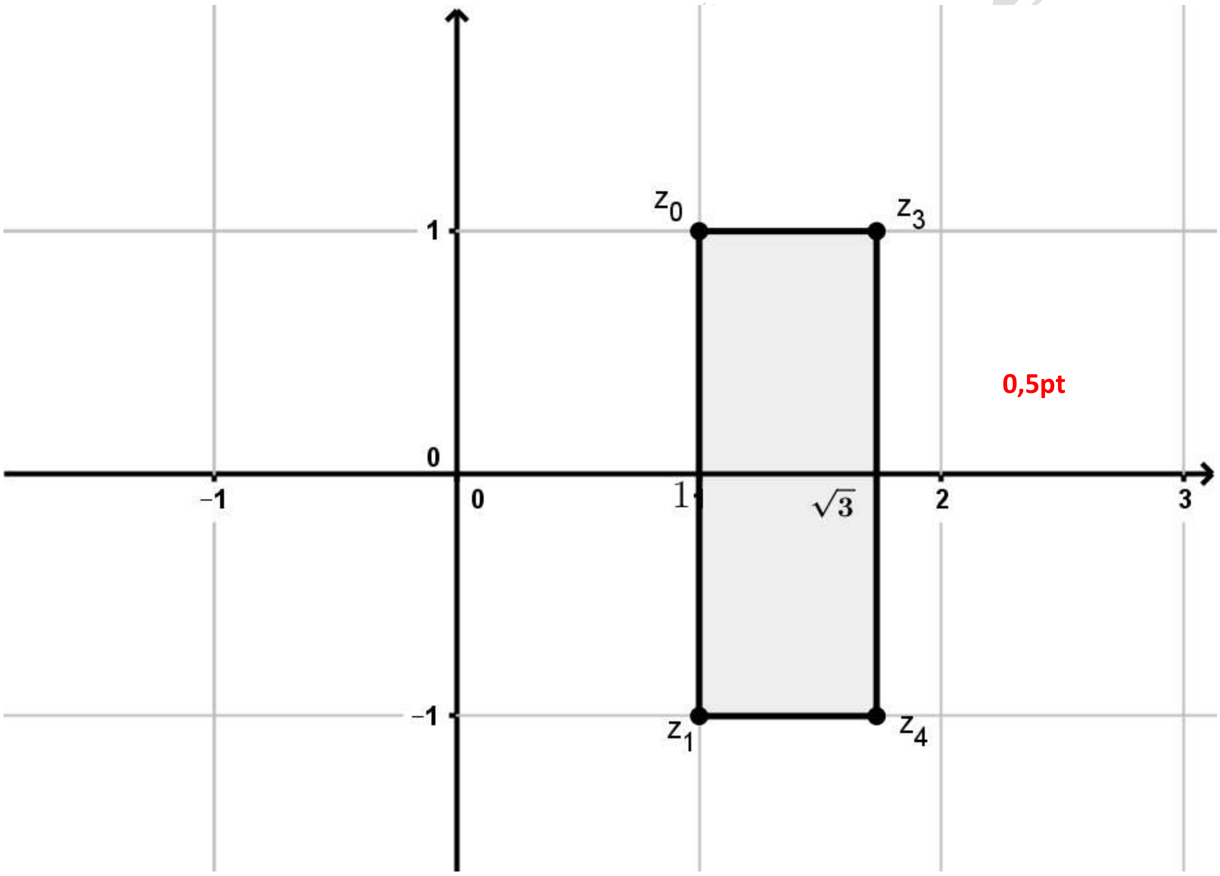
Posons : $z^2 - 2\sqrt{3}i\,z + 4 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 = -1 = i^2$

$z = \frac{b'-\sqrt{\Delta'}}{a} = \sqrt{3} - i \quad et \quad z' = \sqrt{3} + i$

**Alors $z_2 = \sqrt{3} - i$ $et$ $z_3 = \sqrt{3} + i$ sont les deux autres solutions de $(F)$.** 1pt

d) Représentons dans le plan complexe les points images des quatre solution de l'équation $(F)$. (Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm).




e) Déterminer la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm² l'aire de sa surface.

$\frac{z_3-z_0}{z_1-z_0} = \frac{\sqrt{3}+i-1-i}{1-i-1-i} = \frac{\sqrt{3}-1}{-2i} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$z_1 - z_0 = 1 - i - 1 - i = -2i$

$z_4 - z_3 = \sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i = -2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} mes\left(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}\ ;\ \overrightarrow{M_0M_3}}\right) = \arg\left(\frac{z_3-z_0}{z_1-z_0}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{M_3M_4} \end{cases} \Leftrightarrow M_0M_1M_4M_3\ est\ rectangle$

**Alors, le quadrilatère ainsi obtenu est un rectangle.** 0,5pt

Soit $A$ sont aire :

$A = |z_3 - z_0| \times |z_1 - z_0| = \left|\sqrt{3} + i - 1 - i\right| \times |1 - i - 1 - i| = \left|\sqrt{3} - 1\right| \times |-2i| = 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$

$\boldsymbol{A = 1{,}46\ cm^2}$ 0,5pt

## Problème : 11,5pts

Partie I :

P est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ direct. $f\ \ et\ \ g$ sont les applications affines de P qui associent à tout point $M(x\ ;\ y)$ le point $M'(x'\ ;\ y')$ telles que $f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

1) Pour chacune des applications $f\ \ et\ \ g$ :

a) Déterminons l'ensemble des points invariants, précisons celles qui sont bijectives.

$f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$

$*\ \ f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 1 \\ y\ = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 1 \\ -y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

**$\{(-1\ ;\ -1)\}$ est l'ensemble des points invariants de l'application affine $f$.** 0,25pt

**$f$ est bijective car $\det M_\varphi = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$** 0,25pt

$g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

$g(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x + 2 \\ y = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 \\ 0 = -1 \end{cases}\ \ Impossible$

**L'application $g$ n'admet pas de point invariant.** 0,25pt

**$g$ est bijective car $\det M_\varphi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$** 0,25pt

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

$f : {}_i\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x + 1 & (1) \\ y'i = 2yi + i & (2) \end{cases}$

$(1) + (2)\ \Leftrightarrow\ x' + y'i = 2(x + yi) + 1 + i$

$\Leftrightarrow Z' = 2Z + 1 + i$

$\Leftrightarrow Z' = aZ + b\ \ \ \ avec\ \ a = 2\ \ et\ \ b = 1 + i$

**L'application $f$ est une homothétie de rapport $k = 2$ et de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a} = -1 - i$.** 0,5pt

$g : {}_i\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 2 & (1) \\ y'i = yi - i & (2) \end{cases}$

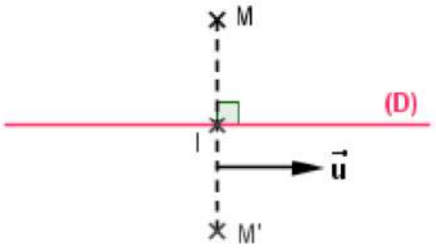
$(1) + (2)\ \Leftrightarrow\ x' + y'i = x + yi + 2 - i$

$\Leftrightarrow\ \ Z' = Z + 2 - i$

$\Leftrightarrow\ \ Z' = Z + b\ \ \ \ avec\ \ \ b = 2 - i$

**L'application $g$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2 - i$.** 0,5pt

2) Déterminer analytiquement la réflexion d'axe $\Delta$ d'équation : $y = x$.




Soit $\vec{u}(1\ ;\ 1)$ est le vecteur de la droite $(\Delta) : y = x$.

$S_\Delta(M') = M \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \\ I\ milieu\ du\ segment\ [MM']\ élément\ de\ \Delta \end{cases}$

$\overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x'-x)+(y'-y) = 0 \Leftrightarrow x'-x+y'-y = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x'+y' = x+y} \quad \mathbf{(1)}$

$I\ milieu\ du\ segment\ [MM']\ \ et\ \ I \in \Delta \Leftrightarrow \frac{y'+y}{2} = \frac{x'+x}{2} \Leftrightarrow y'+y = x'+x \Leftrightarrow \boldsymbol{x'-y' = -x+y} \quad \mathbf{(2)}$

$\begin{cases} x'+y' = x+y & (1) \\ x'-y' = -x+y & (2) \end{cases} \Leftrightarrow (1)+(2) \Leftrightarrow 2x' = 2y \Leftrightarrow x' = y$

$(1)-(2) \Leftrightarrow 2y' = 2x \Leftrightarrow y' = x$

$\boldsymbol{S_\Delta(M') = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}}$ **est l'expression analytiquet de la réflexion d'axe $\Delta$ d'équation : $\boldsymbol{y = x}$** 0,5pt

**Partie II :**

A) Soit $f$ la fonction numérique à variable réelle $x$ défine pour tout $x \neq 1$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{2(1-x)}$.

On appelle $(\Gamma)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ (On ne demande pas de représenter $(\Gamma)$).

1) a) Etudions les limites de $f$ en $+\infty$ *et en* 1. Interprétons graphiquement ces résultats.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2(1-x)}e^{-x}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.\ \ Alors\ la\ droite\ d'\acute{e}quation\ \ y = 0\ est\ asymptote\ horizontale}$ à $(\Gamma)$ $\boldsymbol{en +\infty}$. $\mathbf{0,5pt}$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^-} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty}$

$\boldsymbol{La\ droite\ d'\acute{e}quation\ x = 1\ est\ verticale}$ à $(\Gamma)$ $\boldsymbol{en\ \pm\infty}$. $\mathbf{0,5}$***pt***

b) Vérifions que pour tout $x \neq 1$, $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{x}{2(x-1)}$.

Pour tout $x \neq 1$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{2(1-x)} = \frac{xe^{-x}}{-2x(x-1)} = \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{x}{2(x-1)}$

**Alors, pour tout $\boldsymbol{x \neq 1}$, $\boldsymbol{f(x)}$ peut s'écrire : $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{x}{2(x-1)}}$.** **0,25pt**

Déduisons-en la limite de $f\ (x)$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{x}{2(x-1)}\right) = +\infty\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ $\mathbf{0,5pt}$

2) a) Montrons que $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$.

Pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-e^{-x}(1-x)+e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{(-1+x+1)e^{-x}}{2(1-x)^2} = \boldsymbol{\frac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}}$ **CQFD**

**Pour tout $\boldsymbol{x \neq 1}$, $\boldsymbol{f'(x) = \frac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}}$** **0,5pt**

b) Etudions les variations de $f$.

$x \in \mathbb{R} - \{1\}$, *le* signe de $f'(x)$ depend de celui de $x$

$\forall\ x \in\ ]-\infty\ ;\ \ 0[\ ; f'(x) < 0$. Alors $f$ strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ \ 0[$.

$\forall\ x \in\ ]0\ ;\ \ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) > 0$. Alors $f$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ \ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$.

$\forall\ x \in \{0\}\ ;\ \ f'(x) = 0$. Alors $f$ est constante sur $\{0\}$.

Tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\left(\frac{1}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert -\infty$ | $\nearrow$ | $0$ |

0,5pt

c) Montrer que $f$ admet un minimum que l'on précisera sur $]-\infty\ ;\ \ 1[$.

D'après le tableau de variation de ci-dessus :

$\forall x \in ]-\infty\ ;\ 1[\ ;\ f(x) \geq \frac{1}{2}$. **Alors, $f$ admet un minimum sur $]-\infty\ ;\ 1[$ atteint en $f(0) = \frac{1}{2}$.** 0,5pt

B) On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 0$, où $y$ est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Résolvons $(E)$.

L'équation caractéristique de $(E)$: $r^2 + 2r + 1 = 0$

$r_0 = -1$

$\boldsymbol{y(x) = (Ax + B)e^{-x} \quad avec \quad A \in \mathbb{R}\ et\ B \in \mathbb{R}}$ 0,5pt

2) On considère les solution de $(E)$ dont la courbe représentative passe par le point $A\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

a) Montrons que ces solutions s'écrivent sous la forme $\left(ax + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$. On note $h_a(x) = \left(ax + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$ où $a$ est un réel.

la courbe représentative des solutions de (E) passe par le point $A\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ équivaut à : $y(0) = \frac{1}{2}$

$y(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (A(0) + B)e^0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{B = \frac{1}{2}}$

**D'où, les solutions de (E) s'écrivent sous la forme $\left(ax + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$ notée $h_a(x) = \left(ax + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$ où $a \in \mathbb{R}$** 0,5pt

b) Etudions le sens de variation de $h_a$ selon les valeurs de $a$ et montrons que pour tout réel $a \neq 0$, $h_a$ admet un extremum pour une valeur de $x$ que l'on déterminera en fonction de $a$.

$D_{h_a} = \mathbb{R} = ]-\infty\ ;\ +\infty[$

$\forall x \in ]-\infty\ ;\ +\infty[\ ;\ h'_a(x) = ae^{-x} - e^{-x}\left(ax + \frac{1}{2}\right) = \left(a - ax - \frac{1}{2}\right)e^{-x}$

$\boldsymbol{\forall x \in ]-\infty\ ;\ +\infty[\ ;\ h'_a(x) = \left(-ax + a - \frac{1}{2}\right)e^{-x}}$ 0,25pt

Le signe de $h'_a$ depend de celui de $-ax + a - \frac{1}{2}$

Posons : $-ax + a - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -ax = \frac{1}{2} - a \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{2a}$

**Pour $a = 0$ :**

$h'_0(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} < 0$. Pour tout $x$ réel.

**Pour $a = 0$, $h_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.** 0,25pt

**Pour $a > 0$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $1 - \frac{1}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'_a(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Pour $a > 0$ :**

**$\forall x \in \left]-\infty\ ;\ 1 - \frac{1}{2a}\right[\ ;\ h'_a(x) > 0$. Alors $h_a$ est strictement croissante sur $\left]-\infty\ ;\ 1 - \frac{1}{2a}\right[$.**

**$\forall x \in \left]1 - \frac{1}{2a}\ ;\ +\infty\right[\ ;\ h'_a(x) < 0$. Alors $h_a$ est strictement decroissante sur $\left]1 - \frac{1}{2a}\ ;\ +\infty\right[$.** 0,25pt

**$\forall x \in \left\{1 - \frac{1}{2a}\right\}\ ;\ h'_a(x) = 0$. Alors $h_a(x)$ est constante sur $\left\{1 - \frac{1}{2a}\right\}$**

**Pour $a < 0$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $1 - \frac{1}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'_a(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Pour $a > 0$ :**

**$\forall x \in \left]-\infty\ ;\ 1 - \frac{1}{2a}\right[\ ;\ h'_a(x) < 0$. Alors $h_a$ est strictement decroissante sur $\left]-\infty\ ;\ 1 - \frac{1}{2a}\right[$.**

**$\forall x \in \left]1 - \frac{1}{2a}\ ;\ +\infty\right[\ ;\ h'_a(x) > 0$. Alors $h_a$ est strictement croissante sur $\left]1 - \frac{1}{2a}\ ;\ +\infty\right[$.** 0,25pt

**$\forall x \in \left\{1 - \frac{1}{2a}\right\}\ ;\ h'_a(x) = 0$. Alors $h_a(x)$ est constante sur $\left\{1 - \frac{1}{2a}\right\}$**

**Pour tout réel $a \neq 0$ ; $h'_a(x)$ s'annule et change de signe pour $x = 1 - \frac{1}{2a}$. Alors $h_a$ admet un extremum au point d'abscisse $x = 1 - \frac{1}{2a}$ $tel\ que\ h_a\left(1 - \frac{1}{2a}\right) = ae^{-\left(1 - \frac{1}{2a}\right)}$** 0,25pt

c) On note $C_a$ la courbe représentative de $h_a$ et $S_a$ le point de $C_a$ correspont à l'extremum de $h_a$ ; vérifions que pour tout $a \neq 0$, $S_a$ est un point de la courbe $(\Gamma)$ de la partie A).

$S_a\left(1-\frac{1}{2a}\ ;\ h_a\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right)$

$h_a\left(1-\frac{1}{2a}\right)=\left[a\left(1-\frac{1}{2a}\right)+\frac{1}{2}\right]e^{-\left(1-\frac{1}{2a}\right)}=ae^{-\left(1-\frac{1}{2a}\right)}$ . D'où $\boldsymbol{S_a\left(1-\frac{1}{2a}\ ;\ ae^{-\left(1-\frac{1}{2a}\right)}\right)}$

$S_a$ est un point de la courbe $(\Gamma)$ ssi $f\left(1-\frac{1}{2a}\right)=ae^{-\left(1-\frac{1}{2a}\right)}$

Pour tout $x\neq 1$ par : $f(x)=\frac{e^{-x}}{2(1-x)}$

Pour tout $a\neq 0$ ; $f\left(1-\frac{1}{2a}\right)=\frac{e^{-\left(1-\frac{1}{2a}\right)}}{2\left(1-1+\frac{1}{2a}\right)}=\frac{e^{-\left(1-\frac{1}{2a}\right)}}{\frac{1}{a}}=ae^{-\left(1-\frac{1}{2a}\right)}$

**Pour tout $a\neq 0$ ; $f\left(1-\frac{1}{2a}\right)=ae^{-\left(1-\frac{1}{2a}\right)}$. Alors $S_a$ est un point de la courbe $(\Gamma)$ de la partie A).** **0,5pt**

3) Construisons das le plan muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ (unité 4cm) les courbes $C_a$ pour les valeurs suivantes de $\frac{1}{4}$ ; $-2$ ; $0$ ; $1$ *et* $2$.

$h_a(x)=\left(ax+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$ où $a$ est un réel.

$h_{\frac{1}{4}}(x)=\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$ ; $h_{-2}(x)=\left(-2x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$ ; $h_0(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$

$h_1(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$ et $h_2(x)=\left(2x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$

Tableau de variation :

**1) Pour $h_{\frac{1}{4}}(x)=\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'_{\frac{1}{4}}(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h_{\frac{1}{4}}(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\left(\frac{1}{4}e^{1}\right)$ | ↘ | $0$ |

**2) Pour $h_{-2}(x)=\left(-2x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{5}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'_{-2}(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| | $+\infty$ | ↘ | $\left(-2e^{-\frac{5}{4}}\right)$ | ↗ | $0$ |

$\left(C_{\frac{1}{4}}\right)\cap(Ox)=\{(-2\ ;\ 0\}$ ;

$\left(C_{\frac{1}{4}}\right)\cap(Oy)=\left\{(0\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$

$\left(C_{\frac{1}{4}}\right)$ admet une branche barabolique de direction $(Oy)$

$(C_{-2})\cap(Ox)=\left\{(\frac{1}{4}\ ;\ 0\right\}$

$(C_{-2})\cap(Oy)=\left\{(0\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$

$(C_{-2})$ admet une branche barabolique de direction $(Oy)$

**3) Pour $h_1(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'_1(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h_1(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ | ↘ | $0$ |

**4) Pour $h_2(x)=\left(2x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'_1(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h_1(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\left(2e^{-\frac{3}{4}}\right)$ | ↘ | $0$ |

$(C_1)\cap(Ox)=\left\{(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right\}$

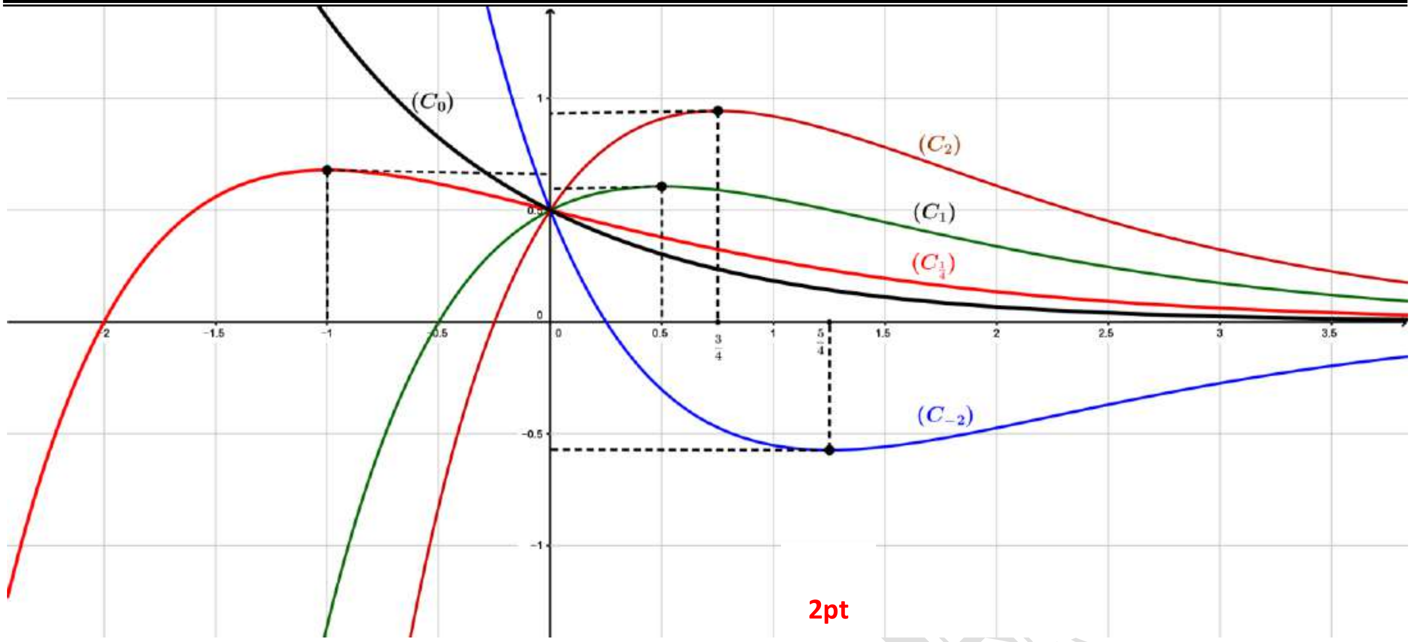
$(C_1)\cap(Oy)=\left\{(0\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$

$(C_1)$ admet une branche barabolique de direction $(Oy)$

$(C_2)\cap(Ox)=\left\{(-\frac{1}{4}\ ;\ 0\right\}$

$(C_2)\cap(Oy)=\left\{(0\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$

$(C_2)$ admet une branche barabolique de direction $(Oy)$




**2pt**

4) Soit $\lambda$ un réel supérieur à $-2$ ; on appelle $D_\lambda$ l'ensemble des points $M$ du plan limite par l'axe des abscisses, la courbe $C_{\frac{1}{4}}$ et la droite d'équation $x = \lambda$.

a) exprimons $I = \int_{-2}^{\lambda} h_{\frac{1}{4}}(t)\,dt$ en fonction de $\lambda$ ;

$I = \int_{-2}^{\lambda} h_{\frac{1}{4}}(t)\,dt = \int_{-2}^{\lambda} \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) e^{-x}\,dt$

Posons :

$u = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow u' = \frac{1}{4}$ et $v' = e^{-x} \Leftrightarrow v = -e^{-x}$

$$I = \int_{-2}^{\lambda} \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) e^{-x}\,dt = \left[-\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) e^{-x}\right]_{-2}^{\lambda} - \int_{-2}^{\lambda} -\frac{1}{4}e^{-x}\,dt$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-x} - \left[\frac{1}{4}e^{-x}\right]_{-2}^{\lambda}$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda} - \frac{1}{4}e^{-\lambda} + \frac{1}{4}e^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{-\lambda} + \frac{1}{4}e^{2}$$

$\boldsymbol{I = \frac{1}{4}\left[e^{2} - (\lambda + 3)e^{-\lambda}\right]}$ **0,5pt**

b) Soit $A(\lambda)$ la mesure de l'aire de $D_\lambda$ ; la limite de $A(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $\infty$ est :

$A(\lambda) = I \times ua = I \times 16\,cm^2 = 4\left[\boldsymbol{e^{2} - (\lambda + 3)e^{-\lambda}}\right]$ **cm²**

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 4e^2\,cm^2 \quad soit \quad \boldsymbol{\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 29,5\,cm^2}$ **0,5pt**

## Exercice 1 : 4,5 pts

1) On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+a}{2}$ avec $a$ un entier naturel non nul.

a) Démontrer que si $n$ est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n+1$ est la somme de deux carrés. 1pt

b) On pose $n = 3$ ; $4n+1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ?

Etudier la réciproque de la propriété a) 1pt

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\,)$, (unité graphique 4 cm) on considère la courbe $(C)$ d'équation $y^2 = x^2(1-x^2)$.

a) Préciser les éléments de symétrie de $(C)$. 1pt

b) Construire $(C)$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\,)$. 1,5pt

## Exercice 2 : 5,5 pts

1) Soit $f$ l'application affine du plan $P$ dans lui-même définie par son expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

a) Montrer que $f$ admet un seul point invariant $J$. 0,5pt

b) Montrer que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ où $M' = f(M)$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $f$. 1pt

c) Déterminer le centre et le rayon du cercle de $C'$ image de $C$ d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 1pt

2) On considère l'équation différentielle $(E)$: $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$.

a) Déterminer les réels $a,\ b\ et\ c$ pour que la fonction numérique $g$ définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation $(E)$ dans $\mathbb{R}$. 1,5pt

b) Résoudre l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$ ; puis en déduire les solutions de l'équation $(E)$.

## Problème : 10 pts

**Partie A :**

Soit $f$ la fonction numérique à variable réelle $x$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + \ln x$

1) a) Justifier l'existence d'un réel unique $\alpha$ compris entre $0,5\ et\ 1$ tel que $f(\alpha) = 0$ 1,5pt

b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$. 1pt

2) Soit la fonction $g$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$

Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x}f(x)$. En déduire le tableau de variation de $g$ 1,5pt

**Partie B :**

1) Montrer que le réel $\alpha$ définie dans la partie A) 1) a) est solution de l'équation $h(x) = x$, où $h$ est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x)$ 1pt

2) a) Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$. 0,5pt

b) Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$. 0,5pt

c) Calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$. 0,5pt

d) En déduire que, $\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ on a : $0 \le h'(x) \le 0,3$. 0,5pt

3) On définit la suite $(U_n)$ par $U_0 = 1\ et$, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel, $\frac{1}{2} \le U_n \le 1$, et que la suite $(U_n)$ est décroissante. 1pt

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - \alpha| \le (0,3) \times |U_n - \alpha|$ puis que $|U_n - \alpha| \le \frac{1}{2}(0,3)^{\,n}$. 1pt

c) En déduire que la suite $(U_n)$ converge vers $\alpha$. 0,5pt

d) Déterminer un entier $n_0$ tel que $U_{n_0}$ soit une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-5}$ près et indiquer la valeur de $U_{n_0}$ donnée par la calculatrice. (Avec 5 décimales). 0,5pt

## Exercice 1 : 4,5 pts

1) On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+a}{2}$ avec $a$ un entier naturel non nul.

a) Démontrons que si $n$ est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n+1$ est la somme de deux carrés.

Soit $\frac{a^2+a}{2}$ et $\frac{b^2+b}{2}$ deux nombres triangulaire avec $a \in \mathbb{N}^*$ ; $b \in \mathbb{N}^*$

$n = \frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2} = \frac{a^2+b^2+a+b}{2}$

| | |
|---|---|
| $4n+1 = 2a^2+2b^2+2a+2b+1$<br>$= 2(a^2+a)+2(b^2+b)+1$<br>$= 2\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+2\left[\left(b+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+1$<br>$= 2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(b+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1$<br>$= 2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(b+\frac{1}{2}\right)^2$<br>$\boldsymbol{4n+1 = \left[\sqrt{2}\left(a+\frac{1}{2}\right)\right]^2+\left[\sqrt{2}\left(b+\frac{1}{2}\right)\right]^2}$ | Ou encore<br>$4n+1 = 2a^2+2b^2+2a+2b+1$<br>$= (a^2+b^2)+(a^2+b^2)+2(a+b)+1$<br>$= (a^2+b^2)+(a+b)^2-2ab+2(a+b)+1$<br>$= (a^2-2ab+b^2)+[(a+b)^2+2(a+b)+1]$<br>$\boldsymbol{4n+1 = (a-b)^2+[(a+b)+1]^2}$ |

Conclusion

**Si $n$ est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n+1$ est la somme de deux carrés.** 1pt

b) On pose $n=3$ ; $4n+1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers

Pour $n=3$ on a : $4n+1 = 4(3)+1 = 13 = 4+9 = (2)^2+(3)^2$

**Pour $n=3$ on a : $4n+1 = (2)^2+(3)^2$. Alors $4n+1$ est la somme de deux carrés d'entiers pour $n=3$** 0,5pt

- Etudions la réciproque de la propriété a)

Pour cela, vérifions s'il existe des entiers naturels non nuls $a$ et $b$ tels $3 = \frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}$

$$\begin{cases} 4n+1 = (a-b)^2+[(a+b)+1]^2 \\ 4n+1 = 2^2+3^2 \end{cases} \Leftrightarrow (a-b)^2+[(a+b)+1]^2 = 2^2+3^2$$

Par identification :

$$\begin{cases} a-b=2 \\ a+b+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=2 \quad et \quad b=0 \notin \mathbb{N}^*$$

**Si $4n+1$ est la somme de deux carrés, alors $n$ n'est pas la somme de deux nombres triangulaires.**

**D'où la réciproque est fausse.** 0,5pt

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, (unité graphique 4 cm) on considère la courbe $(C)$ d'équation $y^2 = x^2(1-x^2)$.

a) Précisons les éléments de symétrie de $(C)$.

$y^2 = x^2(1-x^2) \Leftrightarrow y = f(x) = \sqrt{x^2(1-x^2)}$ $ou$ $y = f(x) = -\sqrt{x^2(1-x^2)}$

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}\ ;\ x(1-x^2) \geq 0\} \Leftrightarrow D_f = [-1\ ;\ 1]$

$\forall\, x \in [-1\ ;\ 1]$ $et$ $-x \in [-1\ ;\ 1]$ ; $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow$ **$(C)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** 1pt

b) Construire $(C)$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \sqrt{x^2(1-x^2)} \\ f_2(x) = -\sqrt{x^2(1-x^2)} \end{cases}$$

$(C) = (C_1) \cup (C_2)$.

On a : $f_1(x) = -f_2(x)$. Alors $(C_1)$ $et$ $(C_2)$ sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Construisons $(C_1)$ puis son symétrie $(C_2)$ par rapport à l'axe des abscisses.

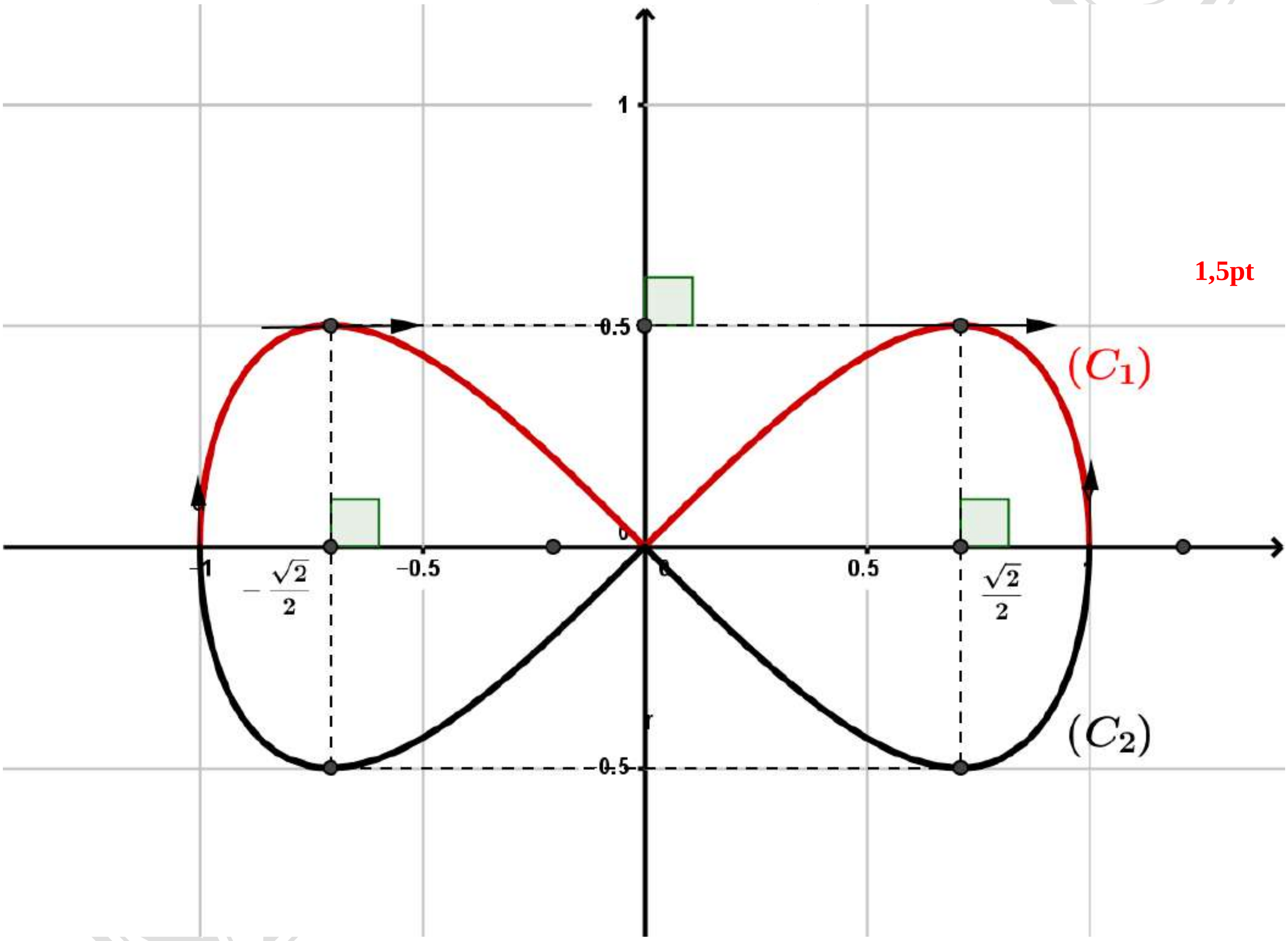
$\forall\, x \in ]-1\ ;\ 1[\ ;\ f_1{}'(x) = \frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}$

$\forall\, x \in ]-1\ ;\ 1[$ ; ; $x^2(1-x^2) > 0$. alors le signe de $f'(x)$ dépend du numérateur

Posons $x(1-2x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $ou$ $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $ou$ $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f_1(x)$ n'est pas dérivable à droite de $-1$ et à gauche de 1 et admet une demi tangente verticale en ces points.

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-2x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f_1{}'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\left(\frac{1}{2}\right)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\left(\frac{1}{2}\right)$ | $\searrow$ | $0$ |




**1,5pt**

## Exercice 2 : ______________________________ 5,5 pts

1) Soit $f$ l'application affine du plan $P$ dans lui-même définie par son expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

Soit $M\binom{x}{y}$ un point de $P$ et $M'\binom{x\prime}{y\prime}$ l'image de $M$ par $f$

a) Montrons que $f$ admet un seul point invariant $J$.

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2}x = 1 \\ y - \frac{1}{2}y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = 1 \\ \frac{1}{2}y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$

**Alors que $f$ admet un seul point invariant $J$ de coordonnée $(2\ ;\ -4)$.** **0,5pt**

b) Montrons que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ où $M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

$$\overrightarrow{JM'} = \begin{cases} x' - x_J = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = \frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{2}(x-2) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x - x_J}) \\ y' - y_J = \left(\frac{1}{2}y - 2\right) + 4 = \frac{1}{2}y + 2 = \frac{1}{2}(y+4) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{y - y_J}) \end{cases} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{JM}}$$

D'où : $\boldsymbol{\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}}$ **où** $\boldsymbol{M' = f(M)}$ **0,5pt**

Déduisons-en la nature et les éléments caractéristiques de $f$.

Par définition : $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ où $M' = f(M)$

**Alors $f$ est une homothétie de centre $J\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et de rapport $k = \frac{1}{2}$** **0,5pt**

c) Déterminons le centre et le rayon du cercle de $C'$ image de $C$ d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(x'-1) \\ y = 2(y'+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x' - 2 \\ y = 2y' + 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y = 0 &\Leftrightarrow (2x'-2)^2 + (2y'+4)^2 - 2(2y'+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x'^2 - 8x' + 4 + 4y'^2 + 16y' + 16 - 4y' - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x'^2 + 4y'^2 - 8x' + 12y' + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 2x' + 3y' + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x'^2 - 2x') + (y'^2 + 3y') + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow [(x'-1)^2 - 1] + \left[\left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\boldsymbol{x'} - \mathbf{1})^2 + \left(\boldsymbol{y'} + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$(\boldsymbol{C'})$ ***est*** **un cercle de centre $\left(1\ ;\ -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.** **1pt**

2) On considère l'équation différentielle $(E)$: $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$.

a) Déterminons les réels $a,\ b\ et\ c$ pour que la fonction numérique $g$ définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation $(E)$ dans $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ g'(x) = 2ax + b \quad et \quad g''(x) = 2a$

$g(x)$ est solution de $(E)$ ssi : $g''(x) - 3g'(x) + 2y = 8x^2 - 24x$

$g''(x) - 3g'(x) + 2y = 8x^2 - 24x$

$(2a) - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 8x^2 - 24x$

$2a - 6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 8x^2 - 24x$

$2ax^2 + (2b - 6a)x + 2a - 3b + 2c = 8x^2 - 24x$

Par identification :

$$\begin{cases} 2a = 8 \\ 2b - 6a = -24 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$$

$\boldsymbol{a = 4 \quad b = 0 \quad et \quad c = -4\ .\ Alors \quad g(x) = 4x^2 - 4}$ **est solution de l'équation $(E)$ dans $\mathbb{R}$.** **1,5pt**

b) Résolvons l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$ ; puis déduisons-en les solutions de l'équation $(E)$.

L'équation caractéristique de $(E)$ : $r^2 - 3r + 2 = 0$. Alors $r_1 = 1 \quad et \quad r_2 = 2$

$\boldsymbol{y = Ae^x + Be^{2x} \quad avec \quad A \in \mathbb{R}\ et\ b \in \mathbb{R}}$. **Solution de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$** **1pt**

Les solution de l'équation $(E)$ sont : $\boldsymbol{f(x) = Ae^x + Be^{2x} + 4x^2 - 4 \quad avec \quad A \in \mathbb{R}\ et\ b \in \mathbb{R}}$. **0,5pt**

## Problème : 10pts

**Partie A :**

Soit $f$ la fonction numérique à variable réelle $x$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + \ln x$

1) a) Justifions l'existence d'un réel unique $\alpha$ compris entre 0,5 $et$ 1 tel que $f(\alpha) = 0$

-Domaine de définition : $D_f = ]0\ ;\ +\infty[$

-Limite aux bornes de $D_f$ :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \ln 0^+ = -\infty \qquad et \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \ln(+\infty) = +\infty$

Dérivée et sens de variation :

$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$

$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) > 0$. Alors $f$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

-Tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $(0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**D'après le tableau de variation, $f$ est continue et strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ ; elle réalise une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ $vers$ $]-\infty\ ;\ +\infty[$.**

**Or $0 \in ]-\infty\ ;\ +\infty[$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in ]0\ ;\ +\infty[$. En plus :**

$$\begin{cases} f(0,5) = -0,44 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \ f(0,5) \times f(1) < 0.$$

1,5pt

**D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in ]0,5\ ;\ 1[ \subset ]0\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.**

b) Déterminons le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.

D'après le tableau de variation ci-dessus :

**Pour $x \in ]0\ ;\ \alpha]\ ;\ f(x) \leq 0$.** 1pt

**Pour $x \in [\alpha\ ;\ +\infty[\ ;\ f(x) \geq 0$.**

2) Soit la fonction $g$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$

Calculons $g'(x)$ et vérifions que $g'(x) = \frac{2}{x} f(x)$.

$\forall\ x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} \ln x = \frac{2x+2\ln x}{x}$

**$\forall\ x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) = \frac{2x+2\ln x}{x}$** 0,5pt

$\forall\ x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) = \frac{2x+2\ln x}{x} = \frac{2(x+\ln x)}{x} = \frac{2}{x}(x + \ln x) = \frac{2}{x} f(x)$

**D'où Pour tout $x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) = \frac{2}{x} f(x)$.** 0,5pt

Déduisons-en le tableau de variation de $g$

$\forall\ x \in ]0\ ;\ +\infty[$ ; le signe de $f'$ depend de celui de $f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = (0)^2 + (\ln 0^+)^2 = +\infty \qquad et \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = (+\infty)^2 + (\ln(+\infty))^2 = +\infty$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**0,5pt**

Partie B :

1) Montrons que le réel $\alpha$ définie dans la partie A) 1) a) est solution de l'équation $h(x) = x$, où $h$ est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x)$

L'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in [0{,}5\ ;\ 1]$ telle que $f(\alpha) = 0$ d'après A) 1) a).

$\alpha\ est$ solution de l'équation $h(x) = x$ si et seulement si $h(\alpha) = \alpha$.

$h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x) \Leftrightarrow \boldsymbol{h(x) = x - \frac{1}{4}f(x)}$

$h(\alpha) = \alpha - \frac{1}{4}f(\alpha) = \alpha - \frac{1}{4}(0) = \alpha \iff \boldsymbol{h(\alpha) = \alpha}$

**$\forall\, \alpha \in [0,5\ ;\ 1]\ ;\ \ h(\alpha) = \alpha$. Alors, réel $\alpha$ définie dans la partie A) 1) a) est solution de l'équation $h(x) = x$.** **1pt**

2) a) Calculons $h'(x)$ et étudions son signe sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

$\forall\, x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ h'(x) = 1 - \frac{1}{4}f'(x) = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{2x^2+1}{x}\right) = \frac{4x-2x^2-1}{4x} = \frac{-2x^2+4x-1}{4x}$

**$\forall\, x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ h'(x) = \frac{-2x^2+4x-1}{4x}$** **0,25pt**

Le signe de $h'$ dépend de celui de $-2x^2 + 4x - 1$

Posons $-2x^2 + 4x - 1 = 0\ \ ;\ \ x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\ \ et\ \ x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

| $x$ | $0$ | | $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$\forall\, x \in \left]\frac{2-\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right[\ ;\ h'(x) > 0$

**Par conséquent, $h'(x) > 0\ sur\ \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right] \subset \left]\frac{2-\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right[$.** **0,25pt**

b) Prouvons que $h\left(\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

$\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]\ ;\ h'(x) > 0$. Alors $h$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

$\boldsymbol{x \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow h\left(\frac{1}{2}\right) \leq h(x) \leq h(1)$ Car $h$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$

$\Leftrightarrow \frac{7+4\ln 2}{16} \leq h(x) \leq \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{7+4\ln 2}{16} \leq h(x) \leq 0{,}75 \leq 1$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{h(x) \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]}$

**D'où $h\left(\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$** **0,5pt**

c) Calculons $h''(x)$ et étudions son signe sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

$\forall\, x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ h'(x) = \frac{-2x^2+4x-1}{4x}$

**$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[;\ \ h''(x) = \frac{-2x^2+1}{4x^2}$** **0,25pt**

Posons $-2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ ou\ \ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

| $x$ | $0$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $-$ | $0$ $-$ |

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\ ;\ \boldsymbol{h''(x) > 0}$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \boldsymbol{1}\right]\ ;\ \boldsymbol{h''(x) < 0}$ **0,25pt**

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\ ;\ \boldsymbol{h''(x) = 0}$

d) Déduisons-en que, $\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ on a : $0 \leq h'(x) \leq 0{,}3$.

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h'(x)$ | $0{,}25$ | $\nearrow$ | $(0{,}29)$ | $\searrow$ | $0{,}25$ |

D'après le tableau de variation de $h'$ :

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]\ ;\ \boldsymbol{0{,}25 \leq h'(x) \leq 0{,}29 \Leftrightarrow 0 \leq 0{,}25 \leq h'(x) \leq 0{,}29 \leq 0{,}3}$

**D'où** $\forall\, \boldsymbol{x} \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ **on a :** $\boldsymbol{0 \leq h'(x) \leq 0{,}3}$. **0,5pt**

3) On définit la suite $(U_n)$ par $U_0 = 1\ et$, pour tout entier naturel $n,\ U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Montrons que, pour tout entier nature $\mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$, et que la suite $(U_n)$ est décroissante.

Montrons par récurrence :

Pour $n = 0\ ;\ U_0 = 1$ alors : $\frac{1}{2} \leq U_0 \leq 1$ est vraie

Pour $n = 1\ ;\ \ U_1 = h(U_0) = h(1) = \frac{3}{4}$ alors : $\frac{1}{2} \leq U_1 \leq 1$ est vraie

Supposons que pour tout entier nature l, $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ et montrons pour le rang $n + 1$.

$\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq h(U_n) \leq 1$ d'après 2) b)

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$ est vraie

**D'où pour tout entier nature l,** $\boldsymbol{\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1}$. **0,5pt**

Pour tout entier naturel n ;

$U_{n+1} - U_n = h(U_n) - U_n = \left[U_n - \frac{1}{4}(U_n^2 + \ln U_n)\right] - U_n = -\frac{1}{4}(U_n^2 + \ln U_n) \leq 0$

Car la fonction $f$ définie par $x^2 + \ln x$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$. **Donc** $U_n^2 + \ln U_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Pour tout entier naturel n,** $\boldsymbol{U_{n+1} - U_n \leq 0}$**. Alors la suite** $\boldsymbol{(U_n)}$ **décroissante.** **0,5pt**

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - \alpha| \leq (0{,}3) \times |U_n - \alpha|$ puis que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}3)^n$.

$*$ **Montrer que** $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{|U_{n+1} - \alpha| \leq (0{,}3) \times |U_n - \alpha|}$

$\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ on a : $0 \leq h'(x) \leq 0{,}3$ et $\forall\, \alpha \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]\ ;\ h(\alpha) = \alpha$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[\alpha\ ;\ x] \subset \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ à la fonction $h$ on a :

$0 \leq h'(x) \leq 0{,}3 \Leftrightarrow 0(x - \alpha) \leq h(x) - h(\alpha) \leq 0{,}3(x - \alpha)$

$\Leftrightarrow |h(x) - \alpha| \leq 0{,}3|x - \alpha|$

En posant $x = U_n \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ où $n \in \mathbb{N}$ on a :

$0 \leq h'(x) \leq 0{,}3 \Leftrightarrow |h(x) - \alpha| \leq 0{,}3|x - \alpha|$

$\Leftrightarrow |h(U_n)-\alpha| \leq 0{,}3|U_n-\alpha|$

$\Leftrightarrow |U_{n+1}-\alpha| \leq (0{,}3)\times|U_n-\alpha|$ car $U_{n+1}=h(U_n)$

**Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|U_{n+1}-\alpha| \leq (0,3)\times|U_n-\alpha|$.**

∗ **Montrer que** $\boldsymbol{pour\ tout\ n}\in\mathbb{N}$, $|U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}(0,3)^n$

Pour tout $k\in\mathbb{N}, on\ a : |U_{k+1}-\alpha| \leq 0{,}3|U_k-\alpha|$

En variant $k$ on obtient :

Pour $k=0$ : $|\cancel{U_1}-\alpha| \leq 0{,}3|U_0-\alpha|$

Pour $k=1$ : $|\cancel{U_2-\alpha}| \leq 0{,}3|\cancel{U_1-\alpha}|$

Pour $k=2$ : $|\cancel{U_3}-\alpha| \leq 0{,}3|\cancel{U_2}-\alpha|$

Pour $k=3$ : $|\cancel{U_4-\alpha}| \leq 0{,}3|\cancel{U_3-\alpha}|$

Pour $k=4$ : $|\cancel{U_5-\alpha}| \leq 0{,}3|\cancel{U_4-\alpha}|$

…………… ………… ………..

…………… ………… ……….

…………… ………… ……….

Pour $k=n-1$ : $|U_n-\alpha| \leq 0{,}3|\cancel{U_{n-1}-\alpha}|$

En multipliant membre à membre les deux termes de l'inégalité et en simplifiant, on obtient :

Donc : $|U_n-\alpha| \leq \underbrace{(0{,}3\times0{,}3\times0{,}3\times0{,}3\times\ldots\times0{,}3)}_{n\ fois}|U_0-\alpha|$

: $|U_n-\alpha| \leq (0{,}3)^n|U_0-\alpha|$

: $|U_n-\alpha| \leq (0{,}3)^n|1-\alpha|$

$\alpha$ étant élément de $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ ; on a :

$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1-1 \leq 1-\alpha \leq 1-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq 1-\alpha \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{|1-\alpha|} \leq \frac{1}{2}$

Alors : $|U_n-\alpha| \leq (0{,}3)^n|1-\alpha| \leq (0{,}3)^n\times\frac{1}{2}$

: $\boldsymbol{|U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}(0,3)^n}$ ***CQFD***

**D'où pour tout entier naturel $n$, $|U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}(0,3)^n$** **1pt**

c) Déduisons-en que la suite $(U_n)$ converge vers $\alpha$.

$\forall\, n\in\mathbb{N}\ ;\ \boldsymbol{|U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}(0,3)^n}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}(0{,}3)^n\right]=0$. *Aalors* $\lim\limits_{n\to+\infty}|U_n-\alpha|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha}$

**$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$. *alors* la suite $(U_n)$ converge vers $\alpha$** **0,5pt**

d) Déterminons un entier $n_0$ tel que $U_{n_0}$ soit une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-5}$ près et indiquer la valeur de $U_{n_0}$ donnée par la calculatrice. (Avec 5 décimales).

$U_{n_0}$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-5}$ près équivaut à : $|U_n-\alpha| \leq 10^{-5}$

$|U_{n_0}-\alpha| \leq 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(0{,}3)^{n_0} \leq 10^{-5} \Leftrightarrow (0{,}3)^{n_0} \leq 2\times10^{-5} \Leftrightarrow n_0 \geq \frac{\ln(2\times10^{-5})}{\ln(0{,}3)} \Leftrightarrow n_0 \geq 8{,}98$

**$U_{n_0}$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-5}$ près Pour $n_0=9$** **0,25pt**

$h$ est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x)=x-\frac{1}{4}(x^2+\ln x)$ et pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1}=h(U_n)$

| | | |
|---|---|---|
| $u_1=h(u_0)=h(1)=0{,}75$ | $u_2=h(u_1)=h(0{,}75)=0{,}68129\ldots$ | $u_3=h(u_2)=0{,}66119\ldots$ |
| $u_4=h(u_3)=0{,}65532\ldots$ | $u_5=h(u_4)=0{,}65361\ldots$ | $u_6=h(u_5)=0{,}65312\ldots$ |
| $u_7=h(u_6)=0{,}65297\ldots$ | $u_8=h(u_7)=0{,}65293\ldots$ | $\boldsymbol{u_9=h(u_8)=0,65292}\ldots$ |

**D'où $0,65292$ est la valeur de $U_9$ donnée par la calculatrice. (Avec 5 décimales).** **0,25pt**

## Exercice 1 : 5pts

On considère l'entier naturel $A$ qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1) Déterminer $x$ pour que :

a) A soit divisible par six ; 1pt

b) A soit divisible par cinq ; 1pt

c) En déduire qu'il existe $x$ tel que $A$ soit divisible par trente. 1pt

2) On donne à $x$ la valeur zéro, déterminer l'écriture décimale de $A$. Dans ce cas, quel est le nombre de diviseurs positifs de $A$ ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de $A$ qui sont premiers avec trois ? 2pts

## Exercice 2 : 5pts

On considère le nombre complexe $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $(i^2 = -1)$

1) a) Calculer $u^2$ $et$ $u^4$ 1,5pt

b) Calculer le module et un argument de $u^4$, en déduire le module et un argument de $u$. 1,5pt

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. A tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ du plan, on associe son affixe $Z = x + yi$.

Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan pour lesquels le module du produit $u \times Z$ égal à 8. 2pts

## Problème : 10 pts

1) Soit $P$ le polynôme tel que $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5$.

Vérifier que $P(x) = (x-1)(3x^2 + 5x + 5)$, puis étudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de $x$. 1pt

2) Soit $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3 + x^2 - 2 - 5\ln x$. Etudier les variations de $g$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$. 1pt

3) Soit la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 + 2x + \frac{14+10\ln x}{x}$

a) Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de $f$ et calculer les limites de $f$ aux bornes de $D_f$. 1pt

b) On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ avec $0{,}5\ cm$ en abscisse et $5\ cm$ sur l'axe des ordonnées. Etudier les branches infinies de $(C)$. 1pt

c) Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation. 1pt

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $[0{,}2\ ;\ 0{,}5]$ et donner une valeur approchée à $10^{-1}$ de $\alpha$. 1pt

e) Tracer $(C)$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ 1pt

f) Calculer $f(x) - (x^2 + 2x)$. 0,5pt

i) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - (x^2 + 2x)$. 0,5pt

ii) Etudier le signe de $f(x) - (x^2 + 2x)$. 0,5pt

iii) Donner une interprétation graphique des résultats de i) et ii) 0,5pt

g) On désigne par $P$ la parabole d'équation $y = x^2 + 2x$. Tracer $P$ dans le même repère que $(C)$. 1pt

## Exercice 1 : 5pts

On considère l'entier naturel $A$ qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1) a) Déterminons $x$ pour que A soit divisible par $six$

$$A = \overline{1x416}^{7} = 1\times 7^4 + x\times 7^3 + 4\times 7^2 + 1\times 7 + 6 \quad \text{avec} \quad 0\le x<7$$
$$= 2401 + 343x + 196 + 7 + 6$$
$$= 2610 + 343x$$

$\boldsymbol{A = 2610 + 343x}$

$A \equiv 0[6] \Leftrightarrow 2610 + 343x \equiv 0[6] \Leftrightarrow x \equiv 0[6] \Leftrightarrow x = 6k$

$0\le x<7 \Leftrightarrow 0\le 6k<7 \Leftrightarrow 0\le k<\frac{7}{6} \Leftrightarrow 0\le k<1{,}16 \Leftrightarrow k\in\{0\ ;\ 1\}$

$\boldsymbol{x = 0 \quad et \quad x = 6}$ **1pt**

b) Déterminons $x$ pour que A soit divisible par cinq ;

$A \equiv 0[5] \Leftrightarrow 2610 + 343x \equiv 0[5] \Leftrightarrow 3x \equiv 0[5] \Leftrightarrow x \equiv 0[5]$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow x = 0 \quad et \quad x = 5}$ **1pt**

c) Déduisons-en qu'il existe $x$ tel que $A$ soit divisible par trente.

Pour $x = 0$, $\begin{cases} A\equiv 0[6] \\ A\equiv 0[5]\end{cases} \Leftrightarrow A\equiv 0[30]$

**Alors $A$ est divisoble par trente pour $x = 0$** **1pt**

2) On donne à $x$ la valeur zéro,

- Déterminons l'écriture décimale de $A$.

$A = \overline{1x416}^{7} = 2610 + 343x$

Pour $x = 0$, on a : $\boldsymbol{A = 2610}$ Ecriture décimale de $A$. **1pt**

La décomposition de $A$ en produit de facteurs premiers nous donne : $\boldsymbol{A = 2\times 3^2\times 5\times 29}$

**- Le nombre de diviseurs positifs de $A$ est $nbr(D_A) = (1+1)(1+2)(1+1)(1+1) = 24$** **0,5pt**

L'ensemble des diviseurs positifs de $A$ qui sont premiers avec trois ?

$(2^0\ ;\ 2)(5^0\ ;\ 0)(29^0\ ;\ 29) = (1\ ;\ 2)(1\ ;\ 5)(1\ ;\ 29) = (1\ ;\ 5\ ;\ 2\ ;\ 10)(1\ ;\ 29)$
$= (1\ ;\ 5\ ;\ 2\ ;\ 10\ ;\ 29\ ;\ 145\ ;\ 58\ ;\ 290)$

$\boldsymbol{D_{A\ premiers\ avec\ 3} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 10\ ;\ 29\ ;\ 58\ ;\ 145\ ;\ 290\}}$ **0,5pt**

## Exercice 2 : 5pts

On considère le nombre complexe $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $(i^2 = -1)$

1) a) Calculons $u^2$ $et$ $u^4$

$$u^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 - 2i\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) - \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= 2-\sqrt{2} - 2i\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} - 2 - \sqrt{2}$$
$$= -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

$\boldsymbol{u^2 = -2\sqrt{2}(1+i)}$ **0,75pt**

$u^4 = (u^2)^2 = \left[-2\sqrt{2}(1+i)\right]^2 = 8(2i) = 16i \Leftrightarrow \boldsymbol{u^4 = 16i}$ **0,75pt**

b) Calculons le module et un argument de $u^4$, déduisons-en le module et un argument de $u$.

$u^4 = 16i \Leftrightarrow \boldsymbol{|u^4| = 16 \quad et \quad \arg(u^4) = \frac{\pi}{2}}$ **0,75pt**

$|u^4| = 16 \Leftrightarrow |u|^4 = 16 \Leftrightarrow |u| = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow \boldsymbol{|u| = 2}$

$\arg(u^4) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4\times\arg(u) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\arg(u) = \frac{\pi}{8}}$ **0,75pt**

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. A tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ du plan, on associe son affixe $Z = x + yi$.

Déterminons l'ensemble des points $M$ du plan pour lesquels le module du produit $u\times Z$ égal à 8.

$|u\times Z| = 8 \Leftrightarrow |u|\times|Z| = 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+y^2} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2+y^2 = 4^2}$

**L'ensemble des points $M$ cherchés est le cercle de centre $O(0\ ;\ 0)$ et rayon $r = 4$** **2pt**

## Problème : 10pts

1) Soit $P$ le polynôme tel que $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5$.

Vérifions que $P(x) = (x-1)(3x^2 + 5x + 5)$, puis étudions le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de $x$.

$$(x-1)(3x^2+5x+5) = 3x^3 + 5x^2 + 5x - 3x^2 - 5x - 5$$
$$= 3x^3 + 2x^2 - 5 = P(x)$$

**D'où $P(x) = (x-1)(3x^2+5x+5)$** 0,5pt

Posons $P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad ou \quad 3x^2 + 5x + 5 = 0$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$3x^2 + 5x + 5 = 0$

$\Delta = 25 - 60 = -35$

$x \in \mathbb{R},\ 3x^3 + 2x^2 - 5 > 0$, le signe de $P(x)$ dépend de celui de $x - 1$

Pour $x \in ]-\infty\ ;\ 1[\ ;\ P(x) < 0$
Pour $x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ P(x) > 0$
Pour $x \in \{1\}\ ;\ P(x) = 0$

0,5pt

2) Soit $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3 + x^2 - 2 - 5\ln x$. Etudions les variations de $g$ et déduisons-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

- Domaine de définition :

$D_g = ]0\ ;\ +\infty[$

- Limite aux bornes de $D_f$ :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + 5\frac{\ln x}{x^2}\right]\right. = +\infty$$

- Dérivée :

$$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) = 3x^2 + 2x - \frac{5}{x} = \frac{3x^3 + 2x^2 - 5}{x} = \frac{P(x)}{x}$$

- Sens de variation :

$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) = \frac{P(x)}{x}$. Son signe dépend de celui de $P(x)$.

**$\forall x \in ]0\ ;\ 1[\ ;\ g'(x) < 0$. Alors $g$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ 1[$**

**$\forall x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) > 0$. Alors $g$ est strictement croissante sur $]1\ ;\ +\infty[$**

**$\forall\ x \in \{1\}\ ;\ g'(x) = 0$. Alors $g$ est constante pour $x = 1$.**

Tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $(0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

0,5pt

Signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$

***Pour tout* $x \in ]0\ ;\ +\infty[\ \ ;\ \ g(x) \geq 0$** 0,5pt

3) Soit la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 + 2x + \frac{14 + 10\ln x}{x}$

a) Déterminons l'ensemble de définition $D_f$ de $f$ et calculons les limites de $f$ aux bornes de $D_f$.

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ x > 0\ et\ x \neq 0\} \quad \Leftrightarrow \quad$ **$D_f = ]0\ ;\ +\infty[$** 0,5pt

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left(x^2 + 2x + \frac{14 + 10\ln x}{x}\right) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty} \quad 0{,}25pt$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 + 2x + \frac{14}{x} + 10\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ **0,25pt**

b) On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ avec 0,5 $cm$ en abscisse et 5 $cm$ sur l'axe des ordonnées. Etudions les branches infinies de $(C)$.

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$. **Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe $(C)$ en $-\infty$.** **0,5pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Il y a posibilité d'asymptote oblique.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + 2 + \frac{14}{x^2} + 10\frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty.$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}}$. ***Alors $(C)$ admet une branche parabolique de direction $(Oy)$.*** **0,5pt**

c) Etudions les variations de $f$ et dressons son tableau de variation.

- les variations de $f$ :

$f(x) = x^2 + 2x + \frac{14+10\ln x}{x}$

$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) = 2x + 2 + \frac{\frac{10}{x}.x - 14 - 10\ln x}{x^2} = \frac{2x^2+2x+10-14-10\ln x}{x^2} = \frac{2x^3+2x^2-4-10\ln x}{x^2} = \frac{2(x^3+x^2-2-5\ln x)}{x^2}$

$\boldsymbol{\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

$\boldsymbol{\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) \geq 0}$. ***Alors $f$ est croissante sur*** $]0\ ;\ +\infty[$. **0,5pt**

**Tableau de variation de $f$ :**

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $(0)$ | $+\infty$ |

**0,5pt**

d) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $[0{,}2\ ;\ 0{,}5]$ et donnons une valeur approchée à $10^{-1}$ de $\alpha$.

D'après le tableau de variation :

***f* est continue et strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ ; elle réalise une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ vers $]-\infty\ ;\ +\infty[$.**
**0 étant élément de l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in ]0\ ;\ +\infty[$.**

**En plus :**

$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{f(0{,}2) = -10{,}13} \\ \boldsymbol{f(0{,}5) = 15{,}39} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(0{,}2) \times f(0{,}5) < 0}$. ***Donc*** $\boldsymbol{\alpha \in [0{,}2\ ;\ 0{,}5] \subset ]0\ ;\ +\infty[}$ **0,75pt**

**D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $[0{,}2\ ;\ 0{,}5]$.**

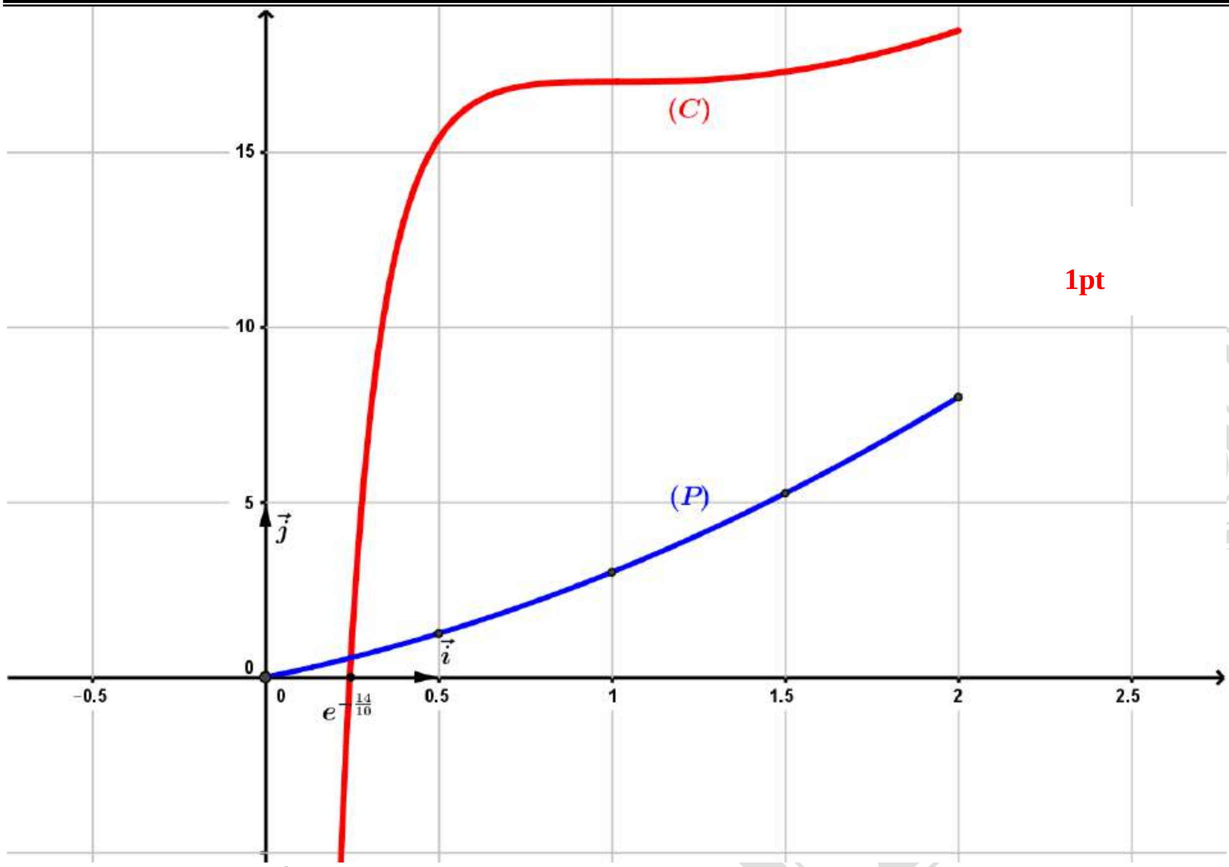
Valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ : par balayage

| $x$ | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -10,13 | 7,22 | 13,05 | 15,39 |

$f(0{,}2) \times f(0{,}3) < 0.$ *Alors* $0{,}2 < \alpha < 0{,}3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{0{,}2+0{,}3}{2} = 0{,}25$

**Ainsi, 0,2 est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près par defaut.** **0,25pt**

e) Traçons $(C)$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$




**1pt**

f) Calculons $f(x)-(x^2+2x)$.

$f(x)-(x^2+2x)=\left(x^2+2x+\frac{14+10\ln x}{x}\right)-(x^2+2x)=\frac{14+10\ln x}{x}$

$\boldsymbol{f(x)-(x^2+2)=\frac{14+10\ln x}{x}}$ **0,5pt**

i) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)-(x^2+2)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x^2+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{14+10\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{14}{x}+10\frac{\ln x}{x}\right)=0$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x^2+2)]=0}$ **0,5pt**

ii) Etudions le signe de $f(x)-(x^2+2x)$.

Posons : $f(x)-(x^2+2x)=0\Leftrightarrow 14+10\ln x\Leftrightarrow \ln x=-\frac{14}{10}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{14}{10}}$

$\boldsymbol{\forall x\in\left]0\ ;\ e^{-\frac{14}{10}}\right]\ ;\ f(x)-(x^2+2x)\le 0}$ **0,25pt**

$\boldsymbol{\forall x\in\left[e^{-\frac{14}{10}}\ ;\ +\infty\right[\ ;\ f(x)-(x^2+2x)\ge 0.}$ **0,25pt**

iii) Donnons une interprétation graphique des résultats de i) et ii)

De i) :

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x^2+2)]=0.}$ ***Alors la courbe de la fonction définie par $x\mapsto x^2+2x$ est asymptote à $C$*** **0,25pt**

De ii) :

$\boldsymbol{f(x)-(x^2+2x)\le 0}$ ***sur*** $\boldsymbol{\left]0\ ;\ e^{-\frac{14}{10}}\right]}$. **Alors la courbe représentative $(C)$ *de* $f$ est en dessous de celle de la fonction $x\mapsto x^2+2x$ sur $\left]0\ ;\ e^{-\frac{14}{10}}\right]$.**

**0,25pt**

$\boldsymbol{f(x)-(x^2+2x)\ge 0}$ ***sur*** $\boldsymbol{\left[e^{-\frac{14}{10}}\ ;\ +\infty\right[}$. **Alors la courbe représentative $(C)$ *de* $f$ est au-dessus de celle de la fonction $x\mapsto x^2+2x$ sur $\left[e^{-\frac{14}{10}}\ ;\ +\infty\right[$.**

g) On désigne par $P$ la parabole d'équation $y=x^2+2x$. Traçons $P$ dans le même repère que $(C)$. (voir figure) **1p**

## Exercice 1 : 3pts

1) $z$ *étant* un nombre complexe, on considère l'équation $(E)$ : $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$.

a) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de $(E)$. **0,5pt**

b) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de $(E)$ sous forme algébrique. **1pt**

2) *Soit* ABCD

Un carré du plan.

a) Ecrire $A$ comme barycentre des points $B,\ C\ et\ D$ (On précisera les coefficients). **0,5pt**

b) Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = \vec{0}$ **1pt**

## Exercice 2 : 5,5pts

1) On considère la suite $(U_n)$ définie par, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 3 \end{cases}$

a) Préciser le sens de variation de la suite $(U_n)$. **0,5pt**

b) Démontrer que pour tout naturel $n,\ U_n > n^2$ ; en déduire la limite de la suite $(U_n)$. **1pt**

c) Conjecturer une expression de $U_n$ en fonction de $n$ puis démontrer la propriété ainsi conjecturée. **1pt**

2) Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

$a)\ (n+1)! \geq \sum_{i=1}^{n} i\,!$ **1pt** ; $b)\ \sum_{i=1}^{n} i \times i\,! = (n+1)! - 1$ **1pt**

NB : $n$ ! désigne factorielle $n$.

3) Un ouvrier dispose d'une plaque de métal rectangulaire de 110 cm de longueur sur 88 cm de largeur. Il veut découper dans cette plaque des carrés tous identiques, les plus grands possible, de façon à ne pas avoir de perte.

a) Déterminer la longueur du côté du carré qui convient. **0,5pt**

b) Déterminer le nombre de carrés qu'il pourra découper dans de métal. **0,5pt**

## Problème : 11,5pts

**Partie A :**

Soit $f$ la fonction numérique à variable réelle $x$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x}\ln x$

1) Déterminer la fonction dérivée de $f$ et vérifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$ **0,75pt**

2) a) Etudier les variations de $g$ et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ comprise entre

$\frac{3}{2}\ et\ 2.$ **1pt**

b) Quel est le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]0\ ;\ \alpha[\ et\ ]\alpha\ ;\ +\infty[$. **0,5pt**

3) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ en encadrement de $f(\alpha)$. **0,75pt**

4) Achever l'étude de la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ **1pt**

**Partie B :**

1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où $h$ est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$ **0,5pt**

2) a) Calculer $h'(x)$ et vérifier que $\forall\ x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\ on\ a :\ -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$.

En déduire qu'il existe un réel $k \in [0\ ;\ 1]$ tel que : $\forall\ x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\ ;\ |h'(x)| \leq k$ **1pt**

b) Prouver que pour tout couple de réels $(x\ ;\ y)$ choisis dans $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ on a : $|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$. **0,5pt**

3) Soit $(U_n)$ la suite définie par $U_0 = 2\ et\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ U_n \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$. **0,5pt**

b) En appliquant à $(U_n\ ;\ \alpha)$ l'inégalité établie dans 2) b), prouver que : $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ |U_{n+1} - \alpha| \leq k\,|U_n - \alpha|$. **0,5pt**

c) En déduire par un raisonnement par récurrence l'inégalité :

$\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ |U_n - \alpha| \leq k^n\,|U_0 - \alpha|$ et montrer que la suite $(U_n)$ est convergente. Quelle est la limite ? **0,5pt**

4) Montrer en utilisant les variations de $h$ que $U_{n+1} - \alpha$ et $U_n - \alpha$ sont de signe contraires. En déduire que $\alpha$ est compris entre $U_n\ et\ U_{n+1}$. **1pt**

Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$. **0,5pt**

**Partie C :**

On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et deux fois dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ solutions de l'équation différentielle $(E)$ : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.

1) a) Vérifier que la fonction $f$ définie dans la partie $A$) est une solution de $(E)$. **0,5pt**

b) Résoudre l'équation différentielle $(E')$ : $y'' + 3y' + 2y = 0$. **0,75pt**

2) a) soit $g$ une fonction deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Montrer que $g$ une solution de $(E)$ si et seulement si $g - f$ est une solution de $(E')$. **0,75pt**

b) En déduire toutes les solutions de $(E)$. **0,5pt**

## Exercice 1 : 3pts

1) $z\ \acute{e}tant$ un nombre complexe, on considère l'équation $(E)$ : $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$.

a) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de $(E)$.

U est une solution si et seulement si : $u^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$

$$u^4 = (\sqrt{2} + i)^4 = (\sqrt{2})^4 + 4(\sqrt{2})^3(i) + 6(\sqrt{2})^2(i)^2 + 4(\sqrt{2})(i)^3 + (i)^4$$
$$= 4 + 8\sqrt{3}\,i - 12 - 4i\sqrt{2} + 1$$
$$= -7 + 8i\sqrt{3}$$

$\boldsymbol{u^4 = (\sqrt{2} + i)^4 = -7 + 8i\sqrt{3}.\ Alors\ u = \sqrt{2} + i}$ **est une solution de** $\boldsymbol{(E)}$ **0,5pt**

b) Déterminons sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité.

Soit $z = x + yi\ tel\ que:\ z^4 = 1 \Leftrightarrow [r^4\ ;\ 4\theta] = [1\ ;\ 2k\pi]$

$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \Leftrightarrow z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ avec $k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$

Pour $k = 0$, on a :

$z_0 = \cos\left(\frac{(0)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{(0)\pi}{2}\right) = \cos(0) + i\sin(0) \Leftrightarrow \boldsymbol{z_0 = 1}$

Pour $k = 1$, on a :

$z_1 = \cos\left(\frac{(1)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{(1)\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{z_1 = i}$

Pour $k = 2$, on a :

$z_2 = \cos\left(\frac{(2)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{(2)\pi}{2}\right) = \cos(\pi) + i\sin(\pi) \Leftrightarrow \boldsymbol{z_2 = -1}$

Pour $k = 3$, on a :

$z_3 = \cos\left(\frac{(3)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{(3)\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{z_1 = -i}$

**Les racines quatrièmes de l'unité sont :** $\boldsymbol{\{1\ ;\ i\ ;\ -1\ ;\ -i\}}$ **0,5pt**

- Déduisons-en dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de $(E)$ sous forme algébrique.

$(E):\ z^4 = -7 + 4i\sqrt{2} \Leftrightarrow z^4 = u^4 \Leftrightarrow \frac{z^4}{u^4} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{u}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow Z^4 = 1\quad avec\ Z = \frac{z}{u}$

D'après b) : $Z_0 = 1\ ;\ Z_1 = i\ ;\ Z_2 = -1$ et $Z_3 = -i$

Retour :

$Z_0 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{u} = 1 \Leftrightarrow z = u \Leftrightarrow \boldsymbol{z = \sqrt{2} + i}$

$Z_1 = i \Leftrightarrow \frac{z}{u} = i \Leftrightarrow z = u.i \Leftrightarrow \boldsymbol{z = -1 + \sqrt{2}i}$

$Z_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{z}{u} = -1 \Leftrightarrow z = -u \Leftrightarrow \boldsymbol{z = -\sqrt{2} - i}$

$Z_3 = -i \Leftrightarrow \frac{z}{u} = -i \Leftrightarrow z = -u.i \Leftrightarrow \boldsymbol{z = 1 - \sqrt{2}i}$

$\boldsymbol{S = \{\sqrt{2} + i\ ;\ -1 + \sqrt{2}i\ ;\ -\sqrt{2} - i\ ;\ 1 - \sqrt{2}i\}}$ **0,5pt**

2) $Soit$ ABCD Un carré du plan.

a) Ecrivons $A$ comme barycentre des points $B,\ C\ et\ D$ (On précisera les coefficients).

ABCD Un carré si et seulement si : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

On sait que :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ en fixant $B$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$\boldsymbol{ABCD}$ **Un carré si et seulement si :** $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}}$**. Alors** $\boldsymbol{A}$ **est le barycentre des points** $\boldsymbol{B,\ C\ et\ D}$ **affectés aux coefficients** $\boldsymbol{1\ ;\ -1\ et\ 1}$**. Autrement dit :** $\boldsymbol{A = bary\{(B\ ;\ 1)\ ;\ (C\ ;\ -1)\ ;\ (D\ ;\ 1)\}}$ **0,5pt**

b) Déterminons et construire l'ensemble des points $M$ du plan tels que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = \vec{0}$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$ fixons A

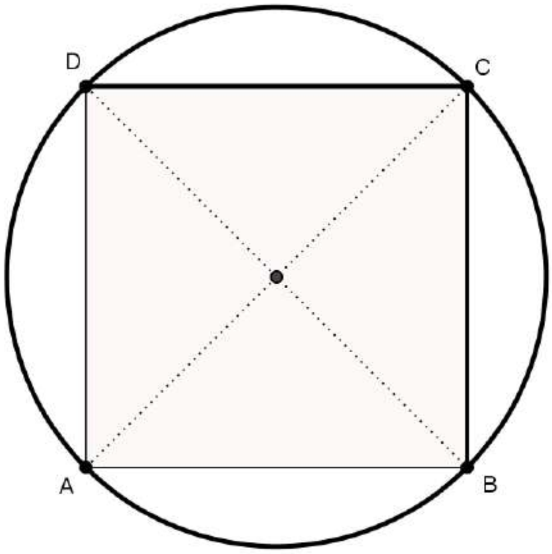
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\vec{0} \qquad \text{car} \quad \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

$\boldsymbol{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}^2=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\vec{0}}$

**Alors l'ensemble des points $M$ cherchés est le cercle de diamètre $[AC]$.** 0,5pt




0,5pt

## Exercice 2 :________________________________________________5,5pts

1) On considère la suite $(U_n)$ définie par, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 3 \end{cases}$

a) Précisons le sens de variation de la suite $(U_n)$.

$U_{n+1} - U_n = (U_n + 2n + 3) - U_n = 2n + 3 > 0 \ \ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$

**$\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; $U_{n+1} - U_n > 0$. Alors la suite $(U_n)$ est strictement croissante.** 0,5pt

b) Démontrons que pour tout naturel $n$, $U_n > n^2$ ; en déduire la limite de la suite $(U_n)$.

Démontrons par récurrence que pour tout naturel $n$, $P_n$ : $U_n > n^2$

Pour $n = 0$ on a : $\boldsymbol{P_0}$ : $U_0 > \mathbf{0}^2 \Leftrightarrow \mathbf{1 > 0}$ **vraie (1)**

Supposons que pour tout naturel $n, P_n$ est vraie. C'est-à-dire : $U_n > n^2$

Et montrons pour $P_{n+1}$. C'est-à-dire : $U_{n+1} > (n+1)^2$

$U_{n+1} = U_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$

Or $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad n^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2 = (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$

$U_{n+1} = U_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3 > (n+1)^2$

$\boldsymbol{U_{n+1} > (n+1)^2}$ **est vraie. (2) CQFD**

**(1) et (2) $\Leftrightarrow$ pour tout naturel $n$, $U_n > n^2$.** 0,5pt

$\boldsymbol{Pour\ tout\ naturel\ n\ ;\ U_n > n^2 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad alors \quad \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$ 0,5pt

c) Conjecturons une expression de $U_n$ en fonction de $n$ puis démontrons la propriété ainsi conjecturée.

Pour tout naturel $n$ ; $U_n > n^2$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; $(n+1) > n \Leftrightarrow (n+1)^2 = n^2$

$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{U_n > n^2} \\ \boldsymbol{(n+1)^2 > n^2} \end{matrix}\right\} \boldsymbol{par\ conjecture : U_n = (n+1)^2}$ 0,5pt

Démontrons la propriété ainsi conjecturée :

$\forall\, k \in \mathbb{N} : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{k+1} = U_k + 2k + 3 \end{cases}$

Pour $k = 0$ on a : $\cancel{U_1} = U_0 + 3$

Pour $k = 1$ on a : $\cancel{U_2} = \cancel{U_1} + 5$

Pour $k = 2$ on a : $\cancel{U_3} = \cancel{U_2} + 7$

Pour $k = 3$ on a : $\cancel{U_4} = \cancel{U_3} + 9$

Pour $k = 4$ on a : $\cancel{U_5} = \cancel{U_4} + 11$

… … … … …

… … … … …

… … … … …

Pour $k = n - 1$ on a : $U_n = \cancel{U_{n-1}} + 2(n-1) + 3$

En ajoutant membre à membre les termes des égalités, on a :

$U_n = U_0 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 2n + 1$

$U_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 2n + 1$

$U_n$ est la somme des $n+1$ terme consécutives d'une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

$U_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n) = \frac{n+1}{2}(1 + 2n + 1) = \frac{n+1}{2}(2n+2) = (n+1)^2$

**D'où $\boldsymbol{U_n = (n+1)^2}$. Expression de $\boldsymbol{U_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$** **0,5pt**

2) Démontrons par récurrence les propriétés suivantes :

$a)\ (n+1)! \geq \sum_{i=1}^{n} i\,! \iff 1! + 2! + 3! + \cdots + n! \leq (n+1)!$

- Initialisation :

Pour $n = 1$, on a :

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{(n+1)! = (1+1)! = 2} \\ \boldsymbol{\sum_{i=1}^{1} i\,! = 1! = 1} \end{matrix}\right\} \iff \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} i\,! \leq (n+1)!} \quad \boldsymbol{vraie}$$

- Transmission :

*Supposons que pour tout entier naturel non nul $P_n$ est vraie. C'est-à-dire* :

$1! + 2! + 3! + \cdots + n! \leq (n+1)!$

*Et montrons pour $P_{n+1}$. C'est-à-dire* : $1! + 2! + 3! + \cdots + n! + (n+1)! \leq (n+2)!$

$1! + 2! + 3! + \cdots + n! + (n+1)! \leq (n+1)! + (n+1)!$ Par hypothèse

Or $(n+1)! + (n+1)! = 2(n+1)! = 2(n+1)n! \leq (n+2)(n+1)n! \iff \boldsymbol{(n+1)! + (n+1)! \leq (n+2)!}$

Donc :

$1! + 2! + 3! + \cdots + n! + (n+1)! \leq (n+1)! + (n+1)! \leq (n+2)!$

$\boldsymbol{1! + 2! + 3! + \cdots + n! + (n+1)! \leq (n+2)!}$ ***est* Vraie**

- Conclusion :

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^* ; \quad \boldsymbol{1! + 2! + 3! + \cdots + n! \leq (n+1)! \iff (n+1)! \geq \sum_{i=1}^{n} i\,!}$$ **1pt**

$b)\ \sum_{i=1}^{n} i \times i\,! = (n+1)! - 1 \iff 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$

- Initialisation :

Pour $n = 1$ on a :

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{\sum_{i=1}^{1} i \times i\,! = 1 \times 1! = 1} \\ \boldsymbol{(n+1)! - 1 = (1+1)! - 1 = 1} \end{matrix}\right\} \iff \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} i \times i\,! = (n+1)! - 1} \quad \boldsymbol{vraie}$$

- Transmission :

Supposons que pour tout entier $n \geq 1$, $P_n$ est vraie. C'est-à-dire : $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$ et montrons pour $P_{n+1}$. C'est-à-dire : $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)! - 1$.

$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)!$ Par hypothèse

$= (1 + n + 1)(n+1)! - 1$

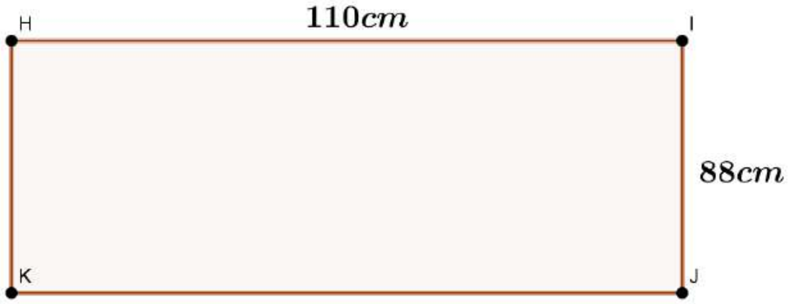
$= (n+2)(n+1)! - 1$

$\mathbf{1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)(n+1)! - 1}$ **est vraie**

- Conclusion :

$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^* \;;\; \mathbf{1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1} \iff \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{i \times i\,! = (n+1)! - 1}$ **1pt**

3) Un ouvrier dispose d'une plaque de métal rectangulaire de 110 cm de longueur sur 88 cm de largeur.




Il veut découper dans cette plaque des carrés tous identiques, les plus grands possible, de façon à ne pas avoir de perte.

a) Déterminons la longueur du côté du carré qui convient.

$L = PGCD(110 \;;\; 88) = ?$

$110 = 2 \times 5 \times 11 \quad et \quad 88 = 2^2 \times 11 \quad alors \quad PGCD(110 \;;\; 88) = 22$

**La longueur du côté du carré qui convient est $\boldsymbol{L = 22\ cm}$** **0,5pt**

b) Déterminons le nombre de carrés qu'il pourra découper dans de métal.

$N_C = \frac{Aire}{L^2} = \frac{110 \times 88}{22^2} = 20$

**Le nombre de carrés qu'il pourra découper dans de métal est $\boldsymbol{N_C = 20}$** **0,5pt**

## Problème : ______________________________ 11,5pts

**Partie A :**

Soit $f$ la fonction numérique à variable réelle $x$ définie sur $]0 \;;\; +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x} \ln x$

1) Déterminer la fonction dérivée de $f$ et vérifions que $f'(x)$ a même signe que $g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$

$\forall\, x \in ]0 \;;\; +\infty[ \;;\; f'(x) = -e^{-x} \ln x + \frac{1}{x} e^{-x} = \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right) e^{-x}$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in ]\mathbf{0} \;;\; +\infty[ \;;\; \boldsymbol{f'(x) = \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right) e^{-x} = g(x) e^{-x}}$ **0,75pt**

$\forall\, \boldsymbol{x} \in ]\mathbf{0} \;;\; +\infty[ \;;\; \boldsymbol{e^{-x} > 0}$. **Alors le signe $\boldsymbol{f'(x)}$ dépend du signe de $\boldsymbol{g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}}$**

2) a) Etudions les variations de $g$ et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ comprise entre $\frac{3}{2}$ $et$ $2$.

$g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$

- Domaine de définition :

$D_g = ]0 \;;\; +\infty[$

- Limite aux borne de $D_g$ :

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\ln(0^+) + \frac{1}{0^+} = +\infty \iff \lim_{x \to 0^+} \boldsymbol{g(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\ln(+\infty) + \frac{1}{+\infty} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$

- Dérivée :

$\forall\, x \in\, ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{-x-1}{x^2} = -\frac{x+1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{g'(x) = -\frac{x+1}{x^2}}$

- Sens de variation :

$\boldsymbol{\forall\, x \in\, ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ g'(x) = -\frac{x+1}{x^2} < 0}$. **Alors $g$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.**

Tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | $-$ | | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $(0)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**0,5pt**

- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ comprise entre $\frac{3}{2}$ $et$ $2$.

$g$ $est$ continue et strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ ; elle réalise une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ vers $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

Or $\boldsymbol{0} \in\, ]-\infty\ ;\ +\infty[$. **Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in\, ]0\ ;\ +\infty[$ . (1)**

En plus :

$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{g\left(\frac{3}{2}\right) = 0,26} \\ \boldsymbol{g(2) = -0,19} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{g\left(\frac{3}{2}\right) \times g(2) < 0} \quad \boldsymbol{D'après\, le\, théorème\, des\, valeurs\, intermédiaires, on\ a: \frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2.}$ **(2)**

**$(1)$ $et$ $(2)$ $\Leftrightarrow$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ comprise entre $\frac{3}{2}$ $et$ $2$** **0,5pt**

b) Le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]0\ ;\ \alpha[$ $et$ $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

$*$ $\boldsymbol{g(x) 0\ sur\ l'intervalle\ ]0\ ;\ \alpha[}$

$*$ $\boldsymbol{g(x) < 0\ sur\ l'intervalle\ ]\alpha\ ;\ +\infty[}$ **0,5pt**

3) Vérifions que $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduisons de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ en encadrement de $f(\alpha)$.

D'après 2) a). L'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ comprise entre $\frac{3}{2}$ $et$ $2$ tel que $g(\alpha) = 0$.

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\ln\alpha + \frac{1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}$ (1)

$f(\alpha) = e^{-\alpha}\ln\alpha = e^{-\alpha} \times \frac{1}{\alpha}$ d'après (1)

$\boldsymbol{f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}}$ **0,5pt**

$\frac{3}{2} < \alpha < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < -\alpha < -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2} < e^{-\alpha} < e^{-\frac{3}{2}}$ (I)

$\frac{3}{2} < \alpha < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha} < \frac{2}{3}$ (II)

$(I) \times (II) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2} \times \frac{1}{2} < e^{-\alpha} \times \frac{1}{\alpha} < e^{-\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{e^{-2}}{2} < \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} < \frac{2e^{-\frac{3}{2}}}{3}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{e^{-2}}{2} < f(\alpha) < \frac{2e^{-\frac{3}{2}}}{3}}$ **0,25pt**

4) Achevons l'étude de la fonction $f$ et traçons sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

$f(x) = e^{-x}\ln x$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = e^0 \ln 0^+ = -\infty \quad et \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad la\ fonction\ exponentielle\ croix\ plus\ vite\ que\ ln.$

$\forall\, x \in\, ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) = -e^{-x}\ln x + \frac{1}{x}e^{-x} = \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)e^{-x} = g(x).e^{-x}$

$\forall\, x \in \left]0\ ;\ +\infty\right[\ ;\ e^{-x} > 0$. Le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$.

- Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $0$ |

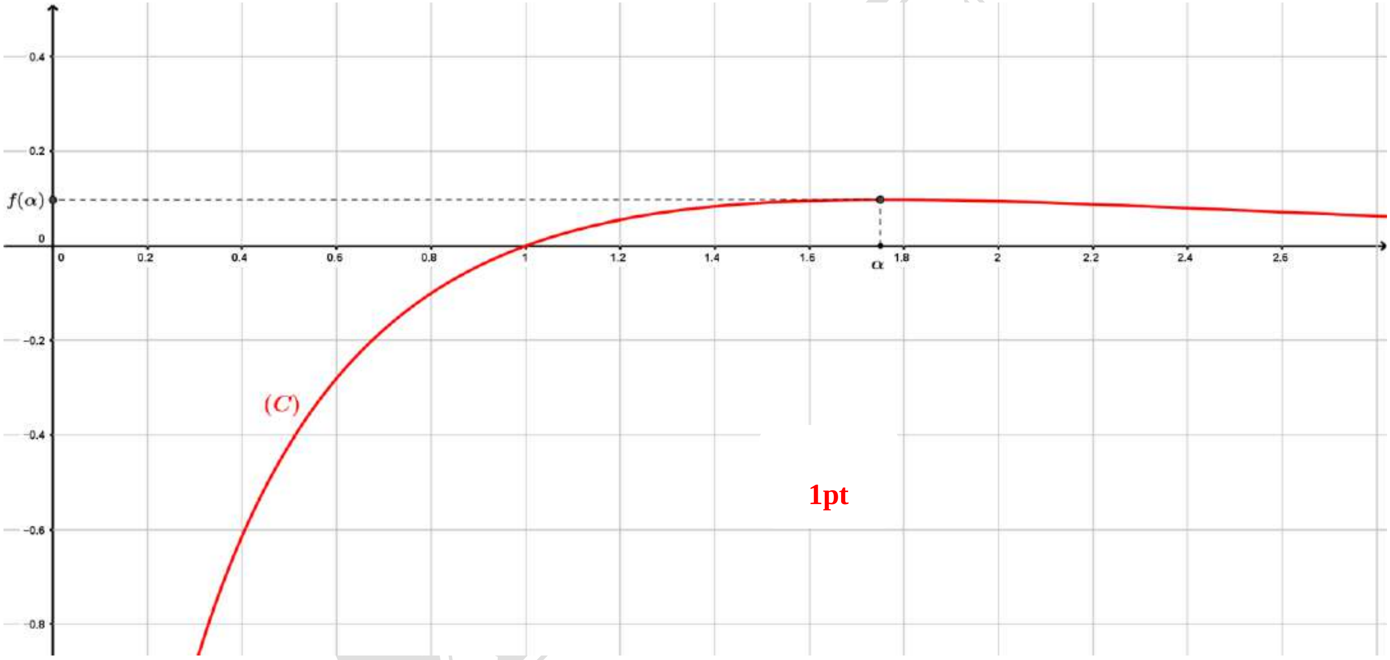
- Points d'intersection de $(C_f)$ avec l'axe des abscisse :

$(C_f) \cap (Ox) : f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{(C_f) \cap (Ox) = \{(1\ ;\ 0)\}}$

- La valeur approchée de $\alpha\ \ et\ \ f(\alpha)$ :

$\frac{3}{2} < \alpha < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75 \qquad$ et $\qquad f(\alpha) = \frac{e^{-1{,}75}}{1{,}75} = 0{,}1$

Courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$:




**Partie B :**

1) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où $h$ est la fonction définie sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$ par : $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = h(x)} \quad avec\ \ h(x) = e^{\frac{1}{x}}\ \ pour\ tout\ x > 0$$

**D'où l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$.** **0,5pt**

2) a) Calculons $h'(x)$ et vérifions que $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\ \ on\ a :\ -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \le h'(x) \le -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$.

$\boldsymbol{\forall\ x \in \left]0\ ;\ +\infty\right[\ ;\ h'(x) = -\frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}}$ **0,5pt**

$\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\ \ on\ \ a :\ \frac{3}{2} < x < 2 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < \frac{2}{3} \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{e^{\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{2}{3}}} \qquad (1)$

$\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\ \ on\ a: \frac{3}{2} < x < 2 \iff \frac{9}{4} < x^2 < 4 \iff \frac{1}{4} < \frac{1}{x^2} < \frac{4}{9}$ (2)

$$\times\begin{cases} e^{\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{4} < \frac{1}{x^2} < \frac{4}{9} \end{cases}$$

$e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{4} < e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2} < e^{\frac{2}{3}} \times \frac{4}{9} \iff \frac{1}{4}.e^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}} < \frac{4}{9}.e^{\frac{2}{3}} \iff \boldsymbol{-\frac{4}{9}.e^{\frac{2}{3}} < h'(x) < -\frac{1}{4}.e^{\frac{1}{2}}}$

**D'où pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ *on a* : $-\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$** **0,25pt**

Déduisons-en qu'il existe un réel $k \in [0\ ;\ 1]$ tel que : $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\ ;\ |h'(x)| \leq k$

$\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\ \ on\ a:\ -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}} \iff |h'(x)| \leq \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \iff |h'(x)| \leq k \quad avec\ \ k = \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \in [0\ ;\ 1]$

**Alors il existe un réel $k = \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \in [0\ ;\ 1]$ tel que : $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\ ;\ |h'(x)| \leq k$** **0,25pt**

b) Prouvons que pour tout couple de réels $(x\ ;\ y)$ choisis dans $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ on a : $|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$.

$\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\ ;\ |h'(x)| \leq k$

En appliquant l'inégalité des accroissement finis sur l'intervalle $[x\ ;\ y] \subset \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ a la fonction $h$ on a :

$\boldsymbol{\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\ ;\ |h'(x)| \leq k \iff |h(y) - h(x)| \leq k|y - x| \iff |h(x) - h(y)| \leq k|x - y|}$

**Alors pour tout couple de réels $(x\ ;\ y)$ choisis dans $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ on a : $|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$** **0,5pt**

3) Soit $(U_n)$ la suite définie par $U_0 = 2\ \ et\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}\ ;\ U_n \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$.

Montrons par récurrence :

- Initialisation :

Pour $n = 0$ on a : $\boldsymbol{U_0 = 2 \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]}$ **vraie**

Pour $n = 1$ on a : $U_1 = h(U_0) = h(2) = e^{\frac{1}{2}} = 1{,}64 \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right] \iff \boldsymbol{U_1 \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]}$ **vraie** **(1)**

- Transmission :

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; supposons $P_n$ vraie. C'est-à-dire $U_n \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ ; et montrons pour le rang $(n+1)$. C'est-à-dire $U_{n+1} \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$

$U_{n+1} = h(U_n) = U_n \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ . D'après partie B : 1)

Alors : $\boldsymbol{U_{n+1} \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]}$ **est vraie (2)**

Conclusion :

**(1) et (2) entraine que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ ;\ U_n \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$** **0,5pt**

b) En appliquant à $(U_n\ ;\ \alpha)$ l'inégalité établie dans 2) b), prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ ;\ |U_{n+1} - \alpha| \leq k\,|U_n - \alpha|$.

Dans 2) b) pour tout couple de réels $(x\ ;\ y)$ choisis dans $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ on a : $|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$

Alors pour tout couple de réels $(U_n\ ;\ \alpha)$ choisis dans $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ on a : $|h(U_n) - h(\alpha)| \leq k|U_n - \alpha|$

Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; $U_{n+1} = h(U_n)\quad et\quad h(\alpha) = \alpha$. Alors :

$\boldsymbol{|h(U_n) - h(\alpha)| \leq k|U_n - \alpha| \iff |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|}$

**Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ ;\ |U_{n+1} - \alpha| \leq k\,|U_n - \alpha|$** **0,5pt**

c) Déduisons-en par un raisonnement par récurrence l'inégalité : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ ;\ |U_n - \alpha| \leq k^n\,|U_0 - \alpha|$

Soit la proposition $P_n$: $|U_n - \alpha| \leq k^n\,|U_0 - \alpha|$

- Initialisation :

Pour $n = 0$ on a :

$\boldsymbol{P_0 : |U_0 - \alpha| \leq k^0 |U_0 - \alpha| \iff |U_0 - \alpha| \leq |U_0 - \alpha| \ vraie}$ **(1)**

- Transmission :

Pour tout entier $n \geq 0$, supposons $P_n$ vraie(C'est-à-dire $|U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|$) et montrons pour $P_{n+1}$(C'est-à-dire $|U_{n+1} - \alpha| \leq k^{n+1} |U_0 - \alpha|$).

$|U_{n+1} - \alpha| \leq k\ |U_n - \alpha|$ . D'après b)

$|U_{n+1} - \alpha| \leq k\ \boldsymbol{|U_n - \alpha|} \leq k \times \boldsymbol{k^n |U_0 - \alpha|}$ par hypothèse

$\boldsymbol{|U_{n+1} - \alpha| \leq k^{n+1}|U_0 - \alpha| \ \ Vraie.}$ **(2)**

- Conclusion :

**(1) et (2)** $\boldsymbol{\iff \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ |U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|}$ **0,25pt**

- Montrer que la suite $(U_n)$ est convergente. Quelle est la limite ?

$\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n - \alpha| = 0 \quad car \quad \lim\limits_{n\to+\infty} (k^n |U_0 - \alpha|) = 0 \ puisque \ k \in [0 \ ; \ 1]$

$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n - \alpha| = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha. Alors\ la\ suite\ (U_n)\ est\ convergente\ et\ sa\ limite\ est\ \alpha.}$ **0, 25pt**

4) Montrons en utilisant les variations de $h$ que $U_{n+1} - \alpha$ et $U_n - \alpha$ sont de signe contraires.

$\forall \ x \in ]0 \ ; +\infty[ \ ; \ h'(x) = -\frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}} < 0$. **Alors** h est strictement décroissante.

$*$ Si $U_n - \alpha > 0$ on a :

$U_n - \alpha > 0 \iff U_n > \alpha \iff h(U_n) < h(\alpha)$ car $h$ est strictement décroissante.

$\iff U_{n+1} < \alpha$ car $U_{n+1} = h(U_n)$ et $h(\alpha) = \alpha$

$\iff U_{n+1} - \alpha < 0$

$\boldsymbol{U_n - \alpha > 0 \iff U_{n+1} - \alpha < 0}$. **Alors** $\boldsymbol{U_{n+1} - \alpha}$ **et** $\boldsymbol{U_n - \alpha}$ **sont de signe contraires**

$*$ Si $U_n - \alpha < 0$ on a :

$U_n - \alpha < 0 \iff U_n < \alpha \iff h(U_n) > h(\alpha)$ car $h$ est strictement décroissante. **0,5pt**

$\iff U_{n+1} > \alpha$ car $U_{n+1} = h(U_n)$ et $h(\alpha) = \alpha$

$\iff U_{n+1} - \alpha > 0$

$\boldsymbol{U_n - \alpha < 0 \iff U_{n+1} - \alpha > 0}$. **Alors** $\boldsymbol{U_{n+1} - \alpha}$ **et** $\boldsymbol{U_n - \alpha}$ **sont de signe contraires**

- Déduisons-en que $\alpha$ est compris entre $U_n \ et \ U_{n+1}$.

Pour :

$$\boldsymbol{\left.\begin{array}{r} U_n - \alpha > 0 \iff U_n > \alpha \\ U_{n+1} - \alpha < 0 \iff \alpha > U_{n+1} \end{array}\right\} \iff U_{n+1} < \alpha < U_n}$$

Pour : **0,5pt**

$$\boldsymbol{\left.\begin{array}{r} U_n - \alpha < 0 \iff U_n < \alpha \\ U_{n+1} - \alpha > 0 \iff U_{n+1} > \alpha \end{array}\right\} \iff U_n < \alpha < U_{n+1}}$$

- Donnons un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

D'après partie A : 2) a) . L'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ comprise entre $\frac{3}{2} \ et \ 2$

Par balayage : $g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$

| $x$ | 1,5 | 1,6 | **1,7** | **1,8** | 1,9 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0,15 | 0,66 | 1,86 | −0,03 | − | − |

$\boldsymbol{g(1,7) \times g(1,8) < 0 \iff 1,6 < \alpha < 1,7}$

| $x$ | 1,71 | 1,72 | 1,73 | 1,74 | 1,75 | **1,76** | **1,77** | 1,78 | 1,79 | 1,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0,05 | 0,0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,002 | −0,006 | − | − | − |

$\boldsymbol{g(1,76) \times g(1,77) < 0 \iff 1,76 < \alpha < 1,77}$

**Alors,** $\boldsymbol{1,76 < \alpha < 1,77}$ **est l'encadrement de** $\boldsymbol{\alpha}$ **d'amplitude** $\boldsymbol{10^{-2}}$. **0,5pt**

**Partie C :**

On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et deux fois dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ solutions de l'équation différentielle $(E)$ : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.

1) a) Vérifions que la fonction $f$ définie dans la partie $A$) est une solution de $(E)$.

$f(x) = e^{-x}\ln x$ *est* solution de $(E)$ si et seulement si : $f'' + 3f' + 2f = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$

$f(x) = e^{-x}\ln x \Leftrightarrow f'(x) = \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)e^{-x} \Leftrightarrow f''(x) = \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)e^{-x}$

$$\begin{aligned} f'' + 3f' + 2f &= \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)e^{-x} + 3\left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)e^{-x} + 2e^{-x}\ln x \\ &= \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x - 3\ln x + \frac{3}{x} + 2\ln x\right)e^{-x} \\ &= \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}\right)e^{-x} \\ &= \left(\frac{-2x-1+3x}{x^2}\right)e^{-x} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{f'' + 3f' + 2f = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{-x}}$**. D'où $\boldsymbol{f}$ définie dans la partie $\boldsymbol{A}$) est une solution de $(\boldsymbol{E})$.** 0,5pt

b) Résolvons l'équation différentielle $(E')$ : $y'' + 3y' + 2y = 0$.

$EC : r^2 + 3r + 2r = 0$

$b = a + c \Leftrightarrow r_1 = -1 \quad ou \quad r_2 = -2$

Alors $\boldsymbol{y = Ae^{-x} + Be^{-2x} \quad avec\ A \in \mathbb{R}\ \ et\ \ B \in \mathbb{R}}$ 0,75pt

2) a) soit $g$ une fonction deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Montrons que $g$ une solution de $(E)$ si et seulement si $g - f$ est une solution de $(E')$.

- Supposons $g$ une solution de $(E)$ (c'est-à-dire $g'' + 3g' + 2g = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$) et montrons que $g - f$ est solution de $(E')$.

$$\begin{aligned} (g-f)'' + 3(g-f)' + 2(g-f) &= g'' - f'' + 3g' - 3f' + 2g - 2f \\ &= (g'' + 3g' + 2g) - (f'' + 3f' + 2f) \\ &= \frac{x-1}{x^2}e^{-x} - \frac{x-1}{x^2}e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{(g-f)'' + 3(g-f)' + 2(g-f) = 0}$ **. Alors $\boldsymbol{g - f}$ est une solution de $(\boldsymbol{E'})$. (1)**

- Supposons que $g - f$ est une solution de $(E')$ ($c'est-à-dire\ (g-f)'' + 3(g-f)' + 2(g-f) = 0$) et montrons que $g$ une solution de $(E)$.

$$\begin{aligned} (g-f)'' + 3(g-f)' + 2(g-f) = 0 &\Leftrightarrow g'' - f'' + 3g' - 3f' + 2g - 2f = 0 \\ &\Leftrightarrow (g'' + 3g' + 2g) - (f'' + 3f' + 2f) = 0 \\ &\Leftrightarrow (g'' + 3g' + 2g) - \frac{x-1}{x^2}e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow g'' + 3g' + 2g = \frac{x-1}{x^2}e^{-x} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{g'' + 3g' + 2g = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}}$**. Alors $\boldsymbol{g}$ solution de $(\boldsymbol{E})$ (2)**

**(1) et (2) $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{g}$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $\boldsymbol{g - f}$ est une solution de $(\boldsymbol{E'})$.** 0,75pt

b) Déduisons-en toutes les solutions de $(E)$.

$g - f = Ae^{-x} + Be^{-2x} \Leftrightarrow g(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + f(x) \Leftrightarrow g(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$

**D'où $\boldsymbol{g(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \frac{x-1}{x^2}e^{-x} \quad avec\ A \in \mathbb{R}\ \ et\ \ B \in \mathbb{R}}$** 0,5pt

# Baccalauréat Malien : Session de juin 2010 (SET – MTI – MTGC)

## Exercice 1 : 5pts

On considère l'équation d'inconnue complexe $z$, $(E) : z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0$

1) Montrer que l'équation $(E)$ admet une solution imaginaire pure $z_0$ que l'on déterminera. **1pt**

2) Montrer que l'équation $(E)$ admet une solution réelle que l'on déterminera. **1pt**

3) Achever la résolution dans $\mathbb{C}$ des nombres complexe de l'équation $(E)$. **1pt**

4) En désignant par $z_1$ la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par $z_2$ la solution réelle et par $z_3$ la 4ème solution de $(E)$, montrer que $z_0,\ z_1,\ z_2,\ et\ z_3$ sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison. **1pt**

5) Donner le module et un argument de chacun des solutions de $(E)$. **1pt**

## Exercice 2 : 5pts

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. On sésigne par $S$ la réflexion d'axe la droite $(D)$ d'équation $y = x$ et par $\sigma$ la réflexion d'axe $(O\ ;\ \vec{i})$.

1) Soit $M$ un point du plan et $M_1$ son image par $S$ ; on pose $M' = \sigma(M_1)$

a) Calculer les coordonnées $x'\ et\ y'$ de $M'$ en fonction des coordonnées $x\ et\ y$ de $M$. **1,5pt**

b) Caractériser la transformation qui fait passer de $M$ à $M'$. **1pt**

c) Au point $M(x\ ;\ y)$ on associe maintenant le point $N(X\ ;\ Y)$ telles que : $\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$

Montrer que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre $\Omega$ et l'angle $\theta$. **1pt**

2) Le point $M$ d'écrivant la droite d'équation $y = x$, déterminer l'ensemble décrit par $N$. Quel est l'ensemble décrit par le milieu du bipoint $M\ ;\ N)$? **1,5pt**

## Problème : 10pts

**Partie A :**

Soit $g$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminer la limite de $g$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. **0,5pt**

2) Etudier le sens de variation de $g$ puis dresser son tableau de variation. **1pt**

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 en est une. **0,5pt**

b) L'autre solution est appelé $\alpha$. Montrer que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$. **0,5pt**

4) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réels $x$. **1pt**

**Partie B :**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

1) Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre $e^{2x}$ en facteur pour calculer la limite en $+\infty$). **0,5pt**

2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)\ et\ g(x)$ ont le même signe ($g$ étant la fonction définie dans la partie A). Etudier le sens de variation de $f$. **1pt**

3) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2 + 2\alpha)}{4}$ où $\alpha$ est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie A.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$. **1,5pt**

4) Etablir le tableau de variation de $f$. **0,5pt**

5) Tracer la courbe $(C)$ représentant les variations de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm). **1pt**

**Partie C :**

Pour tout entier naturel $n$, on note $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\,dx$.

1) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$. **0,5pt**

2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2}$. **1pt**

3) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $|I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. $|I_n|$ désigne la valeur absolue de $I_n$. **0, 5pt**

NB : La partie C) est indépendante des parties A) et B)

## Exercice 1 : 5pts

On considère l'équation d'inconnue complexe $z$, $(E):\ z^4+5z^3+(11-3i)z^2+(10-10i)z-8i=0$

1) Montrons que l'équation $(E)$ admet une solution imaginaire pure $z_0$ que l'on déterminera.

$z_0$ est une solution imaginaire pure de (E) si et seulement si, il existe un réel $b$ tel que $z_0=bi$ vérifie l'équation $(E)$.

$(E):\ {z_0}^4+5{z_0}^3+(11-3i){z_0}^2+(10-10i)z_0-8i=0$

$:\ (bi)^4+5(bi)^3+(11-3i)(bi)^2+(10-10i)(bi)-8i=0$

$:\ b^4-5b^3i-11b^2+3b^2i+10bi+10b-8i=0$

$:\ (b^4-11b^2+10b)+(-5b^3+3b^2+10b-8)i=0$

Par identification :

$$\begin{cases} b^4-11b^2+10b=0 & (1)\\ -5b^3+3b^2+10b-8=0 & (2)\end{cases}$$

$(1):\ b^4-11b^2+10b=0 \Leftrightarrow b(b^3-11b+10)=0 \Leftrightarrow b=0\ \ ou\ \ b^3-11b+10=0.$

1 est une solution évidente de l'équation $b^3-11b+10=0$. En utilisant le tableau d'Horner, on a :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | $-11$ | 10 |
| 1 | | 1 | 1 | $-10$ |
| | 1 | 1 | $-10$ | 0 |

Alors, $b^3-11b+10=0 \Leftrightarrow (b-1)(b^2+b-10)=0$

L'équation (1) a pour solution :

$x=0\ \ ou\ \ x=1\ \ ou\ \ x=\frac{-1-\sqrt{41}}{2}\ \ ou\ \ x=\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$

Seul $x=1$ est solution de l'équation (2) : $-5b^3+3b^2+10b-8=0$

**Alors $z_0=i$ est une solution imaginaire pure de l'équation (E).** **1pt**

2) Montrons que l'équation $(E)$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

(E) admet une solution réel si et seulement si, il existe un réel $a$ tel que $z=a$ vérifie l'équation $(E)$.

$(E):\ z^4+5z^3+(11-3i)z^2+(10-10i)z-8i=0$

$:\ (a)^4+5(a)^3+(11-3i)(a)^2+(10-10i)(a)-8i=0$

$:\ a^4+5a^3+11a^2-3a^2i+10a-10ai-8i=0$

$:\ (a^4+5a^3+11a^2+10a)+(-3a^2+10a-8)i=0$

Par identification :

$$\begin{cases} a^4+5a^3+11a^2+10a=0 & (1)\\ -3a^2-10a-8=0 & (2)\end{cases}$$

$(2):-3a^2-10a-8=0$

$\Delta'=25-24=1$ alors $a=-2\ \ ou\ \ a=-\frac{4}{3}$

Vérifions $a=-2$ dans (1) :

$(-2)^4+5(-2)^3+11(-2)^2+10(-2)=0 \Leftrightarrow 16-40+44-20=0 \Leftrightarrow 0=0$ vraie

**Alors, l'équation $(E)$ admet une solution réelle $z=-2$** **1pt**

3) Achevons la résolution dans $\mathbb{C}$ des nombres complexe de l'équation $(E)$.

$(E):\ (z+2)(z-i)(az^2+bz+c)=0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 5 | $11-3i$ | $10-10i$ | $-8i$ |
| $i$ | | $i$ | $-1+5i$ | $-2+10i$ | $8i$ |
| | 1 | $5+i$ | $10+2i$ | 8 | 0 |
| $-2$ | | $-2$ | $-6-2i$ | $-8$ | |
| | 1 | $3+i$ | 4 | 0 | |

$(E):\ (z+2)(z-i)(z^2+(3+i)z+4)=0$

Posons : $z^2+(3+i)z+4=0$

$\Delta=(3+i)^2-4(1)(4)=9+6i-1-16=6i-8$

Trouvons $u=x+yi$ tels que : $u^2=-8+6i$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & (1) \\ x^2-y^2=-8 & (2) \\ 2xy=6 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Leftrightarrow 2x^2=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Dans (3) :

$x=1 \Leftrightarrow y=3 \quad ; \quad x=-1 \Leftrightarrow y=-3$

$$u=1+3i \quad ou \quad u=-1-3i$$

$z_1=\frac{-3-i-1-3i}{2(1)}=\frac{-4-4i}{2}=-2-2i$ et $z_2=\frac{-3-i+1+3i}{2(1)}=\frac{-2+2i}{2}=-1+i$

**$S=\{i \ ; \ -2 \ ; \ -2-2i \ ; \ -1+i\}$.** **1pt**

4) En désignant par $z_1$ la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par $z_2$ la solution réelle et par $z_3$ la 4ème solution de $(E)$, montrons que $z_0, \ z_1, \ z_2, \ et \ z_3$ sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

$z_0=i \quad ; \quad z_1=-1+i \quad ; \quad z_2=-2 \quad ; \quad z_3=-2-2i$

$z_0, \ z_1, \ z_2, \ et \ z_3$ sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si, il existe un $q\in\mathbb{C}$ tel que : $\frac{z_1}{z_0}=\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_3}{z_2}=q$

$\frac{z_1}{z_0}=\frac{-1+i}{i}=1+i \quad ; \quad \frac{z_2}{z_1}=\frac{-2}{-1+i}=\frac{-2(-1-i)}{2}=1+i \quad ; \quad \frac{z_3}{z_2}=\frac{-2-2i}{-2}=1+i$

**D'où, $\frac{z_1}{z_0}=\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_3}{z_2}=1+i$. Alors $z_0, \ z_1, \ z_2, \ et \ z_3$ sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $1+i$.** **1pt**

5) Donnons le module et un argument de chacun des solutions de $(E)$.

**$z_0=i \ \ alors \ \ |z_0|=1 \quad et \quad \arg(z_0)=\frac{\pi}{2}$**

**$z_1=-1+i \ \ alors \ \ |z_1|=\sqrt{2} \quad et \quad \arg(z_1)=\frac{3\pi}{4}$** **1pt**

**$z_2=-2 \ \ alors \ \ |z_2|=2 \quad et \quad \arg(z_2)=\pi$**

**$z_1=-2-2i \ \ alors \ \ |z_1|=2\sqrt{2} \quad et \quad \arg(z_1)=-\frac{3\pi}{4}$**

## Exercice 2 :______________________________5pts

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O \ ; \ \vec{i} \ ; \ \vec{j})$. On sésigne par $S$ la réflexion d'axe la droite $(D)$ d'équation $y=x$ et par $\sigma$ la réflexion d'axe $(O \ ; \ \vec{i})$.

1) Soit $M$ un point du plan et $M_1$ son image par $S$ ; on pose $M'=\sigma(M_1)$

a) Calculons les coordonnées $x' \ et \ y'$ de $M'$ en fonction des coordonnées $x \ \ et \ \ y$ de $M$.

Soit $M_1(x_1 \ ; \ y_1)$ et $\vec{u}(1 \ ; \ 1)$ un vecteur directeur de la droite (D) : $y=x$

$M_1=S(M)$ et $M'=\sigma(M_1)$

$$M_1=S(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM_1}.\vec{u}=\vec{0} \\ I \text{ milieu du segment } [MM_1] \text{ et } I\in(D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \binom{x_1-x}{y_1-y}.\binom{1}{1}=\vec{0} \Leftrightarrow x_1-x+y_1-y=\vec{0} \\ \frac{x_1+x}{2}=\frac{y_1+y}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+y_1=x+y & (1) \\ x_1-y_1=-x+y & (2) \end{cases}$$

(1)+(2) $\Leftrightarrow 2x_1=2y \Leftrightarrow x_1=y$

(1)-(2) $\Leftrightarrow \ 2y_1=2x \Leftrightarrow y_1=x$

$$M_1=S(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y \\ y_1=x \end{cases}$$

$$M'=\sigma(M_1) \Leftrightarrow z'=\overline{z_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x_1 \\ y'=-y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x_1=y \\ y'=-y_1=-x \end{cases}$$

**$\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \end{cases}$ sont les coordonnées $x' \ et \ y'$ de $M'$ en fonction des coordonnées $x \ \ et \ \ y$ de $M$.** **1,5pt**

b) Caractériser la transformation qui fait passer de $M$ à $M'$.

$$i\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y & (1) \\ y'i = -xi & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Leftrightarrow x' + y'i = y - xi \Leftrightarrow x' + y'i = -i(x + yi) \Leftrightarrow \boldsymbol{z' = -iz}$

$\boldsymbol{z' = az + b \ \ avec \ \ a = -i \ \ et \ \ b = 0}$**. la transformation qui fait passer de $\boldsymbol{M}$ à $\boldsymbol{M'}$ est une rotation.**

**De centre d'affixe $\boldsymbol{z_\Omega = \frac{b}{1-a} = 0}$**

**D'angle $\boldsymbol{arg\,(a) = -\frac{\pi}{2}}$** **1pt**

c) Au point $M(x\ ;\ y)$ on associe maintenant le point $N(X\ ;\ Y)$ telles que : $\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$

Montrer que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre $\Omega$ et l'angle $\theta$.

$$i\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 + y & (1) \\ Yi = i - xi & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Leftrightarrow X + Yi = -i(x + yi) + 1 + i \Leftrightarrow \boldsymbol{Z' = -iz + 1 + i}$

$Z' = az + b \ \ avec \ \ a = -i \ \ et \ \ b = 1 + i$

$\boldsymbol{a \in \mathbb{C} \ \ et \ \ |a| = 1}$**. Alors cette transformation est une rotation**

**De centre l'affixe $\boldsymbol{Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1+i} = 1}$** **1pt**

**D'angle $\boldsymbol{\arg(a) = -\frac{\pi}{2}}$**

2) Le point $M$ d'écrivant la droite d'équation $y = x$, déterminons l'ensemble décrit par $N$.

$\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - Y \\ y = X - 1 \end{cases}$ Alors :

$y = x \Leftrightarrow X - 1 = 1 - Y \Leftrightarrow X + Y - 2 = 0$

**D'où l'ensemble décrit par $\boldsymbol{N}$ est la droite d'équation $\boldsymbol{(\Delta) :\ \ X + Y - 2 = 0}$.** **1pt**

- L'ensemble décrit par le milieu du bipoint $M\ ;\ N)$ Est

$y = x \Leftrightarrow \frac{Y+y}{2} = \frac{X+x}{2} \Leftrightarrow Y + y = X + x \Leftrightarrow Y + (X - 1) = X + (1 - Y) \Leftrightarrow Y + X - 1 = X + 1 - Y$

$\Leftrightarrow Y - 1 = 1 - Y \Leftrightarrow 2Y = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{Y = 1}$

**Le le milieu du bipoint $\boldsymbol{(M\ ;\ N)}$ d'écrit la droite d'équation $\boldsymbol{Y = 1}$** **0,5pt**

## Problème : ________________________________________ 10pts

Partie A :

Soit $g$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminons la limite de $g$ en $-\infty$ puis en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 2(0) - (-\infty) - 2 = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}$ **0,25pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty - \infty \ \ FI$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [e^x(2 - xe^{-x} - 2e^{-x})] = +\infty(2 - 0 - 0) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$ **0,25pt**

2) Etudions le sens de variation de $g$ puis dressons son tableau de variation.

$\forall x \in ]-\infty\ ;\ +\infty[\ ;\ \ g'(x) = 2e^x - 1$

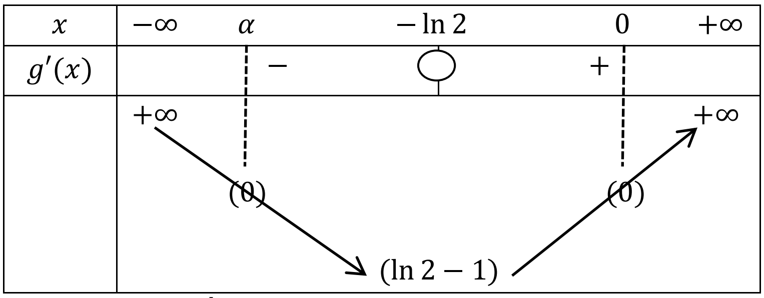
Pour $g'(x) \geq 0$, on a :

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 \geq \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\ln 2 \Leftrightarrow x \in [-\ln 2\ ;\ +\infty[$

$\boldsymbol{\forall x \in [-\ln 2\ ;\ +\infty[\ ;\ \ g'(x) \geq 0}$**. Alors $\boldsymbol{g}$ est croissante sur $\boldsymbol{[-\ln 2\ ;\ +\infty[}$** **0,5pt**

$\forall x \in ]-\infty\ ;\ -\ln 2]\ ;\ g(x) \leq 0$. **Alors $g$ est décroissante sur** $]-\infty\ ;\ -\ln 2]$

Tableau de variation :




**0,5pt**

$g(-\ln 2) = 2e^{-\ln 2} + \ln 2 - 2 = 1 + \ln 2 - 2 = \ln 2 - 1$

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifions que 0 en est une.

$g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$

$\boldsymbol{g(0) = 0}$**. Alors 0 est une solution de l'équation** $\boldsymbol{g(x) = 0}$ **0,5pt**

b) L'autre solution est appelé $\alpha$. Montrons que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$.

$\boldsymbol{\alpha}$ ***etant*** **la solution de l'équation** $\boldsymbol{g(x) = 0}$ **sur** $]-\ln 2\ ;\ +\infty[$. ***en plus*** **:**

$$\begin{cases} g(-1{,}6) = 2e^{-1{,}6} - (-1{,}6) - 2 = 0{,}003 \\ g(-1{,}5) = 2e^{-1{,}5} - (-1{,}5) - 2 = -0{,}053 \end{cases} \Leftrightarrow \quad g(-1{,}6) \times g(-1{,}5) < 0. \text{ Alors } -1{,}6 < \alpha < -1{,}5$$ **0,5pt**

4) Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réels $x$.

D'après le tableau de variation :

$\forall\ x \in ]-\infty\ ;\ \alpha] \cup [0\ ;\ +\infty[\ ;\ g(x) \geq 0$

$\forall\ x \in [\alpha\ ;\ 0]\ ;\ g(x) \leq 0$ **1pt**

**Partie B :**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

1) Déterminons la limite de $f$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. On pourra mettre $e^{2x}$ en facteur pour calculer la limite en $+\infty$).

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{2x} - xe^x - e^x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \mathbf{0{,}25pt}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^{2x}\left(1 - \frac{(x+1)e^x}{e^{2x}}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}[e^{2x}(1 - (x+1)e^{-x}] = +\infty(1-0) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \mathbf{0{,}25pt}$$

2) Calculons $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ *et* $g(x)$ ont le même signe ($g$ étant la fonction définie dans la partie A).

$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ;\ f'(x) = 2e^{2x} - [e^x + e^x(x+1)] = 2e^{2x} - [(1 + x + 1)e^x] = 2e^{2x} - (x+2)e^x = (2e^x - x - 2)e^x$

$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ;\ \boldsymbol{f'(x) = (2e^x - x - 2)e^x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = g(x)e^x}$

**0,5pt**

$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ;\ e^x > 0$ **. Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$.**

Etudions le sens de variation de $f$.

$\forall\ x \in ]-\infty\ ;\ \alpha] \cup [0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) \geq 0$. ***Alors f est croissante sur*** $]-\infty\ ;\ \alpha] \cup [0\ ;\ +\infty[$.

$\forall\ x \in [\alpha\ ;\ 0]\ ;\ f'(x) \leq 0$. ***Alors f est décroissante sur*** $[\alpha\ ;\ 0]$. **0,5pt**

3) Montrons que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}$ où $\alpha$ est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie A.

$$\begin{cases} g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2e^\alpha - \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2} & (1) \\ f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^\alpha & (2) \end{cases}$$

Remplaçons $e^\alpha$ par son expression dans (2)

$(2) : f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^\alpha = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1).\frac{\alpha+2}{2} = \frac{\alpha^2+4\alpha+4}{4} - \frac{\alpha^2+3\alpha+1}{2} = \frac{\alpha^2+4\alpha+4-2\alpha^2-6\alpha-4}{4} = \frac{-\alpha^2-2\alpha}{4}$

D'où $\boldsymbol{f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}}$ **1pt**

Déduisons-en un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$.

$f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4} = -\frac{-[(\alpha+1)^2-1]}{4}$ Forme canonique

$-1{,}6 < \alpha < -1{,}5 \Leftrightarrow -0{,}6 < \alpha + 1 < -0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}25 < (\alpha+1)^2 < 0{,}36 \Leftrightarrow -0{,}75 < (\alpha+1)^2 - 1 < -0{,}64$

$\Leftrightarrow -\frac{0{,}75}{4} < \frac{(\alpha+1)^2-1}{4} < -\frac{0{,}64}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}64}{4} < -\frac{(\alpha+1)^2-1}{4} < \frac{0{,}75}{4}$

$\Leftrightarrow 0{,}16 < f(\alpha) < 0{,}1875$

**Alors, $0{,}16 < f(\alpha) < 0{,}1875$ ou $\frac{4}{25} < f(\alpha) < \frac{3}{16}$** **0,5pt**

4) Etablissons le tableau de variation de $f$.

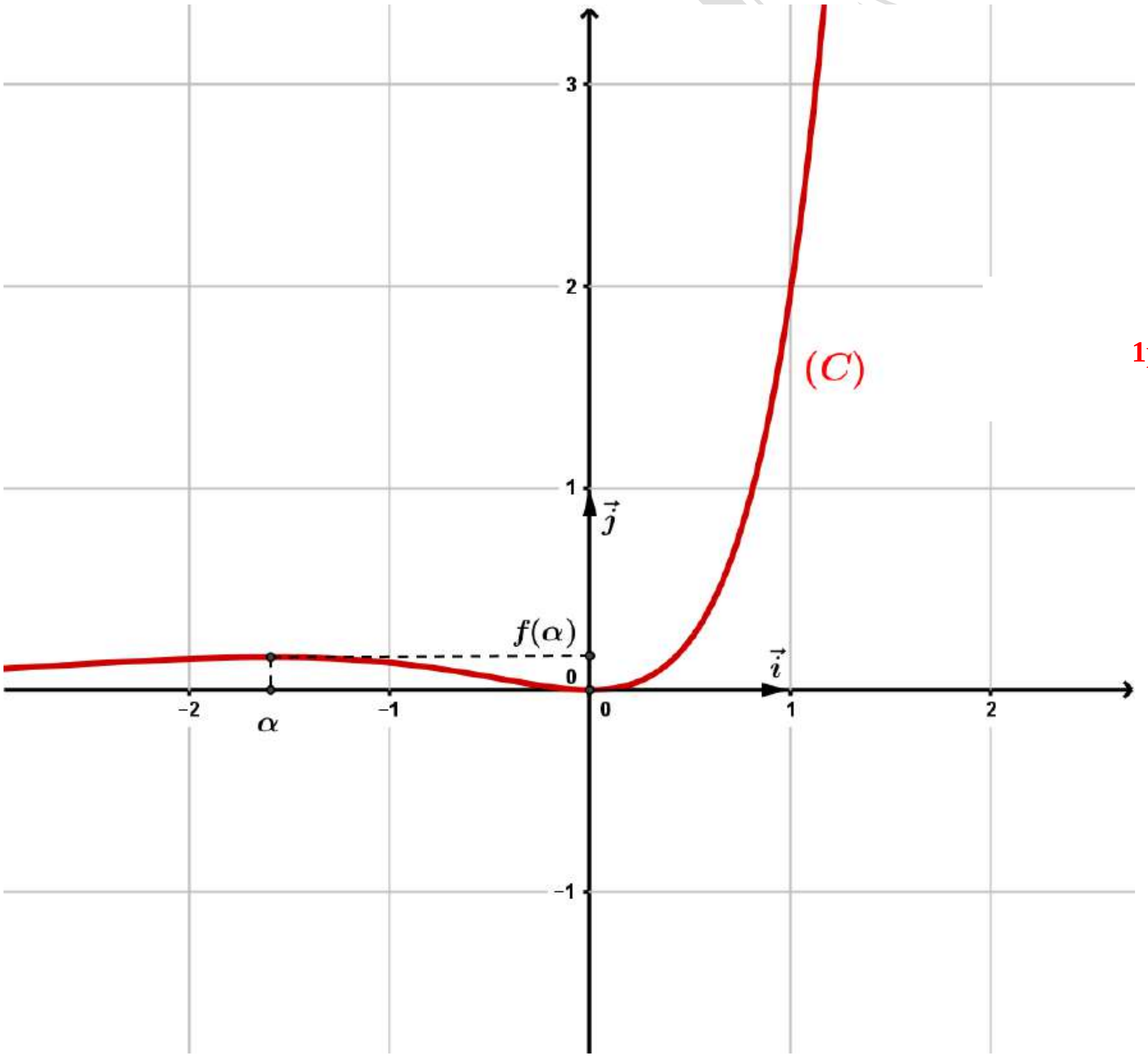
| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | $0$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $(0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**0,5pt**

5) Traçons la courbe $(C)$ représentant les variations de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}(1-(x+1)e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left[\frac{1}{x} - \frac{(x+1}{x}e^{-x}\right] = +\infty(0 - 1\times 0) = +\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. *Alors la courbe $(C)$ admet une branche parabolique de direction $(Oj)$.*




**1pt**

Partie C :

Pour tout entier naturel $n$, on note $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\, dx$.

1) Montrons que pour tout entier naturel $n$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$.

Démontrons par récurrence :

Soit la proposition $P_n$: $\cos(n\pi) = (-1)^n$

- Initialisation :

Pour $n = 0$ on a :

$\mathbf{\cos(0) = (-1)^0 \Leftrightarrow 1 = 1}$ **vraie (1)**

Pour $n = 1$ on a :

$\cos(\pi) = (-1)^1 \Leftrightarrow -1 = -1$ vraie

- Transmission :

pour tout entier naturel $n$, supposons que la proposition $P_n$ est vraie (c'est-à-dire $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ) et montrons que $P_{n+1}$ est vraie( c'est-à-dire $\cos[(n+1)\pi] = (-1)^{n+1}$

$\cos[(n+1)\pi] = \cos(n\pi + \pi) = \cos(n\pi).\cos(\pi) - \sin(n\pi).\sin(\pi)$

$= (-1)^n \times (-1) - 0$ par hypothèse $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$= (-1)^{n+1}$

D'où, $\mathbf{\cos[(n+1)\pi] = (-1)^{n+1}}$ **est vraie (2)**

- Conclusion :

**D'après (1) et (2) pour tout entier naturel $n$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$** **0,25pt**

Soit la proposition $P_n$: $\sin(n\pi) = 0$

- Initialisation :

Pour $n = 0$ on a :

$\mathbf{\sin(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0}$ **vraie (1)**

Pour $n = 1$ on a :

$\sin(\pi) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ vraie

- Transmission :

pour tout entier naturel $n$, supposons que la proposition $P_n$ est vraie (c'est-à-dire $\sin(n\pi) = 0$) et montrons que $P_{n+1}$ est vraie( c'est-à-dire $\sin[(n+1)\pi] = 0$

$\sin[(n+1)\pi] = \sin(n\pi + \pi) = \sin(n\pi).\cos(\pi) + \sin(\pi).\cos(n\pi)$

$= 0 \times (-1) - 0 \times (-1)^n$ par hypothèse $\sin(n\pi) = 0$ *et* $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$= 0$

D'où, $\mathbf{\sin[(n+1)\pi] = 0}$ **est vraie (2)**

- Conclusion :

**D'après (1) et (2) pour tout entier naturel $n$, $\sin(n\pi) = 0$** **0,25pt**

2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2}$.

$I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\, dx$

Posons :

$u = e^x \Leftrightarrow u' = e^x$

$v' = \cos(nx) \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sin(nx)$

$$I_n = \underbrace{\left[e^x.\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi} e^x.\frac{1}{n}\sin(nx)\, dx \Leftrightarrow I_n = \int_0^{\pi} -e^x.\frac{1}{n}\sin(nx)\, dx$$

Posons :

$u = e^x \Leftrightarrow u' = e^x$

$v' = -\frac{1}{n}\sin(nx) \Leftrightarrow \frac{1}{n^2}\cos(nx)$

$$I_n = \left[e^x.\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x.\frac{1}{n^2}\cos(nx)\, dx$$

$= (e^{\pi}.\frac{1}{n^2}\cos(n\pi) - (e^{0}.\frac{1}{n^2}\cos(0) - \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} e^{x}.\cos(nx)\,dx$

$I_n = e^{\pi}.\frac{1}{n^2}.(-1)^n - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}I_n \Leftrightarrow I_n + \frac{1}{n^2}I_n = \frac{1}{n^2}[(-1)^n e^{\pi} - 1]$

$\Leftrightarrow \frac{(n^2+1)I_n}{n^2} = \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2}$

$\Leftrightarrow (n^2+1)I_n = (-1)^n e^{\pi} - 1$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2+1}}$ **CQFD**

**D'où, $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}$** **1pt**

3) Montrons que, pour tout entier naturel $n$, $|I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$.

pour tout entier naturel $n$ :

$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow -e^{\pi} \leq (-1)^n e^{\pi} \leq e^{\pi}$

$\Leftrightarrow -e^{\pi} - 1 \leq (-1)^n e^{\pi} - 1 \leq e^{\pi} - 1$

$\Leftrightarrow -\frac{(e^{\pi}+1)}{n^2+1} \leq \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2+1} \leq \frac{e^{\pi}-1}{n^2+1} \leq \frac{e^{\pi}+1}{n^2+1}$

$\Leftrightarrow -\frac{(e^{\pi}+1)}{n^2+1} \leq I_n \leq \frac{e^{\pi}+1}{n^2+1}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{|I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{n^2+1}}$ **CQFD**

**D'où pour tout entier naturel $n$, $|I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$.** **0,25pt**

Déduisons – en $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. $|I_n|$ désigne la valeur absolue de $I_n$.

$|I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}\right) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|I_n| = 0 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$ **0,25pt**

La partie C) est indépendant des partie A et B

## Exercice 1 : 4pts

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ on donne le point $A(12\ ;\ 18)$. On désigne par $B$ un point de l'axe $(O\ ;\ \vec{u})$ et $C$ un point de $(O\ ;\ \vec{v})$ tels que $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$. On appelle $x$ l'abscisse de $B$ et $y$ l'ordonnée de $C$.

1) Démontrer que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation $(E)$ : $2x + 3y = 78$ **0,5pt**

2) On se propose de trouver tous les couples de points $(B\ ;\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a) Montrer que l'on est ramené à l'équation $(E)$, avec $x\ et\ y$ appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. **1pt**

b) A partir de la difinition de $B\ et\ C$ trouver une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de $(E)$. **0,5pt**

c) Démontrer qu'un couple $(x\ ;\ y)$ est solution de $(E)$ si et seulement si $(x\ ;\ y) = (12 + 3k\ ;\ 18 - 2k)$ où $k$ est un entier relatif. **1pt**

d) Combien y'a-t-il de couples de points $(B\ ;\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21 \quad et \quad -5 \leq y \leq 14$ ? **1pt**

## Exercice 2 : 5pts

Le plan $P$ est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. On considère l'application affine $f$ de $P$ dans $P$ qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'(x';\ y')$ telles que : $\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexe

1) a) $f$ est-elle bijective ? Justifiez votre réponse. **0,5pt**

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$. **0,5pt**

c) Quelle est l'image par $f$ de la droite $(D)$ d'équation $y = 2x + 1$ ? **1pt**

2) On désigne par $M(x\ ;\ y)$ le point d'affixe $z$ et par $M'$ le point d'affixe $z'$ où $z\ et\ z'$ sont deux nombres complexes

a) Sachant que $f(M) = M'$, exprimer $z'$ en fonction de $z$. **2pt**

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $f$. **1pt**

## Problème1 : 11pts

Soit la fonction numérique $f$ définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\ et\ (C)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. Unité $2\ cm$

1) Déterminer l'ensemble de définition de $f$. **0,5pt**

2) Démontrer que $(C)$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations. **1pt**

3) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de $f$. **1pt**

4) a) Démontrer que $(C)$ admet un point d'inflexion $I$ dont on déterminera les coordonnées. Donner l'équation de la tangente $(T)$ à $(C)$ au point I. **1pt**

b) Etudier la position de $(C)$ par rapport à $(T)$. **0,5pt**

5) Tracer $(C)\ et\ (T)$ dans le même repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ du plan. **1,5pt**

6) a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_{\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx$ **1pt**

b) Calculer en $cm^2$ l'aire de la partie du plan limitée par $(C)$ , $(T)$ et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$. **0,5pt**

Partie B :

Soit $h$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \frac{1}{2}f(\cos x)$ où $f$ est la fonction définie en A)

1) Vérifier que $h$ est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction $g$ définie par $g(x) = \frac{1}{\sin x}$. **0,5pt**

2) Calculer l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$ **0,5pt**

3) Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{\sin x} dx$.

a) Calculer $I_0\ \ et\ \ I_1$. **0,5pt**

b) Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} cos^n x.\sin x\, dx$. **0,5pt**

c) En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de $n$ puis calculer $I_2\ ,\ I_3\ ,\ I_4\ \ et\ \ I_5$. **2pt**

# Proposition de correction : Session de juin 2011 (SET – MTI – MTGC)

## Exercice 1 : ______________________________________________ 4pts

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ on donne le point $A(12\ ;\ 18)$. On désigne par $B$ un point de l'axe $(O\ ;\ \vec{u})$ et $C$ un point de $(O\ ;\ \vec{v})$ tels que $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$. On appelle $x$ l'abscisse de $B$ et $y$ l'ordonnée de $C$.

1) Démontrons que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation $(E)$ : $2x + 3y = 78$

$B(x\ ;\ 0)\quad C(0\ ;\ y)\ \ et\ \ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \binom{x-12}{-18}.\binom{-12}{y-18} = 0$

$\Leftrightarrow -12(x-12) - 18(y-18) = 0$

$\Leftrightarrow -12x + 144 - 18y + 324 = 0$

$\Leftrightarrow -12x - 18y = -469$

$\Leftrightarrow 12x + 18y = 469$

$\Leftrightarrow \mathbf{2x + 3y = 78}$ **(en simplifiant par 6) CQFD**

**D'où le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation $(E)$ : $2x + 3y = 78$** **1pt**

2) On se propose de trouver tous les couples de points $(B\ ;\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a) Montrons que l'on est ramené à l'équation $(E)$, avec $x\ \ et\ \ y$ appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

les couples de points $(B\ ;\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs vérifie $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ d'après 1)

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ABC$ est un triangle rectangle en A$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

$AB = \sqrt{(x-12)^2 + (-18)^2}\ \ ;\ \ AC = \sqrt{(-12)^2 + (y-18)^2}\ \ ;\ \ BC = \sqrt{(-x)^2 + (y)^2}$

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow [(x-12)^2 + (-18)^2] + [(-12)^2 + (y-18)^2] = [(-x)^2 + (y)^2]$

$\Leftrightarrow (x^2 - 24x + 144 + 324) + (144 + y^2 - 36y + 324) = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow -24x - 36y + 936 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 3y - 78 = 0$ en simplifiant par $-12$.

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x + 3y - 78 = 0$ avec $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$

**Alors, on est ramené à l'équation $(E)$: $2x + 3y = 78$, avec $x\ \ et\ \ y$ appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.** **0,5pt**

b) A partir de la difinition de $B\ \ et\ \ C$ trouver une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de $(E)$.

**Par définition $A(12\ ;\ 18)$ ; $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow B(12\ ;\ 0)\ \ et\ \ C(0\ ;\ 18)$ car $2(12) + 3(18) = 78$**

**D'où, $(x_0\ ;\ y_0) = (12\ ;\ 18)$ est une solution particulière de $(E)$.** **0,5pt**

c) Démontrons qu'un couple $(x\ ;\ y)$ est solution de $(E)$ si et seulement si $(x\ ;\ y) = (12 + 3k\ ;\ 18 - 2k)$ où $k$ est un entier relatif.

$*$ supposons que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de $(E)$ et montrons que $(x\ ;\ y) = (12 + 3k\ ;\ 18 - 2k)$ où $k$

$$-\begin{cases} 2x + 3y = 78 \\ 2(12) + 3(18) = 78 \end{cases}$$

$2(x-12) + 3(y-18) = 0 \Leftrightarrow 2(x-12) = 3(-y+18)$

$$\begin{cases} 3/2(x-12)\ \ et\ PGCD(3\ ;\ 2) = 1\ \ alors\ d'après\ Gauss\ \ 3/(x-12) \\ 2/3(-y+18)\ \ et\ PGCD(2\ ;\ 3) = 1\ \ alors\ d'après\ Gauss\ \ 2/(-y+18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{3/(x-12) \Leftrightarrow x - 12 = 3k \Leftrightarrow x = 12 + 3k} \\ \mathbf{2/(-y+18) \Leftrightarrow -y + 18 = 2k \Leftrightarrow y = 18 - 2k} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{(x\ ;\ y) = (12 + 3k\ ;\ 18 - 2k)\ où\ k}.\quad (1)$$

$*$ supposons que $(x\ ;\ y) = (12 + 3k\ ;\ 18 - 2k)$ où $k$. Et montrons que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de $(E)$

$(E):\ 2x + 3y = 2(12 + 3k) + 3(18 - 2k)$

$= 24 + 6k + 54 - 6k$

$= 78$ CQFD

$\mathbf{(E):\ 2x + 3y = 78}$. **(2)**

**D'après (1) et (2) le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de $(E)$ si et seulement si $(x\ ;\ y) = (12 + 3k\ ;\ 18 - 2k)$ où $k$ est un entier relatif.** **1pt**

d) Le nombre de couples de points $(B\ ;\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :

$-6 \leq x \leq 21\quad et\quad -5 \leq y \leq 14$

$-6 \leq x \leq 21 \Leftrightarrow -6 \leq 12 + 3k \leq 21$

$\Leftrightarrow -6 \leq k \leq 3$

$\Leftrightarrow k \in \{-6\ ;\ -5\ ;\ -4\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$

$-5 \leq y \leq 14 \Leftrightarrow -5 \leq 18 - 2k \leq 14$

$\Leftrightarrow 2 \leq k \leq 11{,}5$

$\Leftrightarrow k \in \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9\ ;\ 10\ ;\ 11\}$

D'où $\begin{cases} -6 \leq x \leq 21 \\ -5 \leq y \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \quad k \in \{2\ ;\ 3\}$

Pour $k = 2$ on a :

$(x\ ;\ y) = (18\ ;\ 14)$

Pour $k = 3$ on a :

$(x\ ;\ y) = (21\ ;\ 12)$.

**Il y a deux couples de points $(B\ ;\ C) = \left\{\left(\binom{18}{0}\ ;\ \binom{0}{14}\right)\quad ;\quad \left(\binom{21}{0}\ ;\ \binom{0}{12}\right)\right\}$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$** 1pt

## Exercice 2 : 5pts

Le plan $P$ est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. On considère l'application affine $f$ de $P$ dans $P$ qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'(x';\ y')$ telles que : $\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexe

1) a) $f$ est-elle bijective ? Justifiez votre réponse.

$f$ *est* bijective si et seulement la $M_\varphi \neq 0$ ou $\varphi$ est l'application linéaire associé à $f$

$$M_\varphi = \begin{vmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \end{vmatrix} = -\frac{36}{25} - \frac{64}{25} = \frac{-100}{25} = -4 \neq 0$$

**$M_\varphi \neq 0$. Alors $f$ bijective** 0,5pt

b) Déterminons l'ensemble des points invariants par $f$.

$M$ est un point invariant si et seulement si $f(M) = M$.

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{5}x - \frac{8}{5}y = -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5}x - \frac{1}{5}y = -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 8y = -8 \\ 8x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \ \ et\ \ y = 1$$

**$f$ a un seul point invariant $M(0\ ;\ 1)$** 0,5pt

c) L'image par $f$ de la droite $(D)$ d'équation $y = 2x + 1$

$$\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y = x' + \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y = y' + \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y = \frac{5x'+8}{5} \\ \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y = \frac{5y'+1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 8y = 5x' + 8 \\ 8x + 6y = 5y' + 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}\begin{cases} -6x + 8y = 5x' + 8 \\ 8x + 6y = 5y' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -24x + 32y = 20x' + 32 \\ 24x + 18y = 15y' + 3 \end{cases}$$

$$50y = 20x' + 15y' + 35 \Leftrightarrow y = \frac{4x'+3y'+7}{10}$$

$$\begin{matrix} 3 \\ -4 \end{matrix}\begin{cases} -6x + 8y = 5x' + 8 \\ 8x + 6y = 5y' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18x + 24y = 15x' + 24 \\ -32x - 24y = -20y' - 4 \end{cases}$$

$$-50x = 15x' - 20y' + 20 \Leftrightarrow x = \frac{-3x'+4y'-4}{10}$$

$$(D) :\ y = 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{4x'+3y'+7}{10} = 2\left(\frac{-3x'+4y'-4}{10}\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x'+3y'+7}{10} = \frac{-6x'+8y'-8+10}{10}$$

$$\Leftrightarrow 4x' + 3y' + 7 = -6x' + 8y' + 2$$

$$\Leftrightarrow 4x' + 3y' + 7 + 6x' - 8y' - 2 = 0$$

$\Leftrightarrow 10x' - 5y' + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 2x' - y' + 1 = 0$

**L'image par $f$ de la droite $(D)$ d'équation $y = 2x + 1$ est $(D') : y' = 2x' + 1$** 1pt

2) On désigne par $M(x\ ;\ y)$ le point d'affixe $z$ et par $M'$ le point d'affixe $z'$ où $z$ *et* $z'$ sont deux nombres complexes

a) Sachant que $f(M) = M'$, exprimons $z'$ en fonction de $z$.

$$\begin{array}{l} \\ i \end{array}\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ iy' = \frac{8}{5}xi + \frac{6}{5}yi - \frac{1}{5}i \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x' + yi = \frac{8}{5}i(x - yi) - \frac{6}{5}(x - yi) - \left(\frac{8}{5} + \frac{1}{5}i\right)$ en ajoutant membre à membre

$\Leftrightarrow x' + yi = \left(-\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i\right)(x - yi) - \left(\frac{8}{5} + \frac{1}{5}i\right)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{z' = \left(-\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i\right)\bar{z} - \left(\frac{8}{5} + \frac{1}{5}i\right)}$ 2pts

b) Déduisons-en la nature et les éléments caractéristiques de $f$.

$z' = a\bar{z} + b \quad avec \quad a = -\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i \quad et \quad -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$

**$f$ est une similitude indirecte. Ses éléments caractéristiques sont** : 0,25pt

**Le centre $\Omega$ : c'est le point invariant $M(0\ ;\ 1)$.** 0,25pt

**Le rapport $k = |a| = \frac{1}{5}\sqrt{36 + 64} = 2$.** 0,25pt

**L'axe : c'est la droite $(D)$ : $y = 2x + 1$.** 0,25pt

## Problème : 11pts

Soit la fonction numérique $f$ définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ *et* $(C)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. Unité $2\ cm$

1) Déterminons l'ensemble de définition de $f$.

$D_f = \left\{x / x \in \mathbb{R}\ ;\ \frac{1-x}{1+x} > 0\ \ et\ \ 1 + x \neq 0\right\}$

Posons $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *et* $1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1 - x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $1 + x$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{1-x}{1+x}$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | |

**$D_f = ]-1\ ;\ 1[$** 0,5pt

2) Démontrons que $(C)$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \ln\left(\frac{0^+}{2}\right) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty}$

**D'où $(C)$ admet deux asymptotes verticale d'équation $x = -1$ *et* $x = 1$.** $0,5\text{pt} \times 2$

3) Calculons $f'(x)$ puis dressons le tableau de variation de $f$.

$\forall x \in ]-1\ ;\ 1[\ ;\ f'(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-2}{1-x^2}$

$\forall x \in ]-1\ ;\ 1[\ ;\ f'(x) = \frac{-2}{1-x^2}$ **0,5pt**

$\forall x \in ]-1\ ;\ 1[\ ;\ f'(x)$. Alors $f$ est strictement décroissante sur $]-1\ ;\ 1[$.

| $x$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**0,5pt**

4) a) Démontrons que $(C)$ admet un point d'inflexion $I$ dont on déterminera les coordonnées.

$\forall x \in ]-1\ ;\ 1[\ ;\ f''(x) = \frac{-4x}{(1-x^2)^2}$ et $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**D'où $(C)$ admet un point d'inflexion $I\big(0\ ;\ f(0)\big) = (0\ ;\ 0)$** **0,5pt**

Donner l'équation de la tangente $(T)$ à $(C)$ au point I.

$(T):\ y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = -2(x) + 0$

$(\boldsymbol{T}):\ \boldsymbol{y = -2x}$ **0,5pt**

b) Etudions la position de $(C)$ par rapport à $(T)$.

$f(x) - y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + 2x$

Posons $f(x) - y = g(x)$

- Domaine de définition :

$D_g = D_f = ]-1\ ;\ 1[$

- Limite aux bornes de $D_g$

$\lim_{x\to -1^+} g(x) = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$

- Dérivée :

$\forall x \in ]-1\ ;\ 1[\ ;\ g'(x) = f'(x) + 2 = \frac{-2}{1-x^2} + 2 = \frac{-2+2-2x^2}{1-x^2} = \frac{-2x^2}{1-x^2} < 0$

- Tableau de variation :

| $x$ | $-1$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $(0)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

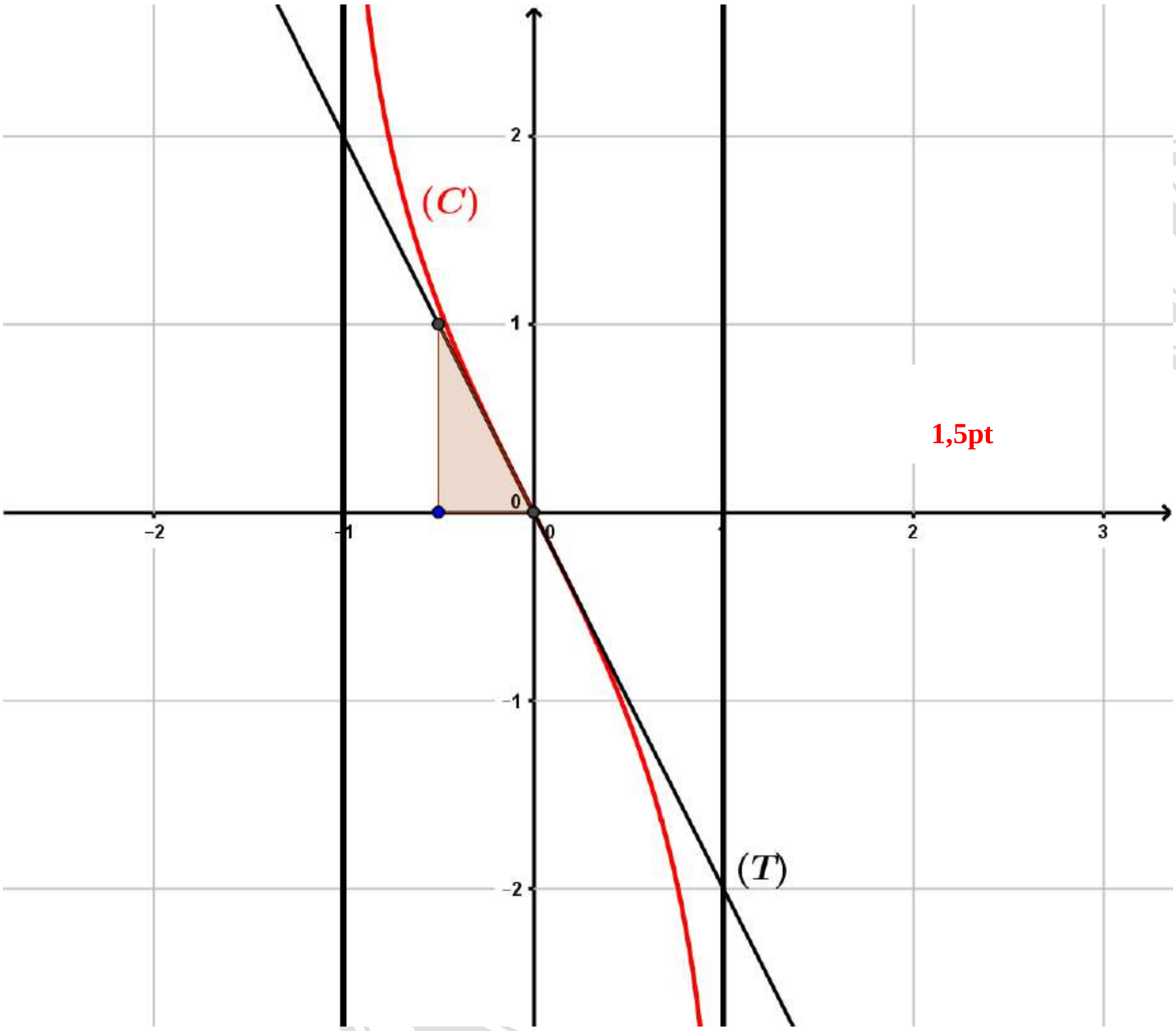
**Sur $x \in ]-1\ ;\ 0[\ ;\ g(x) > 0$ c'est-à-dire $f(x) - y > 0$. Alors la courbe $(C)$ est au-dessus de la tangente $(T)$.**

**Sur $x \in ]0\ ;\ 1[\ ;\ g(x) < 0$ c'est-à-dire $f(x) - y < 0$. Alors la courbe $(C)$ est en dessous de la tangente $(T)$.**

**Sur $x \in \{0\}$ ; $g(x) = 0$ c'est-à-dire $f(x) - y = 0$ . $alors\ la\ courbe\ (C)\ et\ (T) sont\ confondues\ au\ point$**

**$de\ coordonnées\ (0\ ;\ 0)$** 0,5pt

5) Traçons $(C)$ $et$ $(T)$ dans le même repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ du plan.




1,5pt

6) a) A l'aide d'une intégration par parties, calculons l'intégrale $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx$

$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$

Posons $u = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Leftrightarrow u' = \frac{-2}{1-x^2} = \frac{2}{x^2-1}$

$v' = 1 \Leftrightarrow v = x$

$I = \left[x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\ln(3) - [ln|x^2 - 1|]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{1}{2}\ln(3) + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = \frac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2 = \frac{3\ln 3 - 4\ln 2}{2}$

$\boldsymbol{I = \frac{3\ln 3 - 4\ln 2}{2}}$ 1pt

b) Calculons en $cm^2$ l'aire de la partie du plan limitée par $(C)$ , $(T)$ et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

$\boldsymbol{A = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} [f(x) - y]\, dx.ua}$

$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} [f(x) - y]\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} [f(x) + 2x]\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\, dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 2x\, dx = I + [x^2]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{3\ln 3 - 4\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$

$\boldsymbol{\int_{-\frac{1}{2}}^{0} [f(x) - y]\, dx = \frac{6\ln 3 - 8\ln 2 - 1}{4}}$

$\boldsymbol{A = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}[f(x) - y]\,dx.ua = \frac{6\ln 3 - 8\ln 2 - 1}{4} \times 4cm^2 = (6\ln 3 - 8\ln 2 - 1)\,cm^2}$

$\boldsymbol{A = (6\ln 3 - 8\ln 2 - 1)\,cm^2 = 0,046\,cm^2}$. **0,5pt**

**Partie B :**

Soit $h$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \frac{1}{2}f(\cos x)$ où $f$ est la fonction définie en A)

1) Vérifions que $h$ est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction $g$ définie par $g(x) = \frac{1}{\sin x}$.

$h$ est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction $g$ si et seulement si $h'(x) = g\ \ et\ \ h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$h(x) = \frac{1}{2}f(\cos x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$

$\forall\, x \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]\ ;\ h'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x + \sin x.\cos x + \sin x - \sin x.\cos x}{1-\cos^2 x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2\sin x}{\sin^2 x}\right] = \frac{1}{\sin x}$

**Pour tout réel** $\boldsymbol{x \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]\ ;\ h'(x) = \frac{1}{\sin x} = g(x)}$ **et** $\boldsymbol{h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}f(0) = 0}$ **. Alors $h$ est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction $g$ définie par $g(x) = \frac{1}{\sin x}$** **0,5pt**

2) Calculons l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx$

$$K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx = [h(x)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 3$$

$\boldsymbol{K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\ln 3}$ **0,5pt**

3) Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin x}dx$.

a) Calculons $I_0\ \ et\ \ I_1$.

$I_0 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\ln 3 \iff \boldsymbol{I_0 = \frac{1}{2}\ln 3}$ **0,25pt**

$I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx = [\ln|\sin x|]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| - \ln\left|\sin\frac{\pi}{3}\right| = \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2}$

$\boldsymbol{I_1 = -\ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\ln 3 + 2\ln 2}{2}}$

b) Calculons l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.\sin x\,dx$.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.\sin x\,dx = -\left[\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n+1} + \frac{\cos^{n+1}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{n+1} = 0 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{(n+1).2^{n+1}}$$

$\boldsymbol{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.\sin x\,dx = \frac{1}{(n+1).2^{n+1}}}$ **0,5pt**

c) Déduisons-en l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de $n$ puis calculons $I_2\ ,\ I_3\ ,\ I_4\ \ et\ \ I_5$.

$$I_n - I_{n+2} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin x}dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{n+2}x}{\sin x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^n x - \cos^n x.\cos^2 x}{\sin x}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^n x(1-\cos^2 x)}{\sin x}\right)dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^n x(\sin^2 x)}{\sin x}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.\sin x\,dx$$

**D'où** $\boldsymbol{I_n - I_{n+2} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.\sin x\,dx = \frac{1}{(n+1).2^{n+1}}}$. **1pt**

Pour $n = 0$ on a :

$I_0 - I_2 = \frac{1}{2} \iff I_2 = I_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} = \frac{\ln 3 - 1}{2} \iff \boldsymbol{I_2 = \frac{\ln 3 - 1}{2}}$ **0,25pt**

Pour $n = 1$ on a :

$I_1 - I_3 = \frac{1}{2\times 2^2} \iff I_3 = I_1 - \frac{1}{8} = \frac{-\ln 3 + 2\ln 2}{2} - \frac{1}{8} = \frac{-4\ln 3 + 8\ln 2 - 1}{8} \iff \boldsymbol{I_3 = \frac{-4\ln 3 + 8\ln 2 - 1}{8}}$ **0,25pt**

Pour $n = 2$ on a :

$I_2 - I_4 = \frac{1}{3\times 2^3} \iff I_4 = I_2 - \frac{1}{24} = \frac{\ln 3 - 1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{12\ln 3 - 13}{24} \iff \boldsymbol{I_4 = \frac{12\ln 3 - 13}{24}}$ **0,25pt**

Pour $n = 3$ on a :

$I_3 - I_5 = \frac{1}{4\times 2^4} \iff I_5 = I_3 - \frac{1}{64} = \frac{-4\ln 3 + 8\ln 2 - 1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{-32\ln 3 - 64\ln 2 - 9}{64} \iff \boldsymbol{I_5 = \frac{-32\ln 3 - 64\ln 2 - 9}{64}}$ **0,25pt**

## Exercice 1 : 6pts

A) Soit $f$ la fonction numérique à variable réelle $x$ définie par : $f(x) = \frac{x^3+2x+2}{1-x^2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ $de$ $f$. **0,5pt**

2) Déterminer les réels $a,\ b\ et\ c$ tels que pour tout $x$ de $D_f$ on ait : $f(x) = ax + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$ **1pt**

3) En déduire l'ensemble des primitives de $f$ sur $D_f$. **0,5pt**

B) Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte $5\ F$ l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à $m_1$ francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à $m_2$ francs.

L'entier $m_1$ s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit et $m_2$ s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept.

1) Déterminer les chiffres $x\ et\ y$ pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues. **1,5pt**

2) Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter. **1pt**

3) a) Décomposer $m_1\ et\ m_2$ en produit de facteurs premiers. **0,5pt**

b) En déduire le nombre de diviseurs de $m_1\ et\ m_2$ puis le $PGCD(m_1\ ;\ m_2)$. **0,5pt**

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ où $u\ et\ v$ sont deux entiers relatifs. **0,5pt**

## Exercice 2 : 6pts

I) On considère le complexe $Z$ défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où $z = x + yi\ ,\ avec\ (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2$

1) On note $Z = X + Yi,\ (X\ ,\ Y) \in \mathbb{R}^2$. Ecrire $X\ et\ Y$ en fonction de $x\ et\ y$. **1,5pt**

2) Au complexe $z$ on associe le plan $M(x\ ,\ y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. Déterminer l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ du plan tels que $Z$ soit imaginaire pur non nul. **1pt**

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble $(\Gamma)$. **1pt**

II) 1) On désigne respectivement par $a\ et\ b$ (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées enmètres d'un rectangle. Sachant que $a = 72$ et que le plus petit miltiple commun à $a\ et\ b\ est\ 216$, quelles sont les valeurs possibles de $b$ ? **1,5pt**

2) Trouver les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240. Calculer l'entier naturel $n$ tel que : $n^2 - 240$ est un carré parfait. **1pt**

## Problème: 8pts

Soit $f$ la fonction de $[0\ ;\ +\infty[\ vers\ \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}$

1) a) Etudier le sens de variation de $f$. **1,5pt**

b) Etudier la limite de $f$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. **0,5pt**

c) Dresser le tableau de variation de $f$. **0,5pt**

2) On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$: 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

a) Donner une équation de la tangente $(T)$ à $(C)$ au point d'abscisse nulle. **0,5pt**

b) Tracer $(T)\ et\ (C)$. **1pt**

3) En utilisant les variations de $f$, démontrer que $\forall\ x \in [1\ ;\ 2]\ ,\ 1 \leq f(x) \leq 2$. **1pt**

4) a) Démontrer que pour tout réel $x$ de $[1\ ;\ 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. **1,5pt**

b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que pour tout $x$ de $[1\ ;\ 2]$ on a : $|f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}|x - 1|$. En déduire un encadrement de $f$ sur $[1\ ;\ 2]$ par deux fonctions affines que l'on précisera sur la figure. **1,5pt**

## Exercice 1 : 6pts

A) Soit $f$ la fonction numérique à variable réelle $x$ définie par : $f(x)=\frac{x^3+2x+2}{1-x^2}$

1) Déterminons l'ensemble de définition $D_f$ de $f$.

$D_f=\{x/x\in\mathbb{R},\ 1-x^2\neq 0\}$

$1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

$\boldsymbol{D_f=\mathbb{R}-\{-1\ ;\ 1\}=]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[}$

2) Déterminons les réels $a,\ b\ et\ c$ tels que pour tout $x$ de $D_f$ on ait : $f(x)=ax+\frac{b}{1-x}+\frac{c}{1+x}$

$f(x)=ax+\frac{b}{1-x}+\frac{c}{1+x}=\frac{ax(1-x^2)+b(1+x)+c(1-x)}{1-x^2}=\frac{ax-ax^3+b+bx+c-cx}{1-x^2}=\frac{-ax^3+(a+b-c)x+b+c}{1-x^2}$

$\frac{x^3+2x+2}{1-x^2}=\frac{-ax^3+(a+b-c)x+b}{1-x^2}$ par identification

$\begin{cases}-a=1\\ a+b-c=2\\ b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b-c=3\\ b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\quad 2b=5\Leftrightarrow b=\frac{5}{2}$

$b+c=2\Leftrightarrow c=2-\frac{5}{2}\Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}$

**D'où** $\boldsymbol{a=-1}$ ; $\boldsymbol{b=\frac{5}{2}}$ ; $\boldsymbol{c=-\frac{1}{2}}$ ***et*** $\boldsymbol{f(x)=-x+\frac{5}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}}$

3) Déduisons-en l'ensemble des primitives de $f$ sur $D_f$.

**Pour tout $x$ de** $\mathbb{R}-\{-1\ ;\ 1\}$ ; $\boldsymbol{F(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}\ ln|1-x|-\frac{1}{2}ln\ |1+x|+C}$ ; $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}$

B).

L'entier $m_1$ s'écrit $m_1=1x00y2$ dans le système de numération de base huit et $m_2$ s'écrit $m_2=x1y003$ dans le système de numération de base sept.

1) Déterminons les chiffres $x\ et\ y$ pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

$m_1=\overline{1x00y2}^8=1\times 8^5+x.8^4+y.8+2$ avec $0\le x\le 7\quad et\quad 0\le y\le 7$

$=32768+4096x+8y+2$

$\boldsymbol{m_1=4096x+8y+32770}$.

$m_2=\overline{x1y003}^7=x.7^5+1\times 7^4+y.7^3+3$ avec $1\le x\le 6\quad et\quad 0\le y\le 6$

$=16807x+2401+343y+3$

$\boldsymbol{m_2=16807x+343y+2404}$.

Par définition : $m_1\equiv 0[5]\quad et\quad m_2\equiv 0[5]$

$m_1\equiv 0[5]\Leftrightarrow 4096x+8y+32770\equiv 0[5]$

$\Leftrightarrow x+3y\equiv 0[5]$ avec $0\le x\le 7\quad et\quad 0\le y\le 7$

$m_2\equiv 0[5]\Leftrightarrow 16807x+343y+2404\equiv 0[5]$

$\Leftrightarrow 2x+3y+4\equiv 0[5]$ avec $1\le x\le 6\quad et\quad 0\le y\le 6$

$\Leftrightarrow 2x+3y\equiv 1[5]$

$-\begin{cases}x+3y\equiv 0[5]\\ 2x+3y\equiv 1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x-3y\equiv 0[5]\\ 2x+3y\equiv 1[5]\end{cases}$

$x\equiv 1[5]\quad\Leftrightarrow\quad x=1+5k$

$-2\begin{cases}x+3y\equiv 0[5]\\ 2x+3y\equiv 1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-6y\equiv 0[5]\\ 2x+3y\equiv 1[5]\end{cases}$

$-3y\equiv 1[5]\Leftrightarrow 2y\equiv 1[5]\Leftrightarrow y\equiv 3[5]\Leftrightarrow y=3+5k$

$0\le x\le 7\Leftrightarrow 0\le 1+5k\le 7$

$\Leftrightarrow -0{,}2\le k\le 1{,}2$

$\Leftrightarrow k\in\{0\ ;\ 1\}$

$0\le y\le 7\Leftrightarrow 0\le 3+5k\le 7$

$\Leftrightarrow -0{,}6\le k\le 0{,}8$

$\Leftrightarrow k\in\{0\}\Leftrightarrow y=3$

$x=1\quad pour\ k=0\quad et\quad x=6\ \ pour\ \ k=1$

**Pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues il faut et il suffit que $x = 6 \quad et \quad y = 3$.**

2) Déterminons le montant que dispose chacune des commerçantes.

$m_1 = 4096x + 8y + 32770$

$\quad = 4096(6) + 8(3) + 32770$

$\boldsymbol{m_1 = 57\,370\ Francs}$.

$m_2 = 16807x + 343y + 2404$

$\quad = 16807(6) + 343(3) + 2404$

$\boldsymbol{m_2 = 104\,275\ Francs}$.

Déduisons-en le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.

**Awa achète $\frac{m_1}{5}$ mangues soit 11 474 mangues**

**Fanta achète $\frac{m_2}{5}$ mangues soit 20 855 mangues**

3) a) Décomposons $m_1 \ et \ m_2$ en produit de facteurs premiers.

$\boldsymbol{m_1 = 57\,370 = 2 \times 5 \times 5737}$.

$\boldsymbol{m_2 = 104\,275 = 5^2 \times 4171}$.

b) Déduisons-en le nombre de diviseurs de $m_1 \ et \ m_2$ puis le $PGCD(m_1 \ ; \ m_2)$.

$\boldsymbol{N_{D_{m_1}} = (1+1)(1+1)(1+1) = 8}$

$\boldsymbol{N_{D_{m_2}} = (2+1)(1+1) = 6}$

$\boldsymbol{PGCD(m_1 \ ; \ m_2) = 5}$

4) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ où $u \ et \ v$ sont deux entiers relatifs.

$m_1u + m_2v = 5$ et $PGCD(m_1 \ ; \ m_2) = 5/5$

$m_1u + m_2v = 5 \iff 57370u + 104275v = 5 \iff 11474u + 20855v = 1$ et $PGCD(11474\,;20855) = 1$

$20855 = 11474 \times 1 + 9381$

$11474 = 9381 \times 1 + 2093$

$9381 = 2093 \times 4 + 1009$

$2093 = 1009 \times 2 + 75$

$1009 = 75 \times 13 + 34$

$75 = 34 \times 2 + 7$

$34 = 7 \times 4 + 6$

$7 = 6 \times 1 + 1$

$1 = 7 - 6 \times 1 = 7 - (34 - 7 \times 4) \times 1 = 7 - 34 \times 1 + 7 \times 4 = 7 \times 5 - 34 \times 1$

$1 = 7 \times 5 - 34 \times 1 = (75 - 34 \times 2) \times 5 - 34 \times 1 = 75 \times 5 - 34 \times 10 - 34 \times 1 = 75 \times 5 - 34 \times 11$

$1 = 75 \times 5 - 34 \times 11 = 75 \times 5 - (1009 - 75 \times 13)11 = 75 \times 5 - 1009 \times 11 + 75 \times 143$

$1 = 75 \times 148 - 1009 \times 11 = (2093 - 1009 \times 2)148 - 1009 \times 11 = 2093 \times 148 - 1009 \times 296 - 1009 \times 11$

$1 = 2093 \times 148 - 1009 \times 307 = 2093 \times 148 - (9381 - 2093 \times 4) \times 307 = 2093 \times 148 - 9381 \times 307 + 9093 \times 1228$

$1 = 2093 \times 1376 - 9381 \times 307 = (11474 - 9381 \times 1) \times 1376 - 9381 \times 307 = 11474 \times 1376 - 9381 \times 1376 - 9381 \times 307$

$1 = 11474 \times 1376 - 9381 \times 1683 = 11474 \times 1376 - (20855 - 11474 \times 1) \times 1683 = 11474 \times 1376 - 20855 \times 1683 + 11474 \times 1683$

$1 = 11474 \times 3059 - 20855 \times 1683 \iff 11474(3059) + 20855(-1683) = 1$

Alors le couple $(\boldsymbol{3059} \ ; \ \boldsymbol{-1683})$ est une solution particulière de l'équation $11474u + 20855v = 1$

$$-\begin{cases} 11474(3059) + 20855(-1683) = 1 \\ 11474u + 20855v = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 11474(3059) + 20855(-1683) = 1 \\ -11474u - 20855v = -1 \end{cases}$$

$11474(3059-u)-20855(1683+v)=0$

$11474(3059-u)=20855(1683+v)$ D'après Bezout ;

$20855/3059-u \iff 3059-u=20855k \iff u=3059-20855k$
$11474/1683+v \iff 1683+v=11474k \iff v=-1683+11474k$

D'où $\boldsymbol{S=\{(3059-20855k \quad ; \quad -1683+11474k)\ k\in\mathbb{Z}\}}$.

## Exercice 2 :______________________________________________6pts

I) On considère le complexe $Z$ défini par $Z=\frac{z^2}{z+i}$ où $z=x+yi\ ,\ avec\ (x\ ,\ y)\in\mathbb{R}^2$

1) On note $Z=X+Yi,\ (X\ ,\ Y)\in\mathbb{R}^2$. Ecrivons $X\ et\ Y$ en fonction de $x\ et\ y$.

$$Z=\frac{z^2}{z+i}=\frac{(x+yi)^2}{x+yi+i}=\frac{x^2-y^2+2xyi}{x+(y+1)i}=\frac{(x^2-y^2+2xyi)(x-(y+1)i)}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x^3-x^2i(y+1)-y^2x+y^2i(y+1)+2x^2yi+2xy(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$=\frac{x^3-x^2yi-x^2i-y^2x+y^3i+y^2i+2x^2yi+2xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2}=\frac{(x^3+xy^2+2xy)+(y^3+x^2y-x^2+y^2)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$X+Yi=\frac{x^3-y^2x+2xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2}+\frac{y^3+x^2y-x^2+y^2}{x^2+(y+1)^2}i$$

Par identification :

$$\begin{cases} \boldsymbol{X=\frac{x^3+xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2}} \\ \boldsymbol{Y=\frac{y^3+x^2y-x^2+y^2}{x^2+(y+1)^2}} \end{cases}$$

2) Au complexe $z$ on associe le plan $M(x\ ,\ y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$. Déterminons l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ du plan tels que $Z$ soit imaginaire pur non nul.

$Z\ est$ imaginaire si et seulement si, $R_e(Z)=0$

$R_e(Z)=0 \iff \frac{x^3+xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2}=0 \iff x^3+xy^2+2xy=0 \iff x(x^2+y^2+2y)=0$

$\iff x=0 \quad ou \quad x^2+(y+1)^2-1=0$

$x^2+(y+1)^2-1=0 \iff x^2+(y+1)^2=1$

**L'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ cherchés est le cercle de centre $(0\ ;\ -1)$, de rayon 1 et la droite d'équation $x=0$ privée des point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ $et$ $(0\ ;\ 0)$.**

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2iz-2=0$.

$(E):\ z^2+2iz-2=0$

$\Delta'=i^2+2=1$

$z_1=-1-i \quad et \quad z_2=1-i$ $\qquad \boldsymbol{S=\{-1-i \quad ; \quad 1-i\}}$

Montrons que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble $(\Gamma)$.

Soit A et B le point d'affixe respective $z_A=-1-i \quad et \quad z_B=1-i$

$Z_A=\frac{{z_A}^2}{z_A+i}=\frac{(-1-i)^2}{-1-i+i}=-2i \iff A'(0\ ;\ -2)$

$Z_B=\frac{{z_B}^2}{z_B+i}=\frac{(1-i)^2}{1-i+i}=-2i \iff B'(0\ ;\ -2)$

$A'\in(\Gamma)$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation $(E)$.

$(\Gamma):\ x^2+(y+1)^2-1=0$

$:\ 0^2+(-2+1)^2-1=0 \iff 1-1=0 \iff 0=0$ est vraie

$A'(0\ ;\ -2)\in(\Gamma)$

**Alors les images A' et B' des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble $(\Gamma)$**

II) 1) On désigne respectivement par $a\ et\ b$ (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que $a=72$ et que le plus petit miltiple commun à $a\ et\ b\ est\ 216$, les valeurs possibles de $b$ sont :

$$\begin{cases} a=2^3\times3^2 \\ PPCM(a\ ;\ b)=216=2^3\times3^3 \end{cases}$$

$PPCM(a\ ;\ b) = 216 = 2^3 \times 3^3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^3 \times 3^2 \\ b = 3^3 \times 2^\alpha \quad avec\ \alpha \in \mathbb{N} \\ \quad b < a \end{cases} \Leftrightarrow 3^3 \times 2^\alpha < 2^3 \times 3^2 \Leftrightarrow 2^{\alpha-3} < \frac{1}{3}$

$2^{\alpha-3} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow (\alpha - 3)\ln 2 < \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \alpha < \frac{-\ln 3}{\ln 2} + 3 \Leftrightarrow \alpha < 1{,}41 \Leftrightarrow \alpha \in \{0\ ;\ 1\}$

$b = 3^3 = 27$ pour $\alpha = 0$

$b = 3^3 \times 2^1 = 54$ pour $\alpha = 1$

**Les valeurs possibles de $b$ sont : $27\ et\ 54$**

2) Trouvons les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240.

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ il a $(4 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$ didiseurs soit 20

$D_{240} = (2^0\ ;\ 2^1\ ;\ 2^2\ ;\ 2^3\ ;\ 2^4).(3^0\ ;\ 3^1).(5^0\ ;\ 5^1)$

$= (1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 8\ ;\ 16).(1\ ;\ 3).(1\ ;\ 5)$

$= (1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 8\ ;\ 16\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 12\ ;\ 24\ ;\ 48)(1\ ;\ 5)$

$= (1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 8\ ;\ 16\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 12\ ;\ 24\ ;\ 48\ ;\ 5\ ;\ 10\ ;\ 20\ ;\ 40\ ;\ 80\ ;\ 15\ ;\ 30\ ;\ 60\ ;\ 120\ ;\ 240)$

$\boldsymbol{D_{240} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ 10\ ;\ 12\ ;\ 16\ ;\ 15\ ;\ 20\ ;\ 24\ ;\ 30\ ;\ 40\ ;\ 48\ ;\ 60\ ;\ 80\ ;\ 120\ ;\ 240\}}$

Calculons l'entier naturel $n$ tel que : $n^2 - 240$ est un carré parfait.

$n^2 - 240$ est un carré parfait si et seulement si, il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que : $n^2 - 240 = m^2$

$n^2 - 240 = m^2 \Leftrightarrow n^2 - m^2 = 240 \Leftrightarrow (n + m)(n - m) = 240$ et $n > m$

$\begin{cases} n + m = 120 \\ n - m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = 61\ \ et\ \ m = 59} \Leftrightarrow 61^2 - 240 = 59^2$

**ou**

$\begin{cases} n + m = 60 \\ n - m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = 32\ \ et\ \ m = 28} \Leftrightarrow 32^2 - 240 = 28^2$

$\begin{cases} n + m = 40 \\ n - m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = 23\ \ et\ \ m = 17} \Leftrightarrow 23^2 - 240 = 17^2$

**ou**

$\begin{cases} n + m = 30 \\ n - m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = 19\ \ et\ \ m = 11} \Leftrightarrow 19^2 - 240 = 11^2$

**ou**

$\begin{cases} n + m = 24 \\ n - m = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{m = 17\ \ et\ \ m = 7} \Leftrightarrow 17^2 - 240 = 7^2$

**ou**

$\begin{cases} n + m = 20 \\ n - m = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = 16\ \ et\ \ m = 4} \Leftrightarrow 16^2 - 240 = 4^2$

$\boldsymbol{n \in \{16\ ;\ 17\ ;\ 19\ ;\ 23\ ;\ 32\ ;\ 61\}}$

## Problème:______________________________________________8pts

Soit $f$ la fonction de $[0\ ;\ +\infty[$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}$

1) a) Etudions le sens de variation de $f$.

$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) = \frac{-8\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^2} = \frac{-8\left(\sqrt{x^2+8}+x\right)}{\sqrt{x^2+8}\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^2} = \frac{-8}{\sqrt{x^2+8}\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)} < 0$ pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$

**$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) < 0$. Alors $f$ est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ .**

b) Etudions la limite de $f$ en $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x + |x|} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{8}{x + x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{8}{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

Interprétons graphiquement le résultat :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. **Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $(C)$ en $+\infty$**

c) Dressons le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $2\sqrt{2}$ $\searrow$ $0$ |

2) On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$: 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

a) Donnons une équation de la tangente $(T)$ à $(C)$ au point d'abscisse nulle.

$(T):\ y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\qquad = -x + 2\sqrt{2}$ $\quad$ avec $f'(0) = -1 \quad et \quad f(0) = 2\sqrt{2}$

$\boldsymbol{(T):\ y = -x + 2\sqrt{2}}$

b) Traçons $(T)$ $et$ $(C)$.


3) En utilisant les variations de $f$, démontrons que $\forall\ x \in [1\ ;\ 2]$ , $1 \le f(x) \le 2$.

$\forall\ x \in [1\ ;\ 2]$ on a : $1 \le x \le 2 \iff f(2) \le f(x) \le f(1)$ car $f$ est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

$\iff 1{,}46 \le f(x) \le 2$ $\quad$ où $f(2) = 1{,}64\ldots \quad et \quad f(1) = 2$

$\iff 1 \le 1{,}46 \le f(x) \le 2$

$\iff \boldsymbol{1 \le f(x) \le 2}$ **CQFD**

**D'où $\forall\ x \in [1\ ;\ 2]$ , $1 \le f(x) \le 2$.**

4) a) Démontrons que pour tout réel $x$ de $[1\ ;\ 2]$, on a : $|f'(x)| \le \frac{2}{3}$.

$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) = \frac{-8}{(x+\sqrt{x^2+8})} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+8}}$

$\forall x \in [1\ ;\ 2]$ ; on a :

$1 \le x \le 2 \iff 1 \le x^2 \le 4$

$\iff 9 \le x^2 + 8 \le 12$

$\iff 3 \le \sqrt{x^2+8} \le 2\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{6} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$+\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq \sqrt{x^2+8} \leq 2\sqrt{3} \end{cases}$$

---

$$4 \leq x + \sqrt{x^2+8} \leq 2 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2+2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{x+\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{4} \leq \frac{1}{x+\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\times\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{6} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{4} \leq \frac{1}{x+\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

---

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{\sqrt{3}-1}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+8}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{3}}{24} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+8}(x+\sqrt{x^2+8})} \leq \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8}{12} \leq \frac{-8}{\sqrt{x^2+8}(x+\sqrt{x^2+8})} \leq \frac{-8(3-\sqrt{3})}{24}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq \frac{-8}{\sqrt{x^2+8}(x+\sqrt{x^2+8})} \leq \frac{(\sqrt{3}-3)}{3} \leq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow |\boldsymbol{f'(x)}| \leq \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \quad \textbf{CQFD}$$

**D'où, pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de $[\mathbf{1}\ ;\ \mathbf{2}]$, on a : $|\boldsymbol{f'(x)}| \leq \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$**

b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrons que pour tout $x$ de $[1\ ;\ 2]$ on a : $|f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}|x-1|$.

Pour tout réel $x$ de $[1\ ;\ 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ .

En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis sur $[1\ ;\ x] \subset [1\ ;\ 2]$, à la fonction $f$ on aura :

Pour tout réel $x$ de $[1\ ;\ 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow |f(x) - f(1)| \leq \frac{2}{3}|x-1|$

$$\Leftrightarrow |\boldsymbol{f(x)} - \mathbf{2}| \leq \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}|\boldsymbol{x} - \mathbf{1}| \quad \textbf{CQFD}$$

Déduisons-en un encadrement de $f$ sur $[1\ ;\ 2]$ par deux fonctions affines que l'on précisera sur la figure.

$|f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}|x-1| \Leftrightarrow |f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}(x-1)$ car $x - 1 \geq 0$ *pour tout* $x \in [1\ ;\ 2]$

$$|f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}|x-1| \Leftrightarrow -\frac{2}{3}(x-1) \leq f(x) - 2 \leq \frac{2}{3}(x-1)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \leq f(x) - 2 \leq \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \leq f(x) \leq \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

**$\boldsymbol{p(x) \leq f(x) \leq q(x)}$ avec $\boldsymbol{p(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}}$ *et* $\boldsymbol{q(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}}$**

## Exercice 1 : 6pts

I) 1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$. **1pt**

2) a) Trouvez le reste de la division euclidienne de 111 $par$ 7 et de $10^n$ par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel $n$. **0,5pt**

b) Soit l'entier naturel $N = 999\ 888\ 777\ 666\ 555\ 444\ 333\ 222\ 111$.

- Montrez que $N$ peut s'écrire en fonction de 111 **0,5pt**

- Quel est le reste de la division euclidienne de $N$ par 7 ? **1pt**

II) Le plan $P$ est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. Soit $T_\alpha$ l'application de $P\ vers\ P$ qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'(x';\ y')$ telles que : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ $o$ù $\alpha$ est un paramètre réel.

1) Montrez que, pour tout $\alpha$, $T_\alpha$ est bijective et admet un unique point invariant que l'on précisera. **1pt**

2) Montrez qu'il existe une valeur unique de $\alpha$ pour laquelle $T_\alpha$ est une homothétie $H$ dont on précisera le centre et le rapport. **1pt**

3) Montrer qu'il existe 2 valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $T_\alpha$ est une isométrie. Vérifiez que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On note $\mathbb{R}\ et\ \mathbb{R}^{-1}$. **1pt**

## Exercice 2 : 4pts

Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang et est éliminée par les reins. Après étude, on constate que la quantité de substance contenue dans le sang à un instant $t$ est donnée approximativement par la fonction $q$ définie par : $q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t})$ $o$ù $t \geq 0$ est le temps exprimé en heure, $q_0$ la quantité de substance injectée en milligramme.

1) Etablir le tableau de variation de $q$. **1pt**

2) On désire contrôler les effets de cette substance. Pour cela il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre 2 valeurs $q_m\ et\ q_M$. **1pt**

$q_m = 1{,}2\ mg$ est le seuil d'efficacités et $q_M = 2{,}6\ mg$ est le seuil de toxicité. Déduire du tableau de variation de $q$, les valeurs qu'on peut donner à $q_O$ pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique.

3) On pose $q_0 = 10$.

a) Tracez soigneusement la courbe de $q$ dans un repère de votre choix. **1pt**

b) Déterminez graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace. **1pt**

## Problème : 10pts

Pour tout entier $n$ strictement positif on considère la fonction $f_n$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f_n = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$. On note $(C_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans le repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

**Partie A : Etude de $f_1$**

1) Déterminez $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x)$. Que peut − on en déduire pour $(C_1)$ ? **1pt**

2) Etudiez le sens de variation de $f_1$ et donnez le tableau de variation de $f_1$. **1pt**

3) Donnez une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à $(C_1)$. **0,5pt**

4) Déterminez $\lim_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f_2(x)$. Que peut – on en déduire pour $C_2$. **1pt**

5) Calculez $f_2'(x)$ et donnez le tableau de variations de $f_2$. **1pt**

**Partie B :**

1) Etudiez le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ ; en déduire la position relative de $(C_1)$ $et$ $(C_2)$. **1pt**

2) Tracez $(C_1)$ $et$ $(C_2)$ dans le même repère orthogonal. **1,5pt**

**Partie C :**

$m$ $étant$ un entier naturel non nul, on pose $I_m = \int_1^e f_m(x)\,dx$.

1) On pose $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calculez $F'(x)$. En déduire $I_1$. **1pt**

2) En utilisant une intégration par parties, montrez que $I_{m+1} = -\frac{1}{e} + (m+1)I_m$ **1pt**

3) Calculez $I_2$ puis l'aire en $cm^2$ du domaine compris entre $(C_1)$ $et$ $(C_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ $et$ $x = e$. **1pt**

## Exercice 1 : 6pts

I) 1) Résolvons dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$.

$x^3 - y^3 = 631 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) = 631$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2 = 631 \\ x-y = 1 \end{cases}$ car 631 est premier

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2+2xy+xy = 631 \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy = 630 \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 210 & (1) \\ x-y = 1 & (2) \end{cases}$

Dans (2) : $x = y+1$

Dans (1) : $(y+1)y = 210 \Leftrightarrow y^2 + y - 210 = 0$

Après résolution, on a : $y = 14 \in \mathbb{N}$ $ou$ $y = -15 \notin \mathbb{N}$ **0,5pt**

Pour $y = 14$ ; $x = 15$

**D'où l'équation $x^3 - y^3 = 631$ a pour solution $(15\ ;\ 14)$** **1pt**

2) a) Trouvons le reste de la division euclidienne de 111 $par$ 7 et de $10^n$ par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel $n$.

$111 \equiv 6[7] \Leftrightarrow$ **6 $est$ le reste de la division euclidienne de 111 $par$ 7**

$10^0 \equiv 1[7]$ ; $10^1 \equiv 3[7]$ ; $10^2 \equiv 2[7]$ ; $10^3 \equiv 6[7]$

$10^4 \equiv 4[7]$ ; $10^5 \equiv 5[7]$ ; $10^6 \equiv 1[7]$ donc 6 est période

**Pour $n = 6k$ alors, le reste de la division euclidienne de $10^n$ par 7 est 1.**

**Pour $n = 6k+1$ alors, le reste de la division euclidienne de $10^n$ par 7 est 3.**

**Pour $n = 6k+2$ alors, le reste de la division euclidienne de $10^n$ par 7 est 2.**

**Pour $n = 6k+3$ alors, le reste de la division euclidienne de $10^n$ par 7 est 6.** **0,5pt**

**Pour $n = 6k+4$ alors, le reste de la division euclidienne de $10^n$ par 7 est 4.**

**Pour $n = 6k+5$ alors, le reste de la division euclidienne de $10^n$ par 7 est 5.**

b) Soit l'entier naturel $N = 999\,888\,777\,666\,555\,444\,333\,222\,111$.

- Montrons que $N$ peut s'écrire en fonction de 111

$N = 999\,888\,777\,666\,555\,444\,333\,222\,111$

$N = 999\times10^{24} + 888\times10^{21} + 777\times10^{18} + 666\times10^{15} + 555\times10^{12} + 444\times10^{9} + 333\times10^{6} + 222\times10^{3} + 111$

$= 9\times111\times10^{24} + 8\times111\times10^{21} + 7\times111\times10^{18} + 6\times111\times10^{15} + 5\times111\times10^{12} + 4\times111\times10^{9} + 3\times111\times10^{6} + 2\times111\times10^{3} + 111$

$\boldsymbol{N = 111(9\times10^{24} + 8\times10^{21} + 7\times10^{18} + 6\times10^{15} + 5\times10^{12} + 4\times10^{9} + 3\times10^{6} + 2\times10^{3} + 1)}$.

- le reste de la division euclidienne de $N$ par 7 est :

$N = 111(9\times10^{24} + 8\times10^{21} + 7\times10^{18} + 6\times10^{15} + 5\times10^{12} + 4\times10^{9} + 3\times10^{6} + 2\times10^{3} + 1$

$\boldsymbol{N = 111(9\times10^{6\times4} + 8\times10^{6\times3+3} + 7\times10^{6\times3} + 6\times10^{6\times2+3} + 5\times10^{6\times2} + 4\times10^{6\times1+3} + 3\times10^{6\times1} + 2\times10^{3} + 1}$ **0,5pt**

$N \equiv 6(9\times1 + 8\times6 + 7\times1 + 6\times6 + 5\times1 + 4\times6 + 3\times1 + 2\times6 + 1)[7]$

$N \equiv 6(145) \equiv [7]$

$N \equiv 870[7]$

**$N \equiv 2[7]$. *Alors* 2 le reste de la division euclidienne de $N$ par 7** **1pt**

II) Le plan $P$ est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. Soit $T_\alpha$ l'application de $P$ $vers$ $P$ qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'(x';\ y')$ telles que : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ où $\alpha$ est un paramètre réel.

1) Montrons que, pour tout $\alpha$, $T_\alpha$ est bijective et admet un unique point invariant que l'on précisera.

L'application linéaire $\varphi$ associée à $T_\alpha$ a pour matrice $M_{\varphi_\alpha} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$T_\alpha$ est bijective si et seulement si, $M_{\varphi_\alpha} \neq 0$

$M_{\varphi_\alpha} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \alpha^2 \neq 0 \ pour\ tout\ \alpha \in \mathbb{R}$

**$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ; $M_{\varphi_\alpha} \neq 0$. Alors $T_\alpha$ est bijective, pour tout $\alpha$** 0,5pt

$$T_\alpha(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}x = -\alpha y \\ y + \frac{1}{2}y = \alpha x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x + \alpha y = 0 \\ -\alpha x + \frac{3}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \ ; \ y = 0$$

**Le point $M(0\ ;\ 0)$ est le seul point invariant** 0,5pt

2) Montrons qu'il existe une valeur unique de $\alpha$ pour laquelle $T_\alpha$ est une homothétie $H$ dont on précisera le centre et le rapport.

$$i\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases} \quad (1) + (2) \Leftrightarrow x' + y'i = -\frac{1}{2}x - \alpha y + \alpha i x - \frac{1}{2}yi$$

$$\Leftrightarrow x' + y'i = \alpha(-y + xi) - \frac{1}{2}(x + yi)$$

$$\Leftrightarrow x' + y'i = \alpha i(x + yi) - \frac{1}{2}(x + yi)$$

$$\Leftrightarrow x' + y'i = \left(\alpha i - \frac{1}{2}\right)(x + yi)$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(-\frac{1}{2} + \alpha i\right)z$$

$T_\alpha :\ z' = az + b \ \ avec\ \ a = -\frac{1}{2} + \alpha i \quad et \quad b = 0$

***$T_\alpha$ est une ho*****mothétie si et seulement si, $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\ ;\ 1\} \Leftrightarrow im(a) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ CQFD**

**Alors, qu'il existe une valeur unique de $\alpha$ $(\alpha = 0)$ pour laquelle $T_\alpha$ est une homothétie $H$**

**Son centre le point invariant $M(0\ ;\ 0)$ et son rapport est $a = -\frac{1}{2}$ *pour* $\alpha = 0$** 1pt

3) Montrer qu'il existe 2 valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $T_\alpha$ est une isométrie.

$T_\alpha$ est une isométrie si et seulement si :

* $M_{\varphi_\alpha} = 1\ \ si\ \ T_\alpha$ est un déplacement

* $M_{\varphi_\alpha} = -1\ \ si\ \ T_\alpha$ est un antidéplacement

$M_\varphi = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ou \quad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$M_\varphi = -1 \Leftrightarrow M_\varphi = \alpha^2 + \frac{1}{4} = -1$ Impossible.

**D'où, il existe 2 valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $T_\alpha$ est une isométrie telles que $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *ou* $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.** 0,5pt

Vérifions que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On note $\mathbb{R}\ et\ \mathbb{R}^{-1}$.

$$\mathbb{R} = T_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} : \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{R} = T_{\frac{\sqrt{3}}{2}} : \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre si et seulement si $T_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \circ T_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(M) = M\ ou\ T_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \circ T_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(M) = M$

$$T_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \circ T_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(M) = T_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(M') = \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{4}x + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}y} + \frac{3}{4}x - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}y} \\ y' = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}x} + \frac{3}{4}y - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}x} + \frac{1}{4}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow M\binom{x}{y}$$

**$T_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \circ T_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(M) = M$ *de même* $T_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \circ T_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(M) = M$. Alors Ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre** 0,5pt

**Exercice 2 :______________________________________________________________4pts**

La quantité de substance contenue dans le sang à un instant $t$ est donnée approximativement par la fonction $q$ définie par :
$q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t})$ où $t \geq 0$ est le temps exprimé en heure, $q_0$ la quantité de substance injectée en milligramme.

1) Etablissons le tableau de variation de $q$.

- Domaine de définition :

$\boldsymbol{D_q = [0\ ;\ +\infty[}$

- Limite aux bornes de $\boldsymbol{D_q}$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} q(t) = q_0\left(e^0 - e^0\right) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{x\to+\infty} q(t) = 0}$

- Dérivée :

Pout tout $t \geq 0$, $\boldsymbol{q'(t) = q_0\left(-0,5e^{-0,5t} + e^{-t}\right)}$

- Sens de variation :

Posons $\boldsymbol{q'(t) \geq 0}$

$-0,5e^{-0,5t} + e^{-t} \geq 0 \Leftrightarrow -0,5e^{-0,5t} + \frac{1}{e^t} \geq 0 \Leftrightarrow -0,5e^{0,5t} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 0,5e^{0,5t} \leq 1 \Leftrightarrow e^{0,5t} \leq \frac{1}{0,5} \Leftrightarrow 0,5t \leq \ln 2$

$\Leftrightarrow t \leq 2\ln 2 \Leftrightarrow t \in [0\ ;\ 2\ln 2]$

$q'(t) \geq 0\ sur\ [0\ ;\ 2\ln 2]\ et\ q'(x) \leq 0\ sur\ [2\ln 2\ ;\ +\infty[$. **0,5pt**

- Tableau de variation :

| $t$ | $0$ | $2\ln 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $q'(t)$ | $+$ | | $-$ |
| $q(t)$ | $0$ ↗ | $\left(\frac{q_0}{4}\right)$ | ↘ $0$ |

**0,5pt**

$q(2\ln 2) = q_0\left(e^{-0,5\times 2\ln 2} - e^{-2\ln 2}\right)$

$= q_0\left(e^{-\ln 2} - e^{-\ln 4}\right) = q_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = q_0 \times \frac{1}{4}$

2) On désire contrôler les effets de cette substance. Pour cela il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre 2 valeurs $q_m$ et $q_M$.

$q_m = 1,2\ mg$ est le seuil d'efficacités et $q_M = 2,6\ mg$ est le seuil de toxicité. Déduisons du tableau de variation de $q$, les valeurs qu'on peut donner à $q_O$ pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique.

$q_m < q(t) < q_M \Leftrightarrow q_m < q_0(e^{-0,5t} - e^{-t}) < q_M$

$\Leftrightarrow 1,2 < q_0(e^{-0,5t} - e^{-t}) < 2,6 \Leftrightarrow 1,2 < \frac{q_0}{4} < 2,6 \Leftrightarrow 4,8 < q_0 < 10,4 \Leftrightarrow q_0 \in ]4,8\ ;\ 10,4[$

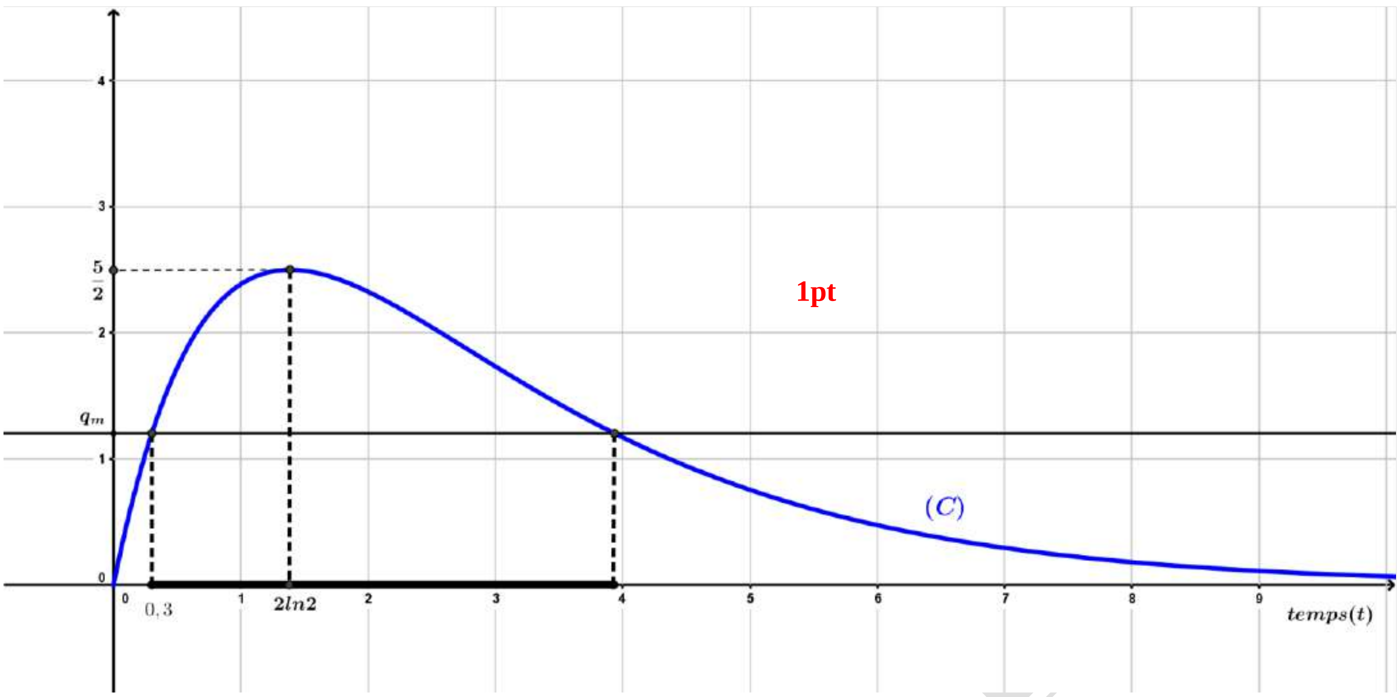
**Les valeurs qu'on peut donner à $q_O$ sont compris entre $4,8$ $et$ $10,4$** **1pt**

3) On pose $q_0 = 10$.

a) Traçons soigneusement la courbe de $q$ dans un repère de votre choix.

$q(t) = 10(e^{-0,5t} - e^{-t})$ où $t \geq 0$

| $t$ | $0$ | $2\ln 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $q'(t)$ | $+$ | | $-$ |
| $q(t)$ | $0$ ↗ | $\left(\frac{5}{2}\right)$ | ↘ $0$ |




b) Déterminons graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace.

**$I = [0,3 \ ; \ 4[$ est l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace** 1pt

## Problème :______________________________________________10pts

Pour tout entier $n$ strictement positif on considère la fonction $f_n$ définie sur $]0 \ ; \ +\infty[$ par : $f_n = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$. On note $(C_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans le repère orthogonal $(O \ ; \ \vec{\imath} \ ; \ \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : Etude de $f_1$

La fonction $f_1$ est définie sur $]0 \ ; \ +\infty[$ par $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1) Déterminons $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = \frac{\ln(0^+)}{0^+} = -\infty \qquad et \qquad \lim_{x\to +\infty} f_1(x) = 0.$$

**On en déduit que $(C_1)$ admet deux asymptotes** :

**Une asymptote verticale d'équation $x = 0$** ; 1pt

**Une asymptote horizontale d'équation $y = 0$** .

2) Etudions le sens de variation de $f_1$ et donnons le tableau de variation de $f_1$.

$\forall \ x \in \ ]0 \ ; \ +\infty[ \ \ f_1'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x.\ln x}{x^4} = \frac{x - 2\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

$\forall \ x \in \ ]0 \ ; \ +\infty[ \ \ f_1'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$ ; le signe de $f_1$ dépend de celui de $1 - 2\ln x$

Pour $1 - 2\ln x \geq 0$ on a :

$1 - 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow 2\ln x \leq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \in \left]0 \ ; \ e^{\frac{1}{2}}\right]$

Alors :

$\forall \ x \in \left]0 \ ; \ e^{\frac{1}{2}}\right]$ ; **$f'_1(x) \geq 0$. Alors $f_1$ est croissante sur $\left]0 \ ; \ e^{\frac{1}{2}}\right]$.**

0,5pt

$\forall \ x \in \left[e^{\frac{1}{2}} \ ; \ +\infty\right[$ ; **$f_1{}'(x) \leq 0$. Alors $f_1$ est décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}} \ ; \ +\infty\right[$.**

- Tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $e^{\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\left(\frac{1}{2e}\right)$ | ↘ | $0$ |

0,5pt

3) Donnons une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à $(C_1)$.

$(T)$ : $y = f_1'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 0$ avec $f_1'(x) = 1$ et $f_1(x) = 0$

**$(T)$ : $y = x - 1$.** 0,5pt

4) Déterminons $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$. Que peut – on en déduire pour $C_2$.

La fonction $f_1$ est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_1(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = \frac{\ln 0^{+2}}{0^{+2}} = \frac{(-\infty)^2}{0^+} = +\infty$ ; $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}.\frac{\ln x}{x}\right) = 0 \times 0 = 0$ ; $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 0}$

On en déduit que $C_2$ admet deux asymptotes :

**- Une asymptote verticale d'équation $x = 0$**

**- une asymptote horizontale d'équation $y = 0$** 1pt

5) Calculons $f_2{}'(x)$ et donnons le tableau de variations de $f_2$.

$\forall\, x \in\ ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f_2'(x) = \frac{\left(2\times\frac{1}{x}\ln x\right)x^2 - 2x(\ln x)^2}{x^4} = \frac{2x\ln x - 2x(\ln x)^2}{x^4} = \frac{2x\ln x(1-\ln x)}{x^4}$

$\boldsymbol{\forall\, x \in\ ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f_2'(x) = \frac{2\ln x(1-\ln x)}{x^3}}$ 0,5pt

Le signe de $f_2{}'(x)$ dépend de son numérateur.

$\begin{cases} \ln x \leq 0 & sur\ ]0\ ;\ 1] \\ \ln x \geq 0 & sur\ [1\ ;\ +\infty[ \end{cases}$ et $\begin{cases} 1-\ln x \geq 0 & sur\ ]0\ ;\ e] \\ 1-\ln x \leq 0 & sur\ [e\ ;\ +\infty[ \end{cases}$

- Tableau de signe

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $1-\ln x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_2'(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | |

- Tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_2(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $(0)$ | ↗ | $(e^{-2})$ | ↘ | $0$ |

0,5pt

Partie B :

1) Etudions le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ ;

$f_1(x) - f_2(x) = \frac{(\ln x)}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x(1-\ln x)}{x^2}$

$\boldsymbol{f_1(x) - f_2(x) < 0\ \ sur\ ]0\ ;\ 1[\ \cup\ ]e\ ;\ +\infty[}$.

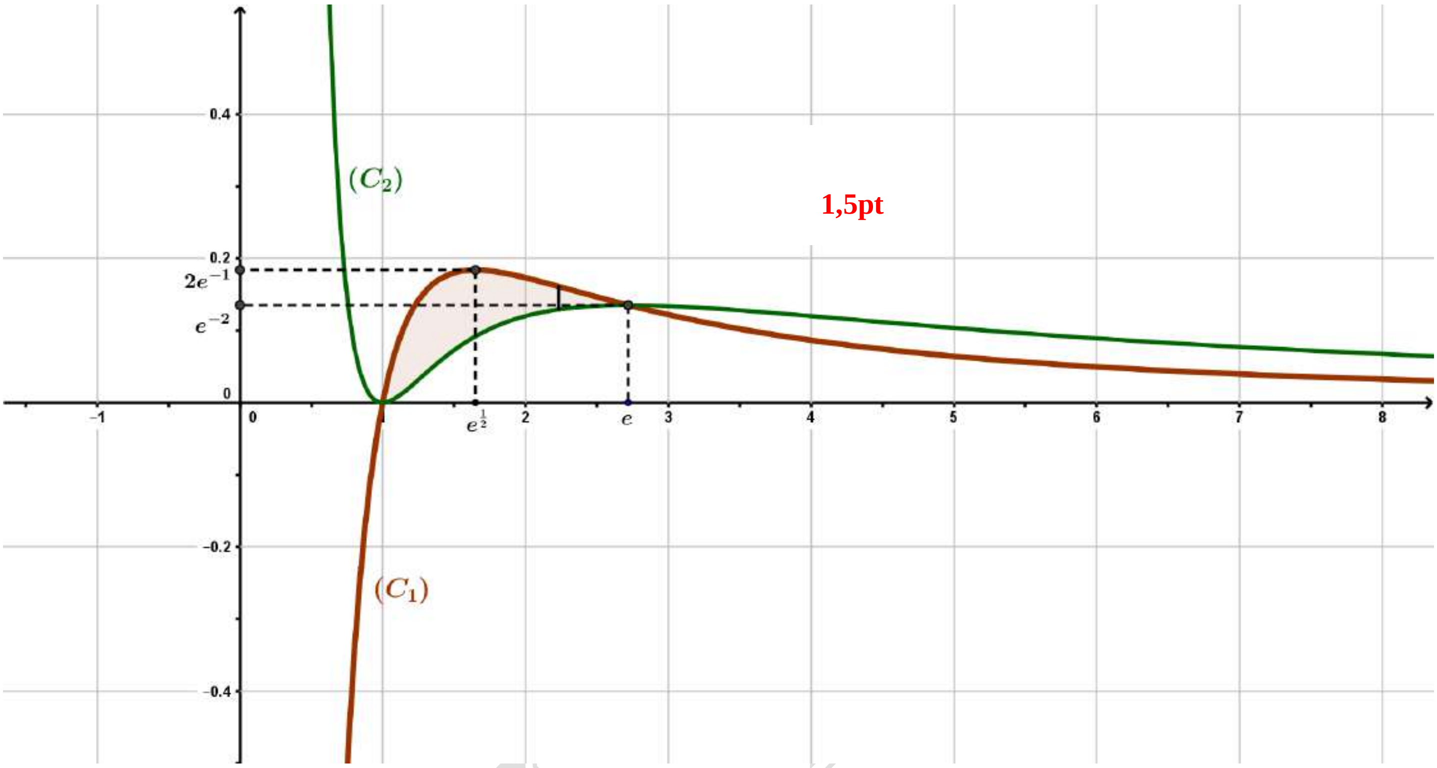
$\boldsymbol{f_1(x) - f_2(x) > 0\ \ sur\ ]1\ ;\ e[}$ 0,5pt

$\boldsymbol{f_1(x) - f_2(x) = 0\ \ sur\ \{1\ ;\ e\}}$

Déduisons-en la position relative de $(C_1)$ et $(C_2)$.

0,5pt

**$\forall x \in ]0\ ;\ 1[\cup]e\ ;+\infty[\ ;\ f_1(x)-f_2(x)<0.\ alors\ (C_1)$ est en dessous de $(C_2)\ sur\ ]0\ ;\ 1[\cup]e\ ;+\infty[$.**
**$\forall x \in ]1\ ;\ e[\ ,f_1(x)-f_2(x)>0$. Alors $(C_1)$ est au-dessus de $(C_2)\ sur\ ]1\ ;\ e[$.**
**$\forall x \in \{1\ ;\ e\}\ ;\ f_1(x)-f_2(x)=0$. Alors $(C_1)\ et\ (C_2)$ sont confondues aux points d'abscisses $1\ et\ e$.**
- Traçons $(C_1)\ et\ (C_2)$ dans le même repère orthogonal.




Partie C :

$m\ \acute{e}tant$ un entier naturel non nul, on pose $I_m=\int_1^e f_m(x)\,dx$.

1) On pose $F(x)=\frac{1+\ln x}{x}$. Calculons $F'(x)$.

$F'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-(1+\ln x)}{x^2}=\frac{1-1-\ln x}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}\quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{F'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}=-f_1(x)}$ 0,5pt

Déduisons-en $I_1$.

$I_1=\int_1^e f_1(x)\,dx=[-F(x)]_1^e=-F(e)+F(1)=-\frac{1+\ln e}{e}+\frac{1+\ln 1}{1}=-\frac{2}{e}+1\quad\Leftrightarrow\quad I_1=1-2e^{-1}$ 0,5pt

2) En utilisant une intégration par parties, montrons que $I_{m+1}=-\frac{1}{e}+(m+1)I_m$

$I_{m+1}=\int_1^e f_{m+1}(x)\,dx=\int_1^e\frac{(\ln x)^{m+1}}{x^2}dx$

Posons :

$u=(\ln x)^{m+1}\ \Leftrightarrow u'=(m+1)\frac{1}{x}(\ln x)^m$

$v'=\frac{1}{x^2}\ \Leftrightarrow\ v=-\frac{1}{x}$

$I_{m+1}=\left[-\frac{1}{x}(\ln x)^{m+1}\right]_1^e-\int_1^e-\frac{1}{x}(\ln x)^m\frac{1}{x}(m+1)dx$

$\quad=-\frac{1}{e}(\ln e)^{m+1}+(m+1)\int_1^e\frac{(\ln x)^m}{x^2}dx$

$\quad=-\frac{1}{e}+(m+1)I_m$

$\boldsymbol{D'o}$ù, $\boldsymbol{I_{m+1} = -\frac{1}{e} + (m+1)I_m}$. **1pt**

3) Calculons $I_2$ puis l'aire en $cm^2$ du domaine compris entre $(C_1)$ $et$ $(C_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ $et$ $x = e$.

$I_{m+1} = -\frac{1}{e} + (m+1)I_m$ et pour $m = 1$ ; on a :

$I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{1}{e} + 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) = -\frac{1}{e} + 2 - \frac{4}{e} = 2 - \frac{5}{e}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{I_2 = 2 - 5e^{-1}}$ **0,5pt**

$A = \int_1^e [f_1(x) - f_2(x)]\, dx.ua =?$

$u.a = 2 \times 10\ cm^2 = 20\ cm^2$

$\int_1^e [f_1(x) - f_2(x)]\, dx = \int_1^e \left[\frac{\ln x}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x^2}\right] dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx - \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx = I_1 - I_2 = (1 - 2e^{-1}) - (2 - 5e^{-1})$

$= 1 - 2e^{-1} - 2 + 5e^{-1} = -1 + 3e^{-1}$

$A = \int_1^e [f_1(x) - f_2(x)]\, dx.ua = (-1 + 3e^{-1}) \times 20\ cm^2$

$\boldsymbol{A = \left(-1 + 3e^{-1}\right) \times 20\ cm^2 = 2,07\ cm^2}$. **0,5pt**

# Baccalauréat Malien : Session de juin 2014 (TSE)

## Exercice 1 : 6pts

I) On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, $\forall z \in \mathbb{C}$ , $h_n(z) = z^n(1 - z)$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ ; résoudre l'équation $h_n(z) = h_0(z)$. **1pt**

2) On se propose de résoudre le système suivant : (1) $\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$

a) Montrez que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solution. **0,5pt**

b) Soit $z_0$ l'une de ces solutions, calculez, en fonction du module $\rho$ et l'argument $\theta$ de $z_0$ , l'argument de $1 - z_0$ ; le module et l'argument de ${z_0}^n(1 - z_0)$. **1,5pt**

c) En déduire que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$. **0,5pt**

Quel est l'ensemble des solutions du système ? **0,5pt**

II) 1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)$ : $11x + 8y = 79$.

a) Montrez que si $(x\ ;\ y)$ est solution de $(E)$ alors $y \equiv 3[11]$ **0,5pt**

b) Résoudre alors l'équation $(E)$. **0,5pt**

2) Le prix total de 41 $pièces$ détachées réparties en trois lots est de 48000F

Le prix d'une pièce du 1er lot est 4800F ; le prix d'une pièce du 2ème lot est 3600F et le prix d'une pièce du 3ème lot est 400F. Déterminez le nombre de pièces de chaque lot. **1pt**

NB : On pourra utiliser l'équation $(E)$. Les parties I) et II) sont indépendantes.

## Exercice 2 : 4pts

I) Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm.

Quelle est l'effectif de la classe sashant qu'il est compris entre 50 et 60 ? **2pt**

II) Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres $x,\ y,\ z,\ t\ et\ h$ dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- Le 1er chiffre est pair ;
- La somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- Le troisième est la différence des deux premiers(le 1er moins le 2ème) ;
- Le 1er chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
- Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ? **2pt**

NB : Les parties I) et II) sont indépendantes.

## Problème : 10pts

**Partie A** : Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1) a) Déterminez les limites de $\varphi$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat de $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$. **1pt**

b) Calculer $\varphi'(x)$ et étudiez son signe. Dressez le tableau de variation de $\varphi$. **1,5pt**

2) Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une notée $\alpha$ est dans $[1\ ;\ +\infty[$. Vérifiez que $1,79 < \alpha < 1,80$ **1pt**

3) En déduire le signe de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

**Partie B** : On donne les fonction $f\ \ et\ \ g$ définies par $f(x) = (2x+1)e^{-x}\ \ et\ \ g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

Leurs courbes sont respectivement notées $(C_f)\ \ et\ \ (C_g)$.

1) Déterminez les domaines de définition de $f\ \ et\ de\ g$ puis calculez leurs limites aux bornes de ces domaines de définition. **1pt**

2) Montrez que $(C_f)\ \ et\ \ (C_g)$ admettent au point $A(0\ ;\ 1)$ une tangente commune $(T)$ donnez une équation cartésienne de $(T)$. **1,5pt**

3) a) Vérifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où $\varphi$ est la fonction définie dans la partie A. **0,5pt**

b) Etudiez le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. **0,5pt**

c) En déduire la position relative des courbes $(C_f)\ \ et\ \ (C_g)$. **0,5pt**

4) a) Déterminez une primitive $G$ de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

b) Déterminez les réels $a\ et\ b$ tels que la fonction $F$ définie par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

c) Déduire une primitive $H$ de $f - g$ sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

d) Calculez l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes $(C_f)\ \ et\ \ (C_g)$ et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}\ \ et\ \ x = 0$. **0,5pt**

NB : Les tracés de $(C_f)\ \ et\ \ (C_g)$ ne sont pas demandés.

## Exercice 1 : 6pts

I) On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, $\forall z \in \mathbb{C}$ , $h_n(z) = z^n(1-z)$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ ; résolvons l'équation $h_n(z) = h_0(z)$.

Soit $z = x + yi$, le complexe de module $r$ et d'argument $\theta$ cette solution

$h_n(z) = h_0(z) \Leftrightarrow z^n(1-z) = z^0(1-z) \Leftrightarrow z^n(1-z) = (1-z) \Leftrightarrow z^n = 1$

$\Leftrightarrow [r\ ;\ \theta]^n = [1\ ;\ 0 + 2k\pi]$ notation polaire

$$\Leftrightarrow [r^n\ ;\ n\theta] = [1\ ;\ 2k\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Donc $\boldsymbol{S = \left\{\left[1\ ;\ \frac{2k\pi}{n}\right]\right\}\ avec\ k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n-1\}}$ **1pt**

2) On se propose de résoudre le système suivant : (1) $\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1-z| \end{cases}$

a) Montrons que l'équation $|z| = |1-z|$ a une infinité de solution.

$|z| = |1-z| \Leftrightarrow |x + yi| = |(1-x) + yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1-x)^2+y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

**Alors l'équation $|z| = |1-z|$ a une infinité de solution $S = \left\{\frac{1}{2} + yi\right\}\ avec\ y \in \mathbb{R}$** **0,5pt**

b) Soit $z_0$ l'une de ces solutions, calculons, en fonction du module $\rho$ et l'argument $\theta$ de $z_0$ , l'argument de $1 - z_0$ ; le module et l'argument de ${z_0}^n(1-z_0)$.

Soit $z_0 = \frac{1}{2} + y_0 i$ le complexe de module $\rho$ et l'argument $\theta$.

$1 - z_0 = 1 - \frac{1}{2} - y_0 i = \frac{1}{2} - y_0 i = \overline{z_0}$

$|1 - z_0| = |\overline{z_0}| = |z_0| = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{|1 - z_0| = \rho}$

$\arg(1 - z_0) = \arg(\overline{z_0}) = -\arg(z_0) = -\theta \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\arg(1 - z_0) = -\theta}$ **0,5pt**

$|{z_0}^n(1-z_0)| = |{z_0}^n| \times |1 - z_0| = |z_0|^n \times |1 - z_0| = \rho^n \times \rho = \rho^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{|{z_0}^n(1-z_0)| = \rho^{n+1}}$ **0,5pt**

$\arg[{z_0}^n(1-z_0)] = \arg({z_0}^n) + \arg(1-z_0) = n\arg(z_0) + \arg(1-z_0) = n\theta - \theta = (n-1)\theta$

$\boldsymbol{\arg[{z_0}^n(1-z_0)] = (n-1)\theta}$ **0,5pt**

c) Déduisons-en que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$.

: (1) $\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1-z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_n(z_0) = 1 \\ |z_0| = |1-z_0| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {z_0}^n(1-z_0) = 1 \\ z_0 = \frac{1}{2} + y_0 i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\rho^{n+1}\ ;\ (n-1)\theta] = [1\ ;\ 0 + 2k\pi] \\ \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{1}{2} + y_0 i \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^{n+1} = 1 \\ (n-1)\theta = 2k\pi \\ \rho\cos\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \cos\theta = \frac{1}{2} \\ (n-1)\theta = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\rho = 1} \\ \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}\ ou\ \theta = -\frac{\pi}{3}} \\ \boldsymbol{(n-1)\theta = 2k\pi}\quad \textbf{(3)} \end{cases}$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, on a :

**(3) :** $\boldsymbol{(n-1)\theta = 2k\pi \Leftrightarrow (n-1)\frac{\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow n - 1 = 6k \Leftrightarrow n = 1 + 6k \Leftrightarrow n \equiv 1[6]}$

Pour $\theta = -\frac{\pi}{3}$, on a :

**(3) :** $\boldsymbol{(n-1)\theta = 2k\pi \Leftrightarrow (n-1)\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2k\pi \Leftrightarrow -n + 1 = 6k \Leftrightarrow n = 1 - 6k \Leftrightarrow n \equiv 1[6]}$

**D'où, le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$** **0,5pt**

L'ensemble des solutions du système est $z_0$ de module $\rho = 1$ et d'argument $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

$\boldsymbol{S = \left\{\left[1\ ;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]\right\}\ avec\ k \in \mathbb{Z}\ \ ou\ \ S = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}}$ … **0,5pt**

II) 1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)$ : $11x + 8y = 79$.

a) Montrons que si $(x\ ;\ y)$ est solution de $(E)$ alors $y \equiv 3[11]$

Si $(x\ ;\ y)$ est solution de $(E)$ alors, $11x + 8y = 79$

$11x + 8y = 79 \Leftrightarrow 8y = 79 - 11x$

$\Leftrightarrow 8y \equiv 79[11]$

$\Leftrightarrow 8y \equiv 2[11]$

$\Leftrightarrow -3y \equiv -9[11]$ Car $8 \equiv -3[11]$ $et$ $2 \equiv -9[11]$

$\Leftrightarrow y \equiv 3[11]$

**D'où, si $(x\ ;\ y)$ est solution de $(E)$ alors $y \equiv 3[11]$.** **0,5pt**

b) Résolvons alors l'équation $(E)$.

$y \equiv 3[11] \Leftrightarrow y = 3 + 11k$

En remplaçant $y$ par sa valeur dans $(E)$ on a :

$(E)$ : $11x + 8y = 79 \Leftrightarrow 11x + 8(3 + 11k) = 79$

$\Leftrightarrow 11x + 24 + 88k = 79$

$\Leftrightarrow 11x = 55 - 88k$

$\Leftrightarrow x = 5 - 8k$

**D'où $S = \{(5 - 8k\ ;\ 3 + 11k)\}$ $avec$ $k \in \mathbb{Z}$** **0,5pt**

2) Le prix total de 41 $pièces$ détachées réparties en trois lots est de 48000F

Le prix d'une pièce du 1er lot est 4800F ; le prix d'une pièce du 2ème lot est 3600F et le prix d'une pièce du 3ème lot est 400F. Déterminons le nombre de pièces de chaque lot.

Soit $x$ ; $y$ $et$ $z$ les nombres de pièces respective du du 1er lot, du 2ème lot et du 3ème lot

$x > 0$ ; $y > 0$ $et$ $z > 0$

$$\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 4800x + 3600y + 400z = 48000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 41 \\ 48x + 36y + 4z = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 41 \\ 12x + 9y + z = 120 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 41 - x - y \quad (1) \\ z = 120 - 12x - 9y \end{cases} \Leftrightarrow 41 - x - y = 120 - 12x - 9y$$

$$\Leftrightarrow -x - y + 12x + 9y = 120 - 41$$

$$\Leftrightarrow 11x + 8y = 79$$

D'après 1) b) $\begin{cases} x = 5 - 8k \\ y = 3 + 11k \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$ $et$ $y = 3$ $avec$ $k = 0$

Puis que

En remplaçant $x$ $et$ $y$ par leurs valeurs dans (1), on aura :

(1) : $z = 41 - x - y$

$= 41 - (5) - (3)$

$z = 33$

**$(5\ ;\ 3\ ;\ 33)$ sont respectivement les nombres de pièces du 1er lot, 2ème lot et 3ème lot.** **1pt**

## Exercice 2 : 4pts

I) Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm.

Quelle est l'effectif de la classe sashant qu'il est compris entre 50 et 60 ?

Soit $x$ l'effectif des fille et $y$ celui des garçons.

On note $z$ l'effectif de la classe tel que $50 < z < 60$

$$\begin{cases} x + y = z \\ 160x + 173{,}5y = 167z \\ 50 < z < 60 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{160x + 173{,}5y}{167} = x + y \Leftrightarrow 160x + 173{,}5y = 167x + 167y$$

$$\Leftrightarrow 7x - 6{,}5y = 0 \Leftrightarrow 70x - 65y = 0 \Leftrightarrow 14x - 13y = 0 \Leftrightarrow 14x = 13y$$

$$14x = 13y \Leftrightarrow \begin{cases} 13/14x \quad PGCD(13\ ;\ 14) = 1 \quad alors\ d'après\ Gauss \quad 13/x \\ 14/13x \quad PGCD(14\ ;\ 13) = 1 \quad alors\ d'après\ Gauss \quad 14/y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13/x \Leftrightarrow x = 13k \\ 14/y \Leftrightarrow y = 14k \end{cases}$$

$z = x + y \Leftrightarrow z = 27k$

$50 < z < 60 \Leftrightarrow 50 < 27k < 60$

$\Leftrightarrow 1{,}85 < k < 2{,}22$

$\Leftrightarrow k = 2$

Alors $z = 54$

**L'effectif de la classe est donc 54** **2pt**

II) Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres $x,\ y,\ z,\ t\ et\ h$ dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- Le 1[er] chiffre est pair $\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x = 2k}$ avec $k$ un entier positif
- La somme des deux premiers chiffres est 15 $\Leftrightarrow\ x+y=15 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 15-2k}$
- Le troisième est la différence des deux premiers(le 1[er] moins le 2[ème]) $\Leftrightarrow\ z = x-y \Leftrightarrow \boldsymbol{z=-15+4k}$
- Le 1[er] chiffre est le produit du troisième par le quatrième $\Leftrightarrow\ x = z\times t \Leftrightarrow t=\frac{x}{z} \Leftrightarrow t=\frac{2k}{-15+4K}=2k'$
- Le nombre est divisible par 9. $\Leftrightarrow\ xyzth \equiv 0[9]$

La combinaison cherchée est : $xyzth \equiv 0[9]$

$$\left.\begin{array}{l} * \ \ x=2k \Leftrightarrow x\in\{0\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\} \\ * \ \ x+y=15 \Leftrightarrow (x\ ;\ y)=\{(6\ ;\ 9)\ ;\ \ (8\ ;\ \ 7)\} \\ * \ \ z=x-y \Leftrightarrow x>y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{x=8\ ;\ y=7\ \ et\ \ z=1}$$

$$*\ \ x=z\times t \Leftrightarrow t=\frac{x}{z}=\frac{8}{1}=8 \Leftrightarrow \boldsymbol{t=8}$$

$$\begin{aligned} xyzth \equiv 0[9] &\Leftrightarrow h+10t+100z+1000y+10000x \equiv 0[9] \\ &\Leftrightarrow h+t+z+y+x \equiv 0[9] \\ &\Leftrightarrow h+8+1+7+8 \equiv 0[9] \\ &\Leftrightarrow h+24 \equiv 0[9] \\ &\Leftrightarrow h+6 \equiv 0[9] \\ &\Leftrightarrow h \equiv -6[9] \\ &\Leftrightarrow h \equiv 3[9] \quad \text{car} \quad -6 \equiv 3[9] \\ &\Leftrightarrow h = 3+9k \Leftrightarrow \boldsymbol{h=3} \ \ avec\ \ k=0 \end{aligned}$$

Donc $x=8\ ;\ y=7\ ;\ z=1\ ;\ t=8\ et\ h=3$

**Alors la combinaison cherchée est 87183** 2pt

## Problème : 10pts

**Partie A :** Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2+x+1)e^{-x}-1$

1) a) Déterminons les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interprétons graphiquement le résultat de $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = (+\infty)(+\infty)-1=+\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty}$ 0,25pt

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0-1=-1 \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1}$ 0,25pt

**$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = -1$. Alors la courbe représentative de φ admet une asymptote horizontale d'équation $y=-1$** 0,5pt

b) Calculons $\varphi'(x)$ et étudions son signe.

$\forall\, x\in\mathbb{R}\ ;\ \varphi'(x) = (2x+1)e^{-x}-e^{-x}(x^2+x+1) = (2x+1-x^2-x-1)e^{-x} = (-x^2+x)e^{-x}$

$\boldsymbol{\forall\, x\in\mathbb{R}\ ;\ \varphi'(x) = x(1-x)e^{-x}}$ 0,5pt

Pour tout réel, le signe de $\varphi'(x)$ dépend de celui de $x(1-x)$.

$x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0\ \ ou\ \ x=1$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

$\boldsymbol{\varphi'(x) \le 0\ \ sur\ \ ]-\infty\ ;\ 0] \cup [1\ ;\ +\infty[}$

$\boldsymbol{\varphi'(x) \ge 0\ sur\ [0\ ;\ 1]}$ 0,5pt

- Dressons le tableau de variation de $\varphi$.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | | | |
| $\varphi(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $(0)$ | ↗ | $(3e^{-1}-1)$ | ↘ | $(0)$ | ↘ | $-1$ |

0,5pt

2) Démontrons que l'équation $\varphi(x)=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une notée $\alpha$ est dans $[1\ ;\ +\infty[$.

$*$ $\varphi(0) = 0$. Alors 0 est une solution de $\varphi(x)$ **(1)**

$*$ $\varphi(x)$ *est* continue et strictement décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$ , elle réalise une bijection de $]1\ ;\ +\infty[$ vers $]-1\ ;\ 3e^{-1}-1[$. Or $0 \in\ ]-1\ ;\ 3e^{-1}-1[$, alors l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in [1\ ;\ +\infty[$. **(2)**

**D'après (1) et (2), l'équation $\boldsymbol{\varphi(x) = 0}$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une notée $\boldsymbol{\alpha}$ est dans $[\mathbf{1}\ ;\ +\infty[$** **0,75pt**

Vérifions que $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(1{,}79) = 0{,}0007\\ \varphi(1{,}80) = -0{,}0015\end{array}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi(1{,}79) \times \varphi(1{,}80) < 0}.$$

**Alors d' après le théorème des valeurs intermédiaire $\boldsymbol{1{,}79 < \alpha < 1{,}80}$** **0,25pt**

3) Déduisons-en le signe de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{\varphi(x) \geq 0\ \ sur\ ]-\infty\ ;\ \alpha]}$;

$\boldsymbol{\varphi(x) \leq 0\ \ sur\ [\alpha\ ;\ +\infty[}$. **0,5pt**

Partie B : On donne les fonction $f$ *et* $g$ définies par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ *et* $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

Leurs courbes sont respectivement notées $(C_f)$ *et* $(C_g)$.

1) Déterminons les domaines de définition de $f$ *et de* $g$ puis calculons leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.

$\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} = ]-\infty\ ;\ +\infty[$ ; $\boldsymbol{D_g} = \mathbb{R} = ]-\infty\ ;\ +\infty[$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x) = +\infty}$ ; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x) = 0}$ **1pt**

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{g(x) = 0^-}$ ; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{g(x) = 0^+}$

2) Montrons que $(C_f)$ *et* $(C_g)$ admettent au point $A(0\ ;\ 1)$ une tangente commune $(T)$

$f(0) = 1$ *et* $g(0) = 1$

**Le point $\boldsymbol{A(0\ ;\ 1)}$ est commun à $\boldsymbol{(C_f)}$ *et* $\boldsymbol{(C_g)}$. Alors $\boldsymbol{(C_f)}$ *et* $\boldsymbol{(C_g)}$ admettent au point $\boldsymbol{A(0\ ;\ 1)}$ une tangente commune $\boldsymbol{(T)}$.** **0,5pt**

- Donnez une équation cartésienne de $(T)$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ f'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x+1) = (2-2x-1)e^{-x} \Leftrightarrow \boldsymbol{f'(x) = (1-2x)e^{-x}}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ g'(x) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+2-4x^2-4x-1}{(x^2+x+1)^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{g'(x) = \frac{-2x^2-2x\mp1}{(x^2+x+1)^2}}$

$$f'(0) = 1 \quad et \quad g'(0) = 1$$

$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1(x-0) + 1 \Leftrightarrow y = x+1$

$(T') :\ y = g'(0)(x-0) + g(0) = 1(x-0) + 1 \Leftrightarrow y = x+1$

**Alors $\boldsymbol{(T) :\ x - y + 1 = 0}$ est une équation cartésienne de $\boldsymbol{(T)}$.** **1pt**

3) a) Vérifions que pour tout $x \in \mathbb{R}$ , $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où $\varphi$ est la fonction définie dans la partie A.

$\forall x \in \mathbb{R}$ , $f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{(x^2+x+1)(2x+1)e^{-x}-(2x+1)}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)[(x^2+x+1)e^{-x}]}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$

$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}}$ **0,5pt**

b) Etudions le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$. Alors le signe de $f(x) - g(x)$ dépend de son numérateur

$(2x+1)\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0$ *ou* $\varphi(x) = 0$

**Proposition de correction : Session de juin 2014 (T.SE)**

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ *ou* $x = 0$ *et* $x = \alpha$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\varphi(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)-g(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |

$\forall\, x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right] \cup [\alpha\ ;\ +\infty[\ ;\ f(x) - g(x) \leq 0$.

$\forall\, x \in \left[-\frac{1}{2}\ ;\ \alpha\right]\ ;\ f(x) - g(x) \geq 0$. **0,5pt**

c) Déduisons la position relative des courbes $(C_f)$ $et$ $(C_g)$.

$\forall\, x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[ \cup\, ]\alpha\ ;\ +\infty[\ ;\ f(x) - g(x) < 0$. Alors $(C_f)$ est en dessous de $(C_g)$ sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[ \cup\, ]\alpha\ ;\ +\infty[$.

$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right[ \cup\, ]0\ ;\ \alpha[\ ;\ f(x) - g(x) > 0$. **Alors $(C_f)$ est au-dessous de $(C_g)$ sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right[ \cup\, ]0\ ;\ \alpha[$.** **0,5pt**

$\forall\, x \in \left\{-\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \alpha\right\}\ ;\ f(x) - g(x) = 0$. **Alors $(C_f)$ $et$ $(C_g)$ sont confondues aux points d'abscisses $-\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \alpha$.**

4) a) Déterminons une primitive $G$ de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ;\ g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \Leftrightarrow \boldsymbol{G(x) = \ln|x^2 + x + 1|}$ **0,5pt**

b) Déterminons les réels $a\ et\ b$ tels que la fonction $F$ définie par $F(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

$F(x) = (ax + b)e^{-x}$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si , $\forall\, x \in \mathbb{R}\,;\ F'(x) = f(x)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}\,;\ F'(x) = f(x) \Leftrightarrow ae^{-x} - e^{-x}(ax + b) = f(x)$

$\Leftrightarrow (a - ax - b)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x}$

Par identification :

$\begin{cases} -a = 2 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$

**$F(x) = (ax + b)e^{-x}$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = -2$ $et$ $b = -3$.** **0,5pt**

c) Déduisons une primitive $H$ de $f - g$ sur $\mathbb{R}$.

$H(x) = F(x) - G(x) \Leftrightarrow \boldsymbol{H(x) = -(2x + 3)e^{-x} - \ln|x^2 + x + 1|}$ **0,5pt**

d) Calculez l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes $(C_f)$ $et$ $(C_g)$ et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ $et$ $x = 0$.

$(C_f)$ est au-dessous de $(C_g)$ sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right[$

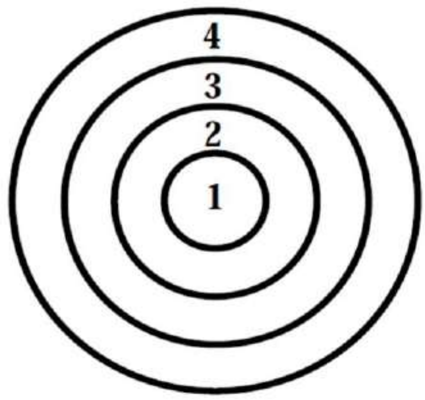
$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx.ua = [F(x) - G(x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} = [-(2x + 3)e^{-x} - \ln|x^2 + x + 1|]_{-\frac{1}{2}}^{0} = -3 + 2e^{\frac{1}{2}} + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$\boldsymbol{A = \left(-3 + 2e^{\frac{1}{2}} + \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) cm^2 = 0,00976 \ldots\ cm^2}$ **0,5pt**

## Exercice 1 : 5pts

Un cible est constituée de cercles concentriques de rayons respectifs 1, 2, 3, 4 déterminant 4 zones numérotées (1), (2), (3), (4) (chaque zone est une couronne), on considère l'extérieur de la cible comme une $5^{\text{ème}}$ zone.

1) Un joueur lance une flèche. La probabilité d'atteindre l'une des zones 1, 2, 3, 4 est proportionnelle à l'aire de cette zone. (Rappel : l'aire d'un disque de rayon $r$ est $A = \pi r^2$). Montrer que les probabilités $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ d'atteindre respectivement les zones (1), (2), (3), (4) sont égales à K, 3k, 5k, 7k où K est un nombre que l'on ne demande pas de calculer dans cette question. **1,5pt**




2) – Si la flèche touche la zone (1), le joueur gagne 4 000 FCFA

– Si la flèche touche la zone (2), le joueur gagne 3 000 FCFA

– Si la flèche touche la zone (3), le joueur gagne 2 000 FCFA

– Si la flèche touche la zone (4), le joueur gagne 1 000 FCFA

– Si la flèche touche la zone (), le joueur perd 30 000 FCFA

On suppose que l'espérance mathématique de $X$ est nulle.

On appelle $X$ le gain obtenu à l'issue d'une partie (lancé d'une flèche)

a) Déterminez les probabilités $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ et la probabilité $P_5$ de manquer la cible. **1,5pt**

b) Donnez sous forme de tableau la loi de probabilité de $X$. **1pt**

II) Trois villages désignés par les lettres A, B et C sont disposés en triangle comme suit :

Le village A est à 4 km de B, à 3 km de C et le village B est à 5 km de C.

Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages, déterminez son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages. **1pt**

## Exercice 2 : 5pts

I) $\alpha\ et\ \beta$ sont deux entiers naturels et $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tels que le nombre de diviseurs de $N^2$ est le triple du nombre de diviseurs de $N$.

1) Prouvez que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$. **1pt**

2) Déduisez en les valeurs de $N$. **0,5pt**

II) Le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Soient $A,\ B\ et\ C$ trois points d'affixes respectives $a = -1 + 3i\ ;\ b = -4 + 2i\ et\ c = 1 + 4i$.

Soit $f$ la transformation du plan dans lui-même qui à tout points $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par : $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de $f$. **1pt**

2) Déterminez l'affixe du point $B'$ image de $B$ par la transformation $f$. Vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{CA}\ et\ \overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux. **0,5pt**

3) Soit $M(x\ ;\ y)$ où $x\ et\ y$ sont des entiers relatifs et $M'$ son image par $f$. Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}\ et\ \overrightarrow{CA}$ sont

orthogonaux si et seulement si $x+3y=2$. **1pt**

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $x+3y=2$ et en déduire l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5\ ;\ 5]$. **1pt**

## Problème : **10pts**

**Partie A :** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) On désigne par $M(x\ ;\ y)$ un point du plan, $M_1(x_1\ ;\ y_1)$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y=x$ et $M'(x';\ y')$ l'image de $M_1$ l'image de $M_1$ par la symétrie orthogonale d'axe $(O\ ;\ \vec{\imath})$.

a) Exprimez $x'\ et\ y'$ en fonction de $x\ et\ y$. **1pt**

b) Caractérisez l'application qui transforme $M\ en\ M'$. **1pt**

c) On désigne par $r$ l'application qui au point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M''(x'';\ y'')$ définie par : $\begin{cases}x''=1+y\\ y''=1-x\end{cases}$

Montrez que, $r$ est une rotation dont on précisera le centre $\Omega$ et d'angle $\theta$. **1pt**

2) Lorsque le point le point $M$ décrit la droite d'équation $y=x$, déterminez l'ensemble décrit par le point $M''$ ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$. **1,5pt**

3) Au point $M(x\ ;\ y)$ on associe le point $M_2(x_2\ ;\ y_2)$ définies par $\begin{cases}x_2=1+3y\\ y_2=1-2x\end{cases}$

a) Quelle est la nature de l'ensemble $(E)$ des points $M_2$ lorsque $M$ décrit le cercle unité de centre O ? **1pt**

b) Caractériser l'image de $(E)$ par la rotation $r$ définie en 1) c). **0,5pt**

**Partie B :** Soit la fonction numérique $f$ à variable réelle $x$ définie par $f(x)=(2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

1) Etudiez les variations de $f$ et tracez sa courbe $(C_f)$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. Précisez les tangentes à $(C_f)$ aux points d'abscisses $-1\ et\ -\frac{1}{2}$. **1,5pt**

2) Soit $(C'_f)$la courbe image de $(C_f)$ par la symétrique orthogonale par rapport à $(O\ ;\ \vec{\imath})$.

On pose $\Gamma=(C_f)\cup(C'_f)$. Tracez $\Gamma$ dans le même repère que $(C_f)$. **0,5pt**

3) On considère le point $A(-1\ ;\ 0)$ et la droite $\Delta$ d'équation $x=-2$. Soit $m$ un paramètre non nul, $D$ la droite d'équation $y=mx$ et $D'$ la droite orthogonale à $D$ en $O(0\ ;\ 0)$. Les droites $(D)\ et\ (D')$ coupent $\Delta$ en $P\ et\ P'$ respectivement.

Soit $k$ le milieu du segment $[PP']$, la droite $(AK)$ coupent $D\ et\ D'\ en\ M\ et\ M'$ respectivement.

a) Déterminez les coordonnées de $M\ et\ M'$ en fonction de $m$. **1,5pt**

b) On appelle $\Gamma_1$ l'ensemble des points $M$ lorsque $m\in\mathbb{R}^*$ et $\Gamma'_1$ celui des points $M'$ lorsque $m\in\mathbb{R}^*$. Trouvez une relation entre $\Gamma_1\ et\ \Gamma'_1$. **0,5pt**

## Exercice 1 : 5pts

Montrons que les probabilités $P_1, P_2, P_3, P_4$ d'atteindre respectivement les zones (1), (2), (3), (4) sont égales à K, 3k, 5k, 7k où K est un nombre que l'on ne demande pas de calculer dans cette question.

Soient $A_1, A_2, A_3, et\ A_4$ l'aire respective des cercles concentriques de rayons 1, 2, 3, 4

$A_n = \pi {r_n}^2$ avec $1 \leq n \leq 4$

$A_1 = \pi$ ; $A_2 = 4\pi$ ; $A_3 = 9\pi$ ; $A_4 = 16\pi$

Soient $a_1$ , $a_2$, $a_3$ ; $a_4$ l'aire respective des couronnes (1), (2), (3), (4) .

$a_1 = A_1 = \pi \Leftrightarrow a_1 = \pi$

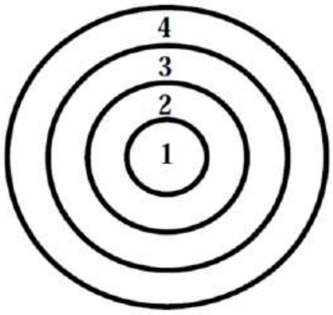
$a_2 = A_2 - A_1 = 4\pi - \pi = 3\pi \Leftrightarrow a_2 = 3\pi$

$a_3 = A_3 - A_2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi \Leftrightarrow a_3 = 5\pi$ **0,5pt**

$a_4 = A_4 - A_3 = 16\pi - 9\pi = 7\pi \Leftrightarrow a_4 = 7\pi$

La probabilité d'atteindre l'une des zones 1, 2, 3, 4 est proportionnelle à l'aire de cette zone si et seulement si il existe un réel $\alpha$ tel que : $\frac{P_n}{a_n} = \alpha\ avec\ 1 \leq n \leq 4 \Leftrightarrow \frac{P_1}{a_1} = \frac{P_2}{a_2} = \frac{P_3}{a_3} = \frac{P_4}{a_4} = \alpha$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_2}{3\pi} = \frac{P_3}{5\pi} = \frac{P_4}{7\pi} = \alpha}$ **0,5pt**




$P_n = \alpha a_n$

Pour $n = 1$ on a :

$P_1 = \alpha a_1 = \alpha(\pi) \Leftrightarrow \boldsymbol{P_1 = k\quad avec\ \ k = \alpha\pi}$

Pour $n = 2$ on a :

$P_2 = \alpha a_2 = \alpha(3\pi) = 3\alpha\pi \Leftrightarrow \boldsymbol{P_2 = 3k\ avec\ \ k = \alpha\pi}$

Pour $n = 3$ on a :

$P_3 = \alpha a_3 = \alpha(5\pi) = 5\alpha\pi \Leftrightarrow \boldsymbol{P_3 = 5k\ avec\ \ k = \alpha\pi}$

Pour $n = 4$ on a :

$P_4 = \alpha a_4 = \alpha(7\pi) = 7\alpha\pi \Leftrightarrow \boldsymbol{P_4 = 7k\ avec\ \ k = \alpha\pi}$

**D'où les probabilités $P_1, P_2, P_3, P_4$ d'atteindre respectivement les zones (1), (2), (3), (4) sont égales à $K, 3k, 5k, 7k$ où $K = \alpha\pi$** **0,5pt**

2) – Si la flèche touche la zone (1), le joueur gagne 4 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (2), le joueur gagne 3 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (3), le joueur gagne 2 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (4), le joueur gagne 1 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (5), le joueur perd 30 000 FCFA

On suppose que l'espérance mathématique de $X$ est nulle.

On appelle $X$ le gain obtenu à l'issue d'une partie (lancé d'une flèche)

La variable aléatoire $\Omega(X) = \{-30\,000\ ;\ 1\,000\ ;\ 2\,000\ ;\ 3\,000\ ;\ 4\,000\} = \{X_5\ ;\ X_4\ ;\ X_3\ ;\ X_2\ ;\ X_1\}$

a) Déterminons les probabilités $P_1, P_2, P_3, P_4$ et la probabilité $P_5$ de manquer la cible.

$P(x = X_1) = P(x = 4\,000) = P_1 = k$

$P(x = X_2) = P(x = 3\,000) = P_2 = 3k$

$P(x = X_3) = P(x = 2\,000) = P_3 = 5k$

$P(x = X_4) = P(x = 1\,000) = P_4 = 7k$

$P(x = X_5) = P(x = -30\,000) = P_5 = ?$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} P_i = 1 \\ E(X) = \sum_{i=1}^{5} X_i P_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1 \\ X_1P_1 + X_2P_2 + X_3P_3 + X_4P_4 + X_5P_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k+3k+5k+7k+P_5=1 \\ 4\,000k+9\,000k+10\,000k+7\,000k-30\,000P_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{16k+P_5=1} \\ \mathbf{30\,000k-30\,000P_5=0} \end{cases}$$ **1pt**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16k+P_5=1 \\ k-P_5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_5=k \\ 17k=1 \end{cases} \Leftrightarrow P_5=k=\frac{1}{17}$$

Alors $\boldsymbol{P_1=\frac{1}{17}}$ ; $\boldsymbol{P_2=\frac{3}{17}}$ ; $\boldsymbol{P_3=\frac{5}{17}}$ ; $\boldsymbol{P_4=\frac{7}{17}}$ ***et*** $\boldsymbol{P_5=\frac{1}{17}}$ **0,5pt**

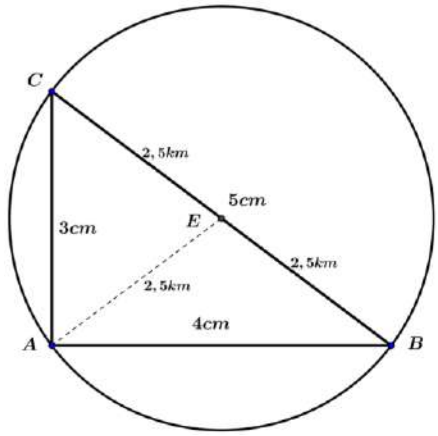
b) Donnons sous forme de tableau la loi de probabilité de $X$.

| $X$ | $4\,000$ | $3\,000$ | $2\,000$ | $1\,000$ | $-30\,000$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x=X)$ | $\frac{1}{17}$ | $\frac{3}{17}$ | $\frac{5}{17}$ | $\frac{4}{17}$ | $\frac{1}{17}$ |

**1pt**

II) Trois villages désignés par les lettres A, B et C sont disposés en triangle comme suit :
Le village A est à 4 km de B, à 3 km de C et le village B est à 5 km de C. C'est-à-dire :
$AB=4km$ ; $AC=3km$ $et$ $BC=5km$

Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages, déterminons son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages.




On constate que : $BC^2=AB^2+AC^2$. Alors les trois villages sont assimilables à un triangle rectangle en A.

**Le milieu E de l'hypoténuse $BC$ détermine le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.** **0,5pt**

**Par conséquent le point $E$ est l'emplacement exact de ce forage**

$EA=EB=EC=\frac{BC}{2}=2{,}5$

**La distance qui sépare le forage de chacun des villages est $2,5\ km$.** **0,5pt**

## Exercice 2 :______________________________________5pts

I) $\alpha$ $et$ $\beta$ sont deux entiers naturels et $N=2^{\alpha}\times3^{\beta}$ tels que le nombre de diviseurs de $N^2$ est le triple du nombre de diviseurs de $N$.

1) Prouvons que $(\alpha-1)(\beta-1)=3$.

$N=2^{\alpha}\times3^{\beta}$ $et$ $N^2=2^{2\alpha}\times3^{2\beta}$

$nbr(D_N)=(\alpha+1)(\beta+1)$ $et$ $nbr(D_{N^2})=(2\alpha+1)(2\beta+1)$

Le nombre de diviseurs de $N^2$ est le triple du nombre de diviseurs de $N$ équivaut à :

$(2\alpha+1)(2\beta+1)=3(\alpha+1)(\beta+1) \Leftrightarrow 4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1=3\alpha\beta+3\alpha+3\beta+3$

$\Leftrightarrow 4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1-3\alpha\beta-3\alpha-3\beta=3$

$\Leftrightarrow \alpha\beta-\alpha-\beta+1=3$

$\Leftrightarrow \alpha(\beta-1)-(\beta-1)=3$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{(\alpha-1)(\beta-1)=3}$ **1pt**

2) Déduisons - en les valeurs de $N$.

$$(\alpha-1)(\beta-1)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-1=1 \\ \beta-1=3 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \alpha-1=3 \\ \beta-1=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=2 \end{cases}$$

Pour $\alpha=2$ $et$ $\beta=4$. Alors $N=2^2\times3^4=324$

Pour $\alpha=4$ $et$ $\beta=2$. Alors $N=2^4\times3^2=144$

$\boldsymbol{N=\{144\ ;\ 324\}}$ **0,5pt**

II) Le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Soient $A,\ B\ et\ C$ trois points d'affixes respectives $a=-1+3i$ ; $b=-4+2i$ $et$ $c=1+4i$.

Soit $f$ la transformation du plan dans lui-même qui à tout points $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par : $z'=(2-2i)z+1$.

1) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $f$.

$z' = az + b \quad avec \;\; a = 2 - 2i \quad et \quad b = 1$

$\boldsymbol{a \in \mathbb{C}}$ ***et*** $\boldsymbol{|a| = 2\sqrt{2} \neq 1}$. **Alors $f$ est une similitude directe** **0,5pt**

Ses éléments caractéristique sont :

**- son rapport $k = |a| = 2\sqrt{2}$**

**- Son centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{-1+2i} = \frac{1(-1-2i)}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$** **0,5pt**

**- son angle $\theta = \arg(a) = -\frac{\pi}{4}$**

2) Déterminons l'affixe du point $B'$ image de $B$ par la transformation $f$.

$z'_B = (2-2i)z_B + 1 = (2-2i)(-4+2i) + 1 = -8 + 4i + 8i + 4 + 1 = -3 + 12i$

**L'affixe du point $B'$ image de $B$ par la transformation $f$ est $z'_B = -3 + 12i$.** **0,25pt**

Vérifions que les vecteurs $\overrightarrow{CA} \;\; et \;\; \overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{CA} \;\; et \;\; \overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB'} = 0$

$c = 1 + 4i \Leftrightarrow C(1 \;;\; 4) \quad ; \quad a = -1 + 3i \Leftrightarrow A(-1 \;;\; 3) \quad ; \quad b' = -3 + 12i \Leftrightarrow B'(-3 \;;\; 12)$

$\overrightarrow{CA}\left|\begin{array}{l} x_A - x_C = -1 - 1 = -2 \\ y_A - y_C = 3 - 4 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}(-2 \;;\; -1)$

$\overrightarrow{CB'}\left|\begin{array}{l} x_{B'} - x_C = -3 - 1 = -4 \\ y_{B'} - y_C = 12 - 4 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{CB'}(-4 \;;\; 8)$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB'} = \binom{-2}{-1}.\binom{-4}{8} = (-2)(-4) + (-1)(8) = 8 - 8 = 0$

**$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB'} = 0$. Alors les vecteurs $\overrightarrow{CA} \;\; et \;\; \overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux**. **0,25pt**

3) Soit $M(x \;;\; y)$ où $x \;\; et \;\; y$ sont des entiers relatifs et $M'$ son image par $f$. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{CM'} \;\; et \;\; \overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.

$$\begin{aligned} f(M) = M' &\Leftrightarrow z'_M = (2-2i)z_M + 1 \\ &\Leftrightarrow x' + y'i = (2-2i)(x+yi) + 1 \\ &\Leftrightarrow x' + y'i = 2x + 2yi - 2xi + 2y + 1 \\ &\Leftrightarrow x' + yi = (2x + 2y + 1) + (-2x + 2y)i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x + 2y + 1 \\ y' = -2x + 2y \end{cases} \end{aligned}$$

**Expression analytique de $f$.** **0,5pt**

Supposons que $\overrightarrow{CM'} \;\; et \;\; \overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux. Alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM'}.\overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow \binom{x'-1}{y'-4}.\binom{-2}{-1} = 0 \Leftrightarrow -2x' + 2 - y' + 4 = 0 &\Leftrightarrow -2x' - y' + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2(2x + 2y + 1) - (-2x + 2y) + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow -4x - 4y - 2 + 2x - 2y + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x - 6y + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x - 3y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x - 3y = -2 \\ &\Leftrightarrow x + 3y = 2 \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

**D'où, les vecteurs $\overrightarrow{CM'} \;\; et \;\; \overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.** **0,5pt**

4) Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$

$x + 3y = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 3y \Leftrightarrow x \equiv 2[3] \Leftrightarrow x = 2 + 3k$

$x + 3y = 2 \Leftrightarrow (2 + 3k) + 3y = 2 \Leftrightarrow 3y = -3k \Leftrightarrow y = -k$

**$S = \{(2 + 3k \quad ; \quad -k)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.** **0,5pt**

Déduisons-en l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5 \;;\; 5]$.

$$\begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ -5 \le y \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le 2 + 3k \le 5 \\ -5 \le -k \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2{,}3 \le k \le 1 \\ -5 \le k \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{-2 \;;\; -1 \;;\; 0 \;;\; 1\}$$

Pour $k = -2$, on a :

$\boldsymbol{x = -4 \quad et \quad y = 2}$

Pour $k = -1$, on a :

$\boldsymbol{x = -1 \quad et \quad k = 1}$

Pour $k = 0$, on a :

$\boldsymbol{x = 2 \quad et \quad y = 0}$

Pour $k = 1$, on a :

$\boldsymbol{x = 5 \quad et \quad y = -1}$

$M(x\ ;\ y) = \{\ (-4\ ;\ 2)\ ;\ (-1\ ;\ 1)\ ;\ (2\ ;\ 0)\ ;\ (5\ ;\ -1)\ \}$ **0,5pt**

## Problème : 10pts

**Partie A :** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) On désigne par $M(x\ ;\ y)$ un point du plan, $M_1(x_1\ ;\ y_1)$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation (D) : $y = x$.

a) Exprimons $x'$ *et* $y'$ en fonction de $x$ *et* $y$.

$\boldsymbol{S_D(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = x \end{cases}}$ **0,25pt**

$M'(x';\ y')$ l'image de $M_1$ par la symétrie orthogonale d'axe $(O\ ;\ \vec{\imath})$. Alors :

$\boldsymbol{S_{(Ox)}(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_1 \\ y' = -y_1 \end{cases}}$ **0,25pt**

$\boldsymbol{S_{(Ox)}(M_1) = M'} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_1 = y \\ y' = -y_1 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}}$ **0,5pt**

b) Caractérisez l'application qui transforme $M$ *en* $M'$.

$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \Leftrightarrow x' + y'i = y - xi \Leftrightarrow x' + y'i = -i(x + yi) \Leftrightarrow \boldsymbol{z' = -iz}$ **0,5pt**

$z' = az + b \quad avec\ \ a = -i \quad et \quad b = 0$

**$a \in \mathbb{C}$ *et* $|a| = 1$. Alors l'application qui transforme $M$ *en* $M'$ est une rotation de centre $O(0\ ;\ 0)$ et d'angle $\theta = \arg(a) = -\frac{\pi}{2}$** **0,5pt**

c) On désigne par $r$ l'application qui au point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M''(x'';\ y'')$ définie par : $\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$

Montrons que, $r$ est une rotation dont on précisera le centre $\Omega$ et d'angle $\theta$.

$r(M) = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 1 + y & (1) \\ y'' = 1 - x & (2) \end{cases}$

$(1) + i(2) \Leftrightarrow x'' + y''i = 1 + y + i - xi$

$\Leftrightarrow= x'' + y''i = -i(x + yi) + 1 + i$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{z'' = -iz + 1 + i}$ **0,5pt**

$\Leftrightarrow \boldsymbol{z'' = az + b \quad avec \quad a = -i \quad et \quad b = 1 + i}$

**$a \in \mathbb{C}$ *et* $|a| = 1$. Alors $r$ est une rotation de** :

**-centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1+i} = 1 \quad ; \quad \Omega(0\ ;\ 1)$** **0,5pt**

**- d'angle $\theta = \arg(a) = -\frac{\pi}{2}$**

2) Lorsque le point le point $M$ décrit la droite d'équation $y = x$, déterminons l'ensemble décrit par le point $M''$ ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$.

$r(M) = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x'' - 1 \\ x = 1 - y'' \end{cases}$

Si le point $M$ décrit la droite d'équation $y = x$. Alors le point $M''$ décrit : $x'' - 1 = 1 - y'' \Leftrightarrow x'' + y'' - 2 = 0$

**Ainsi, l'ensemble décrit par le point $M''$ est la droite d'équation : $x'' + y'' - 2 = 0$.** **0,75pt**

$I\left(\frac{x+x''}{2}\ ;\ \frac{y+y''}{2}\right)$. L'ensemble décrit par le point I est :

$$\begin{cases} x_I = \frac{x+x''}{2} = \frac{x+1+y}{2} = \frac{x+y+1}{2} \\ y_I = \frac{y+y''}{2} = \frac{y+1-x}{2} = \frac{-x+y+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 = 2x_I \\ -x+y+1 = 2y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2x_I - 1 & (1) \\ -x+y = 2y_I - 1 & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Leftrightarrow 2y = 2x_I + 2y_I - 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = x_I + y_I - 1}$

$(1)-(2) \Leftrightarrow 2x = 2x_I - 1 - 2y_I + 1 \Leftrightarrow 2x = 2x_I - 2y_I \Leftrightarrow \boldsymbol{x = x_I - y_I}$

Si le point $M$ décrit la droite d'équation $y = x$. Alors le point $I$ décrit : $x_I + y_I - 1 = x_I - y_I \Leftrightarrow 2y_I = 1$

**L'ensemble décrit par le point I est : $y_I = \frac{1}{2}$** **0,75pt**

3) Au point $M(x\ ;\ y)$ on associe le point $M_2(x_2\ ;\ y_2)$ définies par : $\begin{cases} x_2 = 1+3y \\ y_2 = 1-2x \end{cases}$

a) Quelle est la nature de l'ensemble $(E)$ des points $M_2$ lorsque $M$ décrit le cercle unité de centre O ?

$\begin{cases} x_2 = 1+3y \\ y_2 = 1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = \frac{x_2-1}{3}} \\ \boldsymbol{x = \frac{1-y_2}{2}} \end{cases}$ **0,25pt**

$M$ décrit le cercle unité de centre O si et seulement si : $x^2 + y^2 = 1$.

$$x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1-y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2-1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_2-1)^2}{9} + \frac{(y_2-1)^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{(x_2-1)^2}{3^2} + \frac{(y_2-1)^2}{2^2} = 1}$$ **0,5pt**

**L'ensemble $(E)$ des points $M_2$ cherchés est une ellipse d'équation : $\frac{(x_2-1)^2}{3^2} + \frac{(y_2-1)^2}{2^2} = 1$.** **0,25pt**

b) Caractériser l'image de $(E)$ par la rotation $r$ définie en 1) c).

En 1) c) : $r(M) = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 1+y \\ y'' = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x''-1 \\ x = 1-y'' \end{cases}$

Au point $M(x\ ;\ y)$ on associe le point $M_2(x_2\ ;\ y_2)$ définies par : $\begin{cases} x_2 = 1+3y \\ y_2 = 1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1+3(x''-1) \\ y_2 = 1-2(1-y'') \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3x''-2 \\ y_2 = 2y''-1 \end{cases}$$

Alors :

$$(E) : \frac{(x_2-1)^2}{3^2} + \frac{(y_2-1)^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(3x''-2-1)^2}{3^2} + \frac{(2y''-1-1)^2}{2^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x''-3)^2}{3^2} + \frac{(2y''-2)^2}{2^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^2(x''-1)^2}{3^2} + \frac{2^2(y''-1)^2}{2^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (x''-1)^2 + (y^2-1)^2 = 1$$

**L'image de $(E)$ par la rotation $r$ définie en 1) c) est cercle unité de centre $\Omega(1\ ;\ 1)$** **0,5pt**

**Partie B :** Soit la fonction numérique $f$ à variable réelle $x$ définie par $f(x) = (2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

1) Etudions les variations de $f$ et tracez sa courbe $(C_f)$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

- Domaine de définition :

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ x+1 \geq 0\}$

$\boldsymbol{D_f} = [\mathbf{-1}\ ;\ +\infty[$

- limite aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x\to -1} f(x) = (2(-1)-1)\sqrt{\frac{-1+1}{2}} = 0 \iff \boldsymbol{\lim_{x\to -1} f(x) = 0} \quad ; \quad \boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \mathbf{0,25pt}$$

- Dérivabilité de $f$ en $-1$ :

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\frac{(2x-1)(x+1)}{2}}{(x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}} = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x-1}{2\sqrt{\frac{x+1}{2}}} = \frac{-3}{2\times 0^+} = -\infty$$

$\boldsymbol{\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}} = -\infty.$ ***Alors f n'est pas dérivable en* $-\mathbf{1}$. $(\boldsymbol{C_f})$ *admet en ce point une démi tangente verticale***

- Dérivée :

$$\forall\ x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) = 2\sqrt{\frac{x+1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{2}}}(2x-1) = \frac{4\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}(2x-1)}{2\sqrt{\frac{x+1}{2}}} = \frac{4x+4+2x-1}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}} = \frac{6x+3}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{\forall\ x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) = \frac{6x+3}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}}} \qquad \mathbf{0,25pt}$$

- sens de variarion :

$\forall\ x \in [-1\ ;\ +\infty[\ ;\ \sqrt{\frac{x+1}{2}} \geq 0.$ Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $6x+3$

$\boldsymbol{\forall\ x \in \left[-1\ ;\ -\frac{1}{2}\right[\ ;\ f'(x) < 0}$. **Alors $\boldsymbol{f}$ est strictement décroissante sur $\left[-\mathbf{1}\ ;\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right[$.**

$\boldsymbol{\forall\ x \in \left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[\ ;f'(x) > 0}$. **Alors $\boldsymbol{f}$ est strictement croissante sur $\left]-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ ;\ +\infty\right[$.**

$\boldsymbol{\forall\ x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\}\ ;f'(x) = 0}$. **Alors $\boldsymbol{f}$ est constante sur $\left\{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right\}$.**

- tableau de variation :

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $(-1)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\mathbf{0,25pt}$

- Points d'intersection avec les axes :

$(C_f) \cap (Ox)$ : $f(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2} \quad ou \quad x = -1$

$\boldsymbol{(C_f) \cap (Ox) = \left\{(-1\ ;\ 0)\ ;\ \left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)\right\}}$

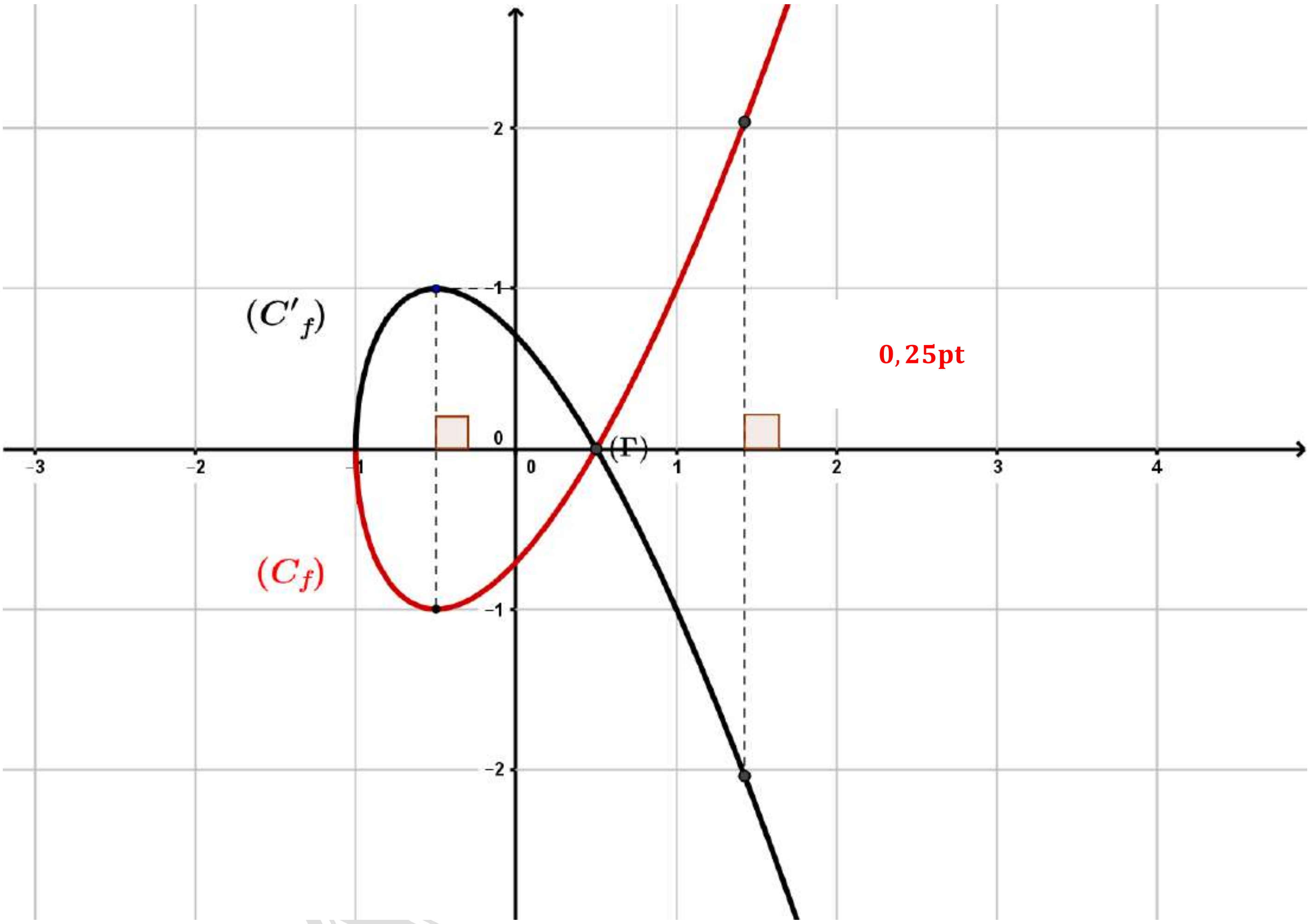
$(C_f) \cap (Oy) : f(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boldsymbol{(C_f) \cap (Oy) = \left\{\left(0\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}}$

- Branches infinies :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. **Alors** $(C_f)$ **admet une branche parabolique de direction** $(O\ ;\ \vec{j})$.

**- Traçons la courbe** $(C_f)$




**- Précisons les tangentes à** $(C_f)$ **aux points d'abscisses** $-1$ $et$ $-\frac{1}{2}$.

$f(x) = (2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$ et $f'(x) = \frac{6x+3}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}}$

$f$ **n'est pas dérivable en** $-1$. $(C_f)$ ***admet une demi tangente verticale d'équation*** $x = -1$ **0,25pt**

$f(-1) = 0$ $et$ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ et $f'(-1) = +\infty$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$\left(T_{-\frac{1}{2}}\right) : y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ .

$(C_f)$ ***admet une demi tangente horizontale d'équation*** $\left(T_{-\frac{1}{2}}\right) : y = -1$ **0,25pt**

2) Soit $(C'_f)$ la courbe image de $(C_f)$ par la symétrique orthogonale par rapport à $(O\ ;\ \vec{i})$.

On pose $\Gamma = (C_f) \cup (C'_f)$. Tracez $\Gamma$ dans le même repère que $(C_f)$.

**Voir figure dans 1)** **0,5pt**

3) On considère le point $A(-1\ ;\ 0)$ et la droite $\Delta$ d'équation $x=-2$. Soit $m$ un paramètre non nul, $D$ la droite d'équation $y=mx$ et $D'$ la droite orthogonale à $D$ en $O(0\ ;\ 0)$. Les droites $(D)\ et\ (D')$ coupent $\Delta$ en $P\ et\ P'$ respectivement.

Soit $k$ le milieu du segment $[PP']$, la droite $(AK)$ coupent $D\ et\ D'\ en\ M\ et\ M'$ respectivement.

a) Déterminons les coordonnées de $M\ et\ M'$ en fonction de $m$.

$(\Delta):\ \boldsymbol{x=-2}\quad ;\ (\boldsymbol{D}):\ \boldsymbol{y=mx}\quad ;$

$*$ $(D')$ perpendiculaire à $(D)$ au point $O(0\ ;\ 0) \Leftrightarrow \forall\, M'(x'\ ;\ y')\in(D')\ ;\ \overrightarrow{OM'}\perp\vec{u}$ où $\vec{u}(1\ ;\ m)$ vecteur directeur de la droite $(D)$.

$$\overrightarrow{OM'}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM'}.\vec{u}=0\Leftrightarrow\binom{x'}{y'}.\binom{1}{m}=0\Leftrightarrow x'+my'=0\Leftrightarrow y'=-\frac{1}{m}x'$$

Alors $(\boldsymbol{D'}):\ \boldsymbol{y'=-\frac{1}{m}x'}$ **0,25pt**

$*$ $(D)\cap(\Delta)=\{P\}\Leftrightarrow\begin{cases}P\in(\Delta)\\P\in(D)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_P=-2\\y_P=mx_P\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_P=-2\\y_P=-2m\end{cases}\Leftrightarrow\boldsymbol{P\binom{-2}{-2m}}$ **0,25pt**

$*$ $(D')\cap(\Delta)=\{P'\}\Leftrightarrow\begin{cases}P'\in(\Delta)\\P'\in(D')\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{P'}=-2\\y_{P'}=-\frac{1}{m}x_{P'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{P'}=-2\\y_{P'}=\frac{2}{m}\end{cases}\Leftrightarrow\boldsymbol{P'\left(-2\ ;\ \frac{2}{m}\right)}$ **0,25pt**

$*$ $k$ le milieu du segment $[PP']\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x_k=\frac{x_P+x_{P'}}{2}=-2\\y_k=\frac{y_P+y_{P'}}{2}=-m+\frac{1}{m}\end{array}\right.\Leftrightarrow\boldsymbol{k\binom{-2}{-m+\frac{1}{m}}}$ **0,25pt**

$*$ La droite $(AK)$ coupent $D\ et\ D'\ en\ M\ et\ M'$ respectivement$\Leftrightarrow(AK)\cap(D)=\{M\}\ et\ (AK)\cap(D')=\{M'\}$

Soit $M(x\ ;\ y)\in(AK)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}et\ \overrightarrow{AK}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AK})=0$

$$\det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AK})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+1&-2+1\\y&-m+\frac{1}{m}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+1&-1\\y&\frac{1-m^2}{m}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(x+1)\left(\frac{1-m^2}{m}\right)+y=0$$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{(AK):y=\frac{m^2-1}{m}(x+1)}$ **0,25pt**

$*$ $(AK)\cap(D)=\{M\}\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(AK)\\M\in(D)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{m^2-1}{m}(x+1)\\y=mx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}mx=\frac{m^2-1}{m}(x+1)\\y=mx\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2x-(m^2-1)x=m^2-1\\y=mx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=m^2-1\\y=m^3-m\end{cases}\Leftrightarrow\boldsymbol{M\big(m^2-1\ ;\ m^2(m-1)\big)}$ **0,25pt**

$*$ $(AK)\cap(D')=\{M'\}\begin{cases}M'\in(AK)\\M'\in(D')\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y'=\frac{m^2-1}{m}(x'+1)\\y'=-\frac{1}{m}x'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{m}x'=\frac{m^2-1}{m}(x'+1)\\y'=-\frac{1}{m}x'\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-x'-(m^2-1)x'=m^2-1\\y'=-\frac{1}{m}x'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\frac{1-m^2}{m^2}\\y'=\frac{m^2-1}{m^3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{M'\left(\frac{1-m^2}{m^2}\ ;\ -\frac{1}{m}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right)\right)}$ **0,25pt**

b) On appelle $\Gamma_1$ l'ensemble des points $M$ lorsque $m\in\mathbb{R}^*$ et $\Gamma'_1$ celui des points $M'$ lorsque $m\in\mathbb{R}^*$. Trouvez une relation entre $\Gamma_1\ et\ \Gamma'_1$.

$M(m^2-1\ ;\ m^3-m)\Leftrightarrow\begin{cases}x=m^2-1\\y=m(m^2-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\pm\sqrt{x+1}\\y=m(m^2-1)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{x+1} \\ y = x\sqrt{x+1} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} m = -\sqrt{x+1} \\ y = -x\sqrt{x+1} \end{cases}$$

L'ensemble des points $M$ cherché lorsque $m \in \mathbb{R}_+^* \ resp(m \in \mathbb{R}_-^*)$ est l'quation $(\Gamma_1)$ : $y = x\sqrt{x+1}$ resp $(y = -x\sqrt{x+1})$

$$M'\left(\frac{1-m^2}{m^2} \ ; \ -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}\left(\frac{\mathbf{1-m^2}}{\boldsymbol{m^2}}\right)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1-m^2}{m^2} \\ y' = -\frac{1}{m}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1-m^2}{m^2} \\ y' = -\frac{1}{m}x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2x' = 1-m^2 \\ y' = \frac{1}{m}x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \frac{1}{x'+1} \\ y' = \frac{1}{m}x' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{\sqrt{x'+1}} \\ y' = -\frac{1}{m}x' \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} m = -\frac{1}{\sqrt{x'+1}} \\ y' = -\frac{1}{m}x' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} = \sqrt{x'+1} \\ y' = -\frac{1}{m}x' \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \frac{1}{m} = -\sqrt{x'+1} \\ y' = -\frac{1}{m}x' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} = \sqrt{x'+1} \\ y' = -x'\sqrt{x'+1} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \frac{1}{m} = -\sqrt{x'+1} \\ y' = x'\sqrt{x'+1} \end{cases}$$

L'ensemble des points $M'$ cherché lorsque $m \in \mathbb{R}_+^* \ resp(m \in \mathbb{R}_-^*)$ est l'quation $(\Gamma_2)$ : $y' = -x'\sqrt{x'+1}$ resp $(y' = x'\sqrt{x'+1})$

: $y' = -x\sqrt{x+1} \, resp\left(y' = x\sqrt{x+1}\right)$

**On a donc** $\begin{cases} \boldsymbol{x' = x} \\ \boldsymbol{y' = -y} \end{cases}$ $\boldsymbol{pour \ \ m} \in \mathbb{R}^*$**. Alors** $(\boldsymbol{\Gamma_1})$ $\boldsymbol{et}$ $(\boldsymbol{\Gamma_2})$ **sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses**. **0,25pt**

# Baccalauréat Malien : Session de juin 2016 ( TSE-STI )

## Exercice 1 : 6pts

Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal direct $(A\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$, unité graphique 1 $cm$. On considère les points $B,\ D\ et\ C$ définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ , $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que $ABCD$ soit un rectangle.

1) Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice. **0,5pt**

2) Soit $E$ l'image de $B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Détermine l'affixe $Z_E\ de\ E$. Construis $E$. **1pt**

3) Détermine les nombres réels $a\ et\ b$ tels que le point $F$ d'affixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points $A$, $B\ et\ C$ affectés respectivement des coefficients $a,\ b\ et\ 1$. **1pt**

4) On considère la similitude directe $S$ qui transforme $A\ en\ E\ et\ B\ en\ F$.

a) Exprime $Z'$ en fonction de $Z\ ou\ Z'$ est l'affixe du point $M'$ image de $M$ par $S$. **1pt**

b) Détermine le centre $\Omega$, l'angle $\theta$ et le rapport $k$ de la similitude $S$. **1pt**

c) Détermine les images de $C\ et\ D\ par\ S$. **0,5pt**

d) Calcule l'aire de l'image par $S$ du rectangle $ABCD$. **1pt**

## Exercice 2 : 4pts

I) On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions $525\ m\ et\ 285\ m$. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

1) La distance comprise entre deux arbres. **0,5pt**

2) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ. **1pt**

II) On considère l'équation $(E) : 11x - 26y = 1$, où $x\ et\ y$ désignent deux nombres entiers relatifs.

1) Vérifie que le couple $(-7\ ;\ -3)$ est une solution de $(E)$. **0,5pt**

2) Résous alors l'équation $(E)$. **1pt**

3) En déduis le couple d'entiers relatifs $(p\ ,\ q)$ solution de $(E)$ que : $0 \leq p \leq 25$. **1pt**

## Problème : 10pts

**Partie A :**

A l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t$, exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématique par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\beta.Q(t)$, où $\beta$ est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1) Montre qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$. **1pt**

2) Calcule la valeur de $\beta$, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à $10^{-4}$ près. **1,5pt**

3) Etudie le sens de variation de $Q$ pour $t \geq 0$. Détermine sa limite en $+\infty$, et trace la courbe représentative $(\Gamma)$ de $Q$ dans le plan $P$. **1,5pt**

4) Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ? On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à $10^{-2}$ près. **1pt**

**Partie B :**

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1) Détermine l'ensemble de définition de $f$. **0,5pt**

2) Etudie les variations de $f$. **1pt**

3) Soit $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ (unité 2cm). Montre que $(C)$ admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation puis préciser la position de $(C)$ par rapport à l'asymptote oblique. **1,5pt**

4) Montre que le point $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour $(C)$. **0,75pt**

5) Donne une équation de la tangente en $I$ à $(C)$. **0,5pt**

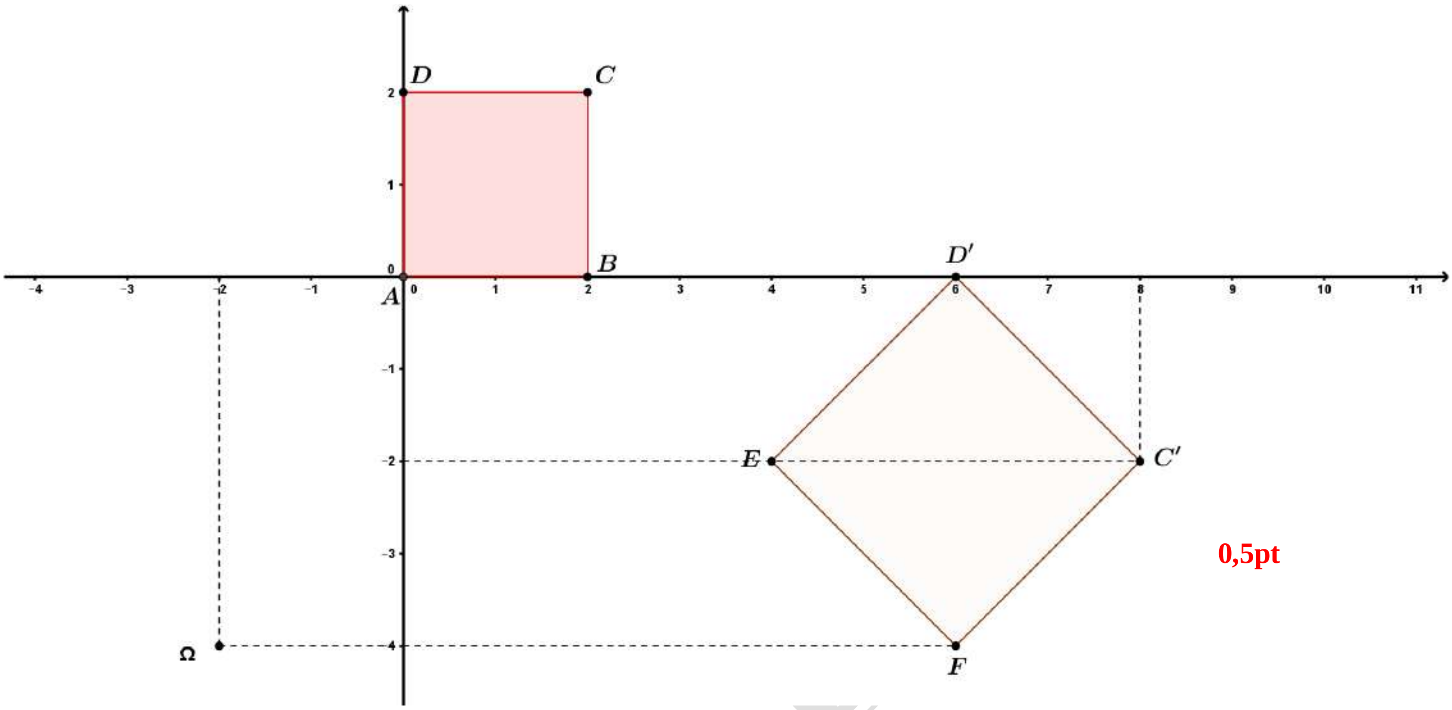
6) Construis $(C)$. **0,75pt**

## Exercice 1 : 6pts

Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal direct $(A\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$, unité graphique $1\ cm$. On considère les points $B,\ D\ et\ C$ définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ , $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que $ABCD$ soit un rectangle.

$\boldsymbol{A(0\ ;\ 0)\ \ ;\ \ B(2\ ;\ 0)\ d'affixe\ Z_B = 2\ \ ;\ \ D(0\ ;\ 2)\ d'affixe\ Z_D = 2i\ \ ;\ \ C(2\ ;\ 2)\ d'affixe\ Z_C = 2 + 2i}$

1) Faisons une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice. **0,5pt**




**0,5pt**

2) Soit $E$ l'image de $B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Déterminons l'affixe $Z_E\ de\ E$. Construis $E$.

$t_{\overrightarrow{DB}}(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow Z_E - Z_B = Z_B - Z_D \Leftrightarrow Z_E = 2Z_B - Z_D \Leftrightarrow \boldsymbol{Z_E = 4 - 2i}$ **1pt**

3) Déterminons les nombres réels $a\ et\ b$ tels que le point $F$ d'affixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points $A,\ B\ et\ C$ affectés respectivement des coefficients $a,\ b\ et\ 1$.

$F = bary\{(A\ ; a)\ ;\ (B\ ;\ b)\ ;\ (C\ ;\ 1)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{FA} + b\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$

$$a\overrightarrow{FA} + b\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow a(Z_A - Z_F) + b(Z_B - Z_F) + (Z_C - Z_F) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow a(-6 + 4i) + b(2 - 6 + 4i) + (2 + 2i - 6 + 4i) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -6a + 4ai - 4b + 4bi - 4 + 6i = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (-6a - 4b - 4) + (4a + 4b + 6) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 4b - 4 = 0 \\ 4a + 4b + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b = -2 & (1) \\ 2a + 2b = -3 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Leftrightarrow a = 1$

En remplaçant $a$ dans (1) :

$3a + 2b = -2\ \Leftrightarrow 3(1) + 2b = -2 \Leftrightarrow b = -\frac{5}{2}$

**D'où $\boldsymbol{a = 1\ \ et\ \ b = -\frac{5}{2}}$** **1pt**

4) On considère la similitude directe $S$ qui transforme $A\ en\ E\ et\ B\ en\ F$.

$S(A) = E\ \ \ et\ \ S(B) = F$

a) Exprimons $Z'$ en fonction de $Z\ ou\ Z'$ est l'affixe du point $M'$ image de $M$ par $S$.

Soit $Z' = az + b$ l'écriture complexe de cette similitude

$$\begin{cases} S(A) = E \\ S(B) = F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_E = aZ_A + b \\ Z_F = aZ_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_E = b \\ Z_F = aZ_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 + 2i \\ 6 - 4i = 2a + 4 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - 2i \\ a = 1 - i \end{cases}$$

**D'où $\boldsymbol{Z' = (1 - i)Z + 4 - 2i}$** **1pt**

b) Déterminons le centre $\Omega$, l'angle $\theta$ et le rapport $k$ de la similitude $S$.

**Le centre Ω d'affixe** $Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{4-2i}{1-1+i} = \frac{4-2i}{i} = -2-4i$ . *Alors le centre de cette similitude est* $\Omega\binom{-2}{-4}$

**Le rapport** $|a| = \sqrt{2}$

**L'angle** $\theta = \arg(a) = -\frac{\pi}{4}$ **1pt**

c) Déterminons les images de $C$ *et* $D$ *par* $S$.

$S(C) = C' \Leftrightarrow Z'_C = (1-i)Z_C + 4 - 2i$

$\Leftrightarrow Z'_C = (1-i)(2+2i) + 4 - 2i$

$\Leftrightarrow Z'_C = 2(1^2 - i^2) + 4 - 2i$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Z'_C = 8 - 2i}$ **0,25pt**

$S(D) = D' \Leftrightarrow Z'_D = (1-i)Z_D + 4 - 2i$

$\Leftrightarrow Z'_D = (1-i)2i + 4 - 2i$

$\Leftrightarrow Z'_D = 2i + 2 + 4 - 2i$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Z'_D = 6}$ **0,25pt**

d) Calcule l'aire de l'image par $S$ du rectangle $ABCD$.

$S(A) = E$ ; $S(B) = F$ ; $S(C) = C'$ *et* $S(D) = D'$

Le rectangle ABCD est un carré. Alors son aire est : $A = C \times C$ *ou* $A = C^2$

$A = EF^2 = |Z_F - Z_E|^2 = |6 - 4i - 4 + 2i|^2 = |2 - 2i|^2 = \sqrt{4 + 4}^2 = 8$

**L'aire de l'image par $S$ du rectangle $ABCD$ est $A = 8\ cm^2$** **1pt**

## Exercice 2 :______________________________________4pts

I) On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions $525\ m$ *et* $285\ m$.

$L = 525\ m$ *et* $l = 285\ m$

Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calculons :

1) La distance comprise entre deux arbres.

Soit $d$ cette distance.

$d = PGCD(525\ ;\ 285) = ?$

$\begin{cases} 525 = 3 \times 5^2 \times 7 \\ 285 = 3 \times 5 \times 19 \end{cases} \Leftrightarrow PGCD(525\ ;\ 285) = 3 \times 5 = 15$

**Alors la distance comprise entre deux arbres est $d = 15\ m$** **0,5pt**

2) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

$N = \frac{Périmètre}{d} = \frac{2(525+285)}{15} = 108$

**Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ est 108 arbres** **1pt**

II) On considère l'équation $(E) : 11x - 26y = 1$, où $x$ *et* $y$ désignent deux nombres entiers relatifs.

1) Vérifions que le couple $(-7\ ;\ -3)$ est une solution de $(E)$.

Le couple $(-7\ ;\ -3)$ est une solution de (E) s'il vérifie l'équation (E).

$(E) : 11x - 26y = 1$

$: 11(-7) - 26(-3) = 1$

$: -77 + 78 = 1$

$: 1 = 1$ *Vraie.*

**Alors le couple $(-7\ ;\ -3)$ est une solution de $(E)$.** **0,5pt**

2) Résous alors l'équation $(E)$.

$\begin{cases} 11(-7) - 26(-3) = 1 & (1) \\ 11x - 26y = 1 & (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \Leftrightarrow 11(-7 - x) - 26(-3 - y) = 0$

$\Leftrightarrow 11(-7 - x) = 26(-3 - y)$

$\Leftrightarrow 11(7 + x) = 26(3 + y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 26/11(7+x)\ ;\ PGCD(26\ ;\ 11)=1.\ Alors\ d'après\ Gauss\ 26/(7+x) \\ 11/26(3+y)\ ;\ PGCD(11\ ;\ 26)=1.\ Alors\ d'après\ Gauss\ 11/(3+y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 26/(7+x) \\ 11/(3+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7+x=26k \\ 3+y=11k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7+26k \\ y=-3+11k \end{cases}$$

$\boldsymbol{S=\{(-7+26k\ \ ;\ \ -3+11k)\}\ avec\ k\in\mathbb{Z}}$ **1pt**

3) Déduisons-en le couple d'entiers relatifs $(p\ ,\ q)$ solution de $(E)$ que : $0\le p\le 25$.

$0\le p\le 25 \Leftrightarrow 0\le -7+26k\le 25$

$\Leftrightarrow 7\le 26k\le 32$

$\Leftrightarrow \frac{7}{26}\le k\le \frac{32}{32}$

$\Leftrightarrow 0{,}21\le k\le 1{,}2$

$\Leftrightarrow k=\{1\}$

Pour $k=1$ on a : $\begin{cases} p=-7+26(1) \\ q=-3+11(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=19 \\ q=8 \end{cases}$

$\boldsymbol{(p\ ;\ q)=(19\ ;\ 8)}$ **1pt**

## Problème : 10pts

**Partie A :**

A l'instant $t=0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t$, exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématique par l'équation différentielle : $Q'(t)=-\beta.Q(t)$, où $\beta$ est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1) Montrons qu'on a $Q(t)=2{,}5e^{-\beta t}$.

$\begin{cases} Q'(t)=-\beta.Q(t) \\ Q(0)=2{,}5 \end{cases}$

$Q'(t)=-\beta.Q(t) \Leftrightarrow Q'(t)+\beta Q(t)=0$. C'est une équation différentielle du premier degré sans second membre d'équation carctéristique : $r+\beta=0 \Leftrightarrow r=-\beta$

L'ensemble solution de cette équation $Q'(t)=-\beta.Q(t)$ est de la forme : $Q(t)=ke^{-\beta t}$ avec $k\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} Q'(t)=-\beta.Q(t) \\ Q(0)=2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(t)=ke^{-\beta t} \\ Q(0)=2{,}5 \Leftrightarrow k=2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q(t)=2{,}5e^{-\beta t}}$ $CQFD$ **1pt**

2) Calculons la valeur de $\beta$, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à $10^{-4}$ près.

Pour $t=$ on a :

$Q(1)=Q(0)-Q(0)\times\frac{30}{100} \Leftrightarrow Q(1)=Q(0)\left(1-\frac{30}{100}\right)$

$\Leftrightarrow 2{,}5e^{-\beta}=2{,}5\left(\frac{70}{100}\right)$

$\Leftrightarrow e^{-\beta}=\frac{7}{10}$

$\Leftrightarrow \beta=\ln\left(\frac{10}{7}\right)$

$\boldsymbol{\beta=\ln\left(\frac{10}{7}\right)}$ ***est* la valeur exacte de β.**

$\boldsymbol{\beta=0{,}3567\ est\ une\ valeur\ décimale\ approchée\ de\ \beta}$ à $\boldsymbol{10^{-4}}$ **près.** **1,5pt**

3) Etudions le sens de variation de $Q$ pour $t\ge 0$.

$D_Q=[0\ ;\ +\infty[$

$Q(x)=2{,}5e^{-\ln\left(\frac{10}{7}\right)t}$

$\forall t\in[0\ ;\ +\infty[\ ;\ \ f'(x)=-2.5\beta e^{-\beta x}$

$\boldsymbol{\forall\ t\ge 0\ ;\ f'(x)<0}$**. Alors $\boldsymbol{f}$ est strictement croissante sur $\boldsymbol{[0\ ;\ +\infty[}$.** **0,5pt**

- Déterminons sa limite en $+\infty$, et traçons la courbe représentative $(\Gamma)$ de $Q$ dans le plan $P$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$ **0,5pt**

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative $(\Gamma)$ de $Q$ en $+\infty$.

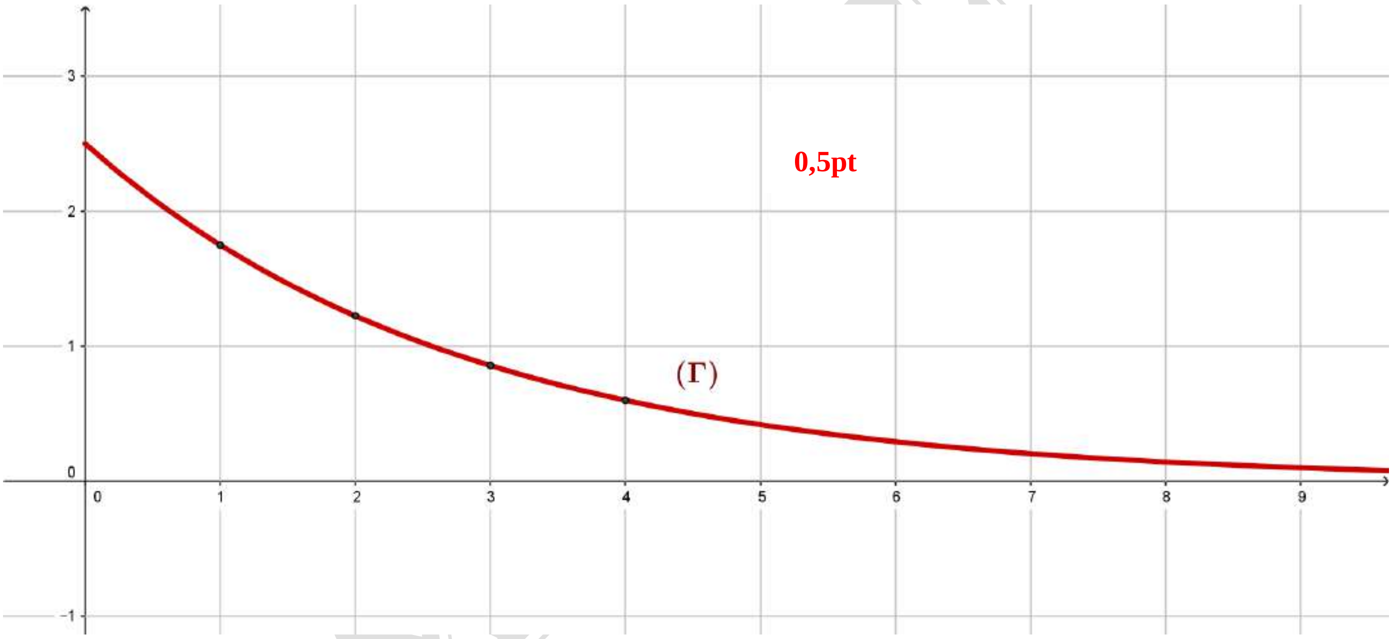
- Tableau de variation :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $Q'(x)$ | $-$ |
| $Q(x)$ | 2,5 ↘ 0 |

- Tableau des valeurs

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,75 | 1,23 | 0,86 | 0,6 |

- Courbe




4) Le temps au bout duquel quantité de substance présente dans le sang a été réduite de moitié :

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à $10^{-2}$ près.

$$2{,}5e^{-\ln\left(\frac{10}{7}\right)t} = \frac{Q(0)}{2} \Leftrightarrow 2{,}5e^{-\ln\left(\frac{10}{7}\right)t} = \frac{2{,}5}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\ln\left(\frac{10}{7}\right)t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{7}{10}\right)t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{7}{10}\right)t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}7)}$$

$t = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}7)}$ **est la valeur exacte** et **$t = 1{,}94$ est une valeur décimale approchée à $10^{-2}$ près** **1pt**

**Partie B :**

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1) Déterminons l'ensemble de définition de $f$.

$D_f = \left\{x/x \in \mathbb{R}\,;\; x \neq 0 \;\; et \;\; \frac{x-1}{x} \neq 0\right\}$

$x \neq 0 \;\; et \;\; \frac{x-1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$\boldsymbol{D_f = \mathbb{R} - \{0\;;\;1\} = ]-\infty\;;\;0[\cup]0\;;\;1[\cup]1\;;+\infty[}$ **0,5pt**

2) Etudions les variations de $f$.

- Domaine : $D_f = \mathbb{R} - \{0\;;\;1\}$

- Limite aux bornes de $D_f$ :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\left(\frac{-\infty}{2}\right) + \ln 1 = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\left(\frac{+\infty}{2}\right) + \ln 1 = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{0}{2} + \ln\left|\frac{-1}{0^-}\right| = \ln(+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{0}{2} + \ln\left|\frac{-1}{0^+}\right| = \ln(+\infty) = +\infty$

$.\,\mathrm{La\ droite\ d'équation\ x = 0\ est\ asymtote\ verticale\ à\ (C) en} + \infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{1}{2} + \ln\left|\frac{0^-}{1}\right| = \ln(0^+) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{1}{2} + \ln\left|\frac{0^+}{1}\right| = \ln(0^+) = -\infty$

$.\,\mathrm{La\ droite\ d'équation\ x = 1\ est\ asymtote\ verticale\ à\ (C) en} - \infty$

- Dérivée :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\;;\;1\}\,;\; f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{-x(x-1)+2x-2(x-1)}{2x(x-1)} = \frac{-x^2+x+2x-2x+2}{2x(x-1)} = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$

$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R} - \{0\;;\;1\}\,;\; f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}}$ **0,5pt**

- Sens de variation :

Etudions le signe de $f'(x)$.

Posons : $-x^2 + x + 2 = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x = -1 \;\; ou \;\; x = 2$

: $2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\; ou \;\; x = 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(x-1)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $-x^2+x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | |

$\boldsymbol{\forall x \in ]-\infty\;;-1[\cup]0\;;\;1[\cup]2\;;+\infty[\;;\; f'(x) < 0}$. **Alors $f$ est strictement décroissante sur** $]-\infty\;;-1[\cup]0\;;\;1[\cup]2\;;+\infty[$

$\boldsymbol{\forall x \in ]-1\;;\;0[\cup]1\;;\;2[\;;\; f'(x) > 0}$. **Alors $f$ est strictement croissante sur** $]-1\;;\;0[\cup]1\;;\;2[$.

$\boldsymbol{\forall x \in \{-1\;;\;2\}\,;\, f'(x) = 0}$. **Alors $f$ est constante sur** $\{-1\;;\;2\}$. **0,5pt**

- Tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $(1{,}19)$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $(-1{,}69)$ | ↘ | $-\infty$ |

3) Soit $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ (unité 2cm). Montrons que $(C)$ admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation puis précisons la position de $(C)$ par rapport à l'asymptote oblique.

$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

Posons $y = -\frac{x}{2}$. Alors $f(x) - y = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right) = \ln 1 = 0$$

$\boldsymbol{\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y] = 0}$. ***Alors*** **$(C)$admet une asymptote oblique d'équationy $\boldsymbol{y = -\frac{x}{2}}$** ***en*** $\pm\infty$. **0,75pt**

- Position :

Posons $f(x) - y = g(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

-Domaine de définition :

$D_g = D_f = \mathbb{R} - \{0\ ;\ 1\}$

- Limite aux borne de $D_g$ :

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ; $\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^+} g(x) = +\infty$ ; $\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^+} g(x) = -\infty$

- Dérivée

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\ ;\ 1\}$ ; $g'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x-x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\ ;\ 1\}$; $g'(x) = \frac{1}{x(x-1)}$. Son signe dépend du dépend du dénominateur

$f$ est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0\ ;\ 1[$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | ‖ | | $-$ | | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $(0)$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ |

$g$ est continue et strictement décroissante sur $]0\ ;\ 1[$. Elle réalise une bijection de $]0\ ;\ 1[$ vers $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

Or $0 \in ]-\infty\ ;\ +\infty[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0\ ;\ 1[$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 1 \quad ou \quad \frac{x-1}{x} = -1$

$$\Leftrightarrow x - 1 = x \quad ou \quad x - 1 = -x$$

$$\Leftrightarrow -1 = 0 \ imp \quad ou \quad x = \frac{1}{2}$$

**Pour tout $\boldsymbol{x} \in ]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ \left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$ ; $\boldsymbol{g(x) > 0}$. Alors $(\boldsymbol{C})$ est au-dessus de $(\boldsymbol{D})$ sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ \left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$.**

**Pour tout $\boldsymbol{x} \in \left]\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$ ; $\boldsymbol{g(x) < 0}$. Alors $(\boldsymbol{C})$ est en dessous de $(\boldsymbol{D})$ sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$.** **0,75pt**

**Pour tout $\boldsymbol{x} \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ; $\boldsymbol{g(x) = 0}$. Alors $(\boldsymbol{C})$ et $(\boldsymbol{D})$ sont confondues au point $\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$**

4) Montrons que le point $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour $(C)$.

Le point $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour $(C)$ si et seulement $f\left(2.\frac{1}{2}-x\right)+f(x)=2\left(-\frac{1}{4}\right)$

c'est-à-dire $f(1-x)+f(x)=-\frac{1}{2}$

$f(1-x)=-\frac{1-x}{2}+\ln\left|\frac{(1-x)-1}{1-x}\right|=-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$

$f(1-x)+f(x)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)+\left(-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)$

$=-\frac{1}{2}+\ln\left[\left|\frac{x}{x-1}\right|\times\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]$

$=-\frac{1}{2}+\ln\left|\frac{x(x-1)}{x(x-1)}\right|$

$=-\frac{1}{2}+\ln(1)$

$\boldsymbol{f(1-x)+f(x)=-\frac{1}{2}}$ ***CQFD***

**Alors le point $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour $(C)$** **0,75pt**

5) Donnons une équation de la tangente en $I$ à $(C)$.

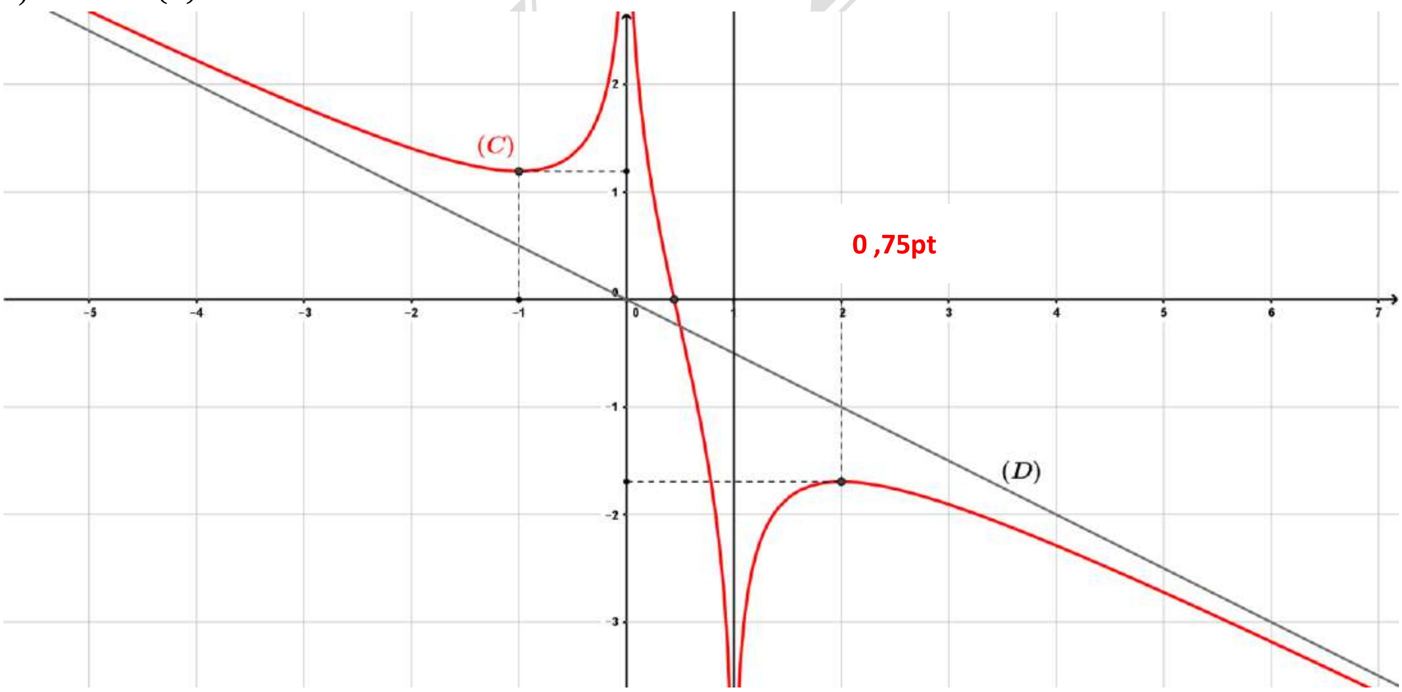
$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$

$(T) : y=f'\left(\frac{1}{2}\right)'\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$: y=-\frac{9}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}$

$\boldsymbol{(T) : y=-\frac{9}{2}x+2}$ **0,5pt**

6) Construis $(C)$.




**0 ,75pt**

## Exercice 1 : 5pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on considère les points $M_n$ d'affixe $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où $n$ est un entier naturel.

1) Exprime $Z_{n+1}$ en fonction de $Z_n$ puis $Z_n$ en fonction de $Z_0$ et $n$. **0,5pt**

2) donne $Z_0$ , $Z_1$ , $Z_2$ , $Z_3$ $et$ $Z_4$ sous forme algébrique et trigonométrique. **1,25pt**

3) Place les points $M_0$ , $M_1$ , $M_3$ $et$ $M_4$ (unité 4 cm) **1pt**

4) Détermine la distance $OM_n$ en fonction de $n$. **0,5pt**

5) a) Montre que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$. **0,5pt**

b) On pose $\mathrm{L_n} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{M_kM_{k+1}}$ (c'est – à – dire $\mathrm{L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}}$)

Détermine $L_n$ en fonction de $n$ puis la limite de $L_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$. **0,5pt**

6) Détermine une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_0}\ ;\ \overrightarrow{0M_n}\right)$ en fonction de $n$ ? **0,5pt**

7) Pour quelles valeurs de $n$ les points $O$, $M_0$ $et$ $M_n$ son alignés ? **0,25pt**

## Exercice 1 : 5pts

I) Dans le plan affine, on considère le triangle $ABC$ rectangle en $A$, $I$ le milieu du segment $[AB]$ et $J$ le centre de gravité de $ABC$.

Pour tout réel $m$, différent de $-\frac{1}{3}$, on note $G_m$ le barycentre du système de points pondérés :

$\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ m)\ ;\ (C\ ;\ 2m)\}$.

Pour tout point $M$ du plan on noté $\overrightarrow{V_m} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1) Montre que $G_1$ est le milieu du segment $[CI]$. **0,5pt**

2) Montre que les points $G_1$ ; $J$ $et$ $C$ sont alignés. **0,5pt**

3) Montre que pour tout point $M$, $\overrightarrow{V_m} = -\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$. **0,5pt**

4) Montre que pour tout réel $m$ distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$. **0,5pt**

5) Montre que le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle. **0,5pt**

II) Dans le plan affine euclidienne rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine $f$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$$

1) Démontre que, $f$ est une isométrie. **0,75pt**

2) Trouve l'ensemble des points invariants par $f$. **0,75pt**

3) Caractérise géométriquement l'application $f$. **1pt**

## Problème : 10pts

**Partie A :**

Soit la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$. On appelle $(C)$ la courbe représentative de $f$.

1) a) Calcule la fonction dérivée de $f$. **0,5pt**

b) Dresse le tableau de variation de $f'$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ puis endéduire le signe de $f'$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. **1pt**

c) Dresse le tableau de variation de $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. **0,5pt**

d) Montre que $(C)$ admet une asymptote $(D)$ que l'on déterminera. **0,5pt**

e) Construis $(C)$ $et$ $(D)$ sur un même graphique. **1,5pt**

2) a) etablis que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une solution et une seule notée $\alpha$. **0,25pt**

b) Justifie l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$. **0,25pt**

**Partie B :**

Soit la fonction $g$ définie sur l'intervalle $J = [1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1) Etudie les variations de $g$ sur $J$ puis en déduis que pour tout $x \in J$, $g(x) \in J$. **1,5pt**

2) Montre que pour tout $x \in J, on\ a$ :$|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$. En déduis que pour tout $x \in J$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$. **1pt**

3) Soit $(u_n)$ la suite d'éléments de $J$ définie par par $U_n = 1$ $et$ $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier $n$ positif ou nul.

a) Montre que pour tout entier $n$ positif ou nul, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$. **0,5pt**

b) En déduis que pour tout entier $n$ positif ou nul, on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$. **0,5pt**

c) Détermine la limite de la suite $(U_n)$. **0,5pt**

d) Détermine un entier $p$ pour lequel on est sur d'avoir $|U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$. Calcule $U_p$ à $10^{-3}$ **1pt**

## Exercice 1 : 5pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on considère les points $M_n$ d'affixe

$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où $n$ est un entier naturel.

1) Exprimons $Z_{n+1}$ en fonction de $Z_n$ puis $Z_n$ en fonction de $Z_0$ et $n$.

$$Z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}(1 + i\sqrt{3})$$
$$= \left(\frac{1}{2}i\right)^n \times \frac{1}{2}i(1 + i\sqrt{3})$$
$$= \frac{1}{2}i \times \left[\left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})\right]$$

$\boldsymbol{Z_{n+1} = \frac{1}{2}i.Z_n}$ **0,25pt**

$(Z_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}i$ et de premier terme $Z_0 = (1 + i\sqrt{3})$. Alors :

$Z_n = Z_0 \times q^n \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Z_n = Z_0 \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n}$ **0,25pt**

2) donnons $Z_0$ , $Z_1$ , $Z_2$ , $Z_3$ *et* $Z_4$ sous forme algébrique et trigonométrique.

$\boldsymbol{Z_0 = (1 + i\sqrt{3})}$ Forme algébrique

$\boldsymbol{Z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$ Forme trigonométrique **0,25pt**

$Z_1 = Z_0 \times \left(\frac{1}{2}i\right)^1 = (1 + i\sqrt{3})\frac{1}{2}i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$ Forme algégrique **0,25pt**

$\boldsymbol{Z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ Forme trigonométrique

$Z_2 = Z_0 \times \left(\frac{1}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Z_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i}$ Forme algébrique

$|Z_2| = |Z_0| \times \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^2\right| = \frac{1}{2}$ **0,25pt**

$\arg(Z_2) = \arg Z_0 + 2\arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{3} + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)}$ Forme trigonométrie

$Z_3 = Z_0 \times \left(\frac{1}{2}i\right)^3 = -\frac{1}{8}i(1 + i\sqrt{3}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i}.$ Forme algébrique

$|Z_3| = |Z_0| \times \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^3\right| = \frac{1}{4}$ **0,25pt**

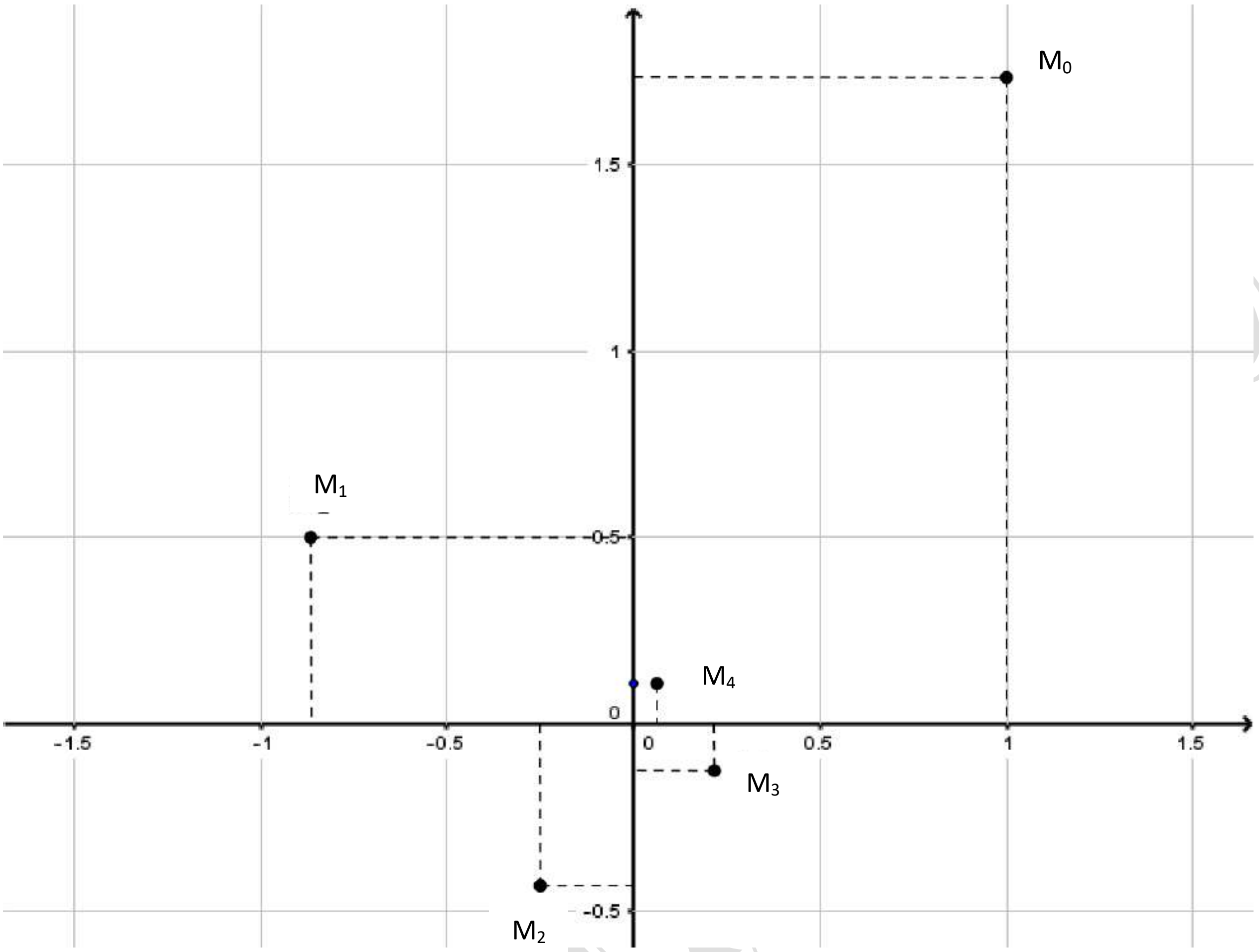
$\arg(Z_3) = \arg Z_0 + 3\arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{3} + 3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Z_3 = \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}$ Forme trigonométrie

$Z_4 = Z_0 \times \left(\frac{1}{2}i\right)^4 = \frac{1}{16}(1 + i\sqrt{3}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Z_4 = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i}$ Forme algébrique

$|Z_4| = |Z_0| \times \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^4\right| = \frac{1}{8}$ **0,25pt**

$\arg(Z_3) = \arg Z_0 + 4\arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{3} + 4\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Z_4 = \frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$ Forme trigonométrie

3) Plaçons les points $M_0$ , $M_1$ , $M_3$ $et$ $M_4$ (unité 4 cm)




**1pt**

4) Déterminons la distance $OM_n$ en fonction de $n$.

$OM_n = |Z_n| = \left|Z_0\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right| = |Z_0| \times \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right| = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \boldsymbol{OM_n = \frac{1}{2^{n-1}}}$ **0,5pt**

5) a) Montrons que $M_nM_{n+1} =$

$M_nM_{n+1} = |Z_{n+1} - Z_n| = \left|\frac{1}{2}iZ_n - Z_n\right| = \left|(\frac{1}{2}i - 1)Z_n\right| = \left|\frac{1}{2}(i-2)Z_n\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \times |i-2| \times |Z_n| = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{1}{2^{n-1}}$

$= \frac{\sqrt{5}}{2\times 2^{n-1}} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ ***CQFD***

**D'où $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$** **0,5pt**

b) On pose $\mathrm{L_n} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{M_kM_{k+1}}$ (c'est – à – dire $\mathrm{L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}}$)

Déterminons $L_n$ en fonction de $n$ puis la limite de $L_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

$$\mathrm{L_n} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{M_kM_{k+1}} = \mathrm{M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2^0} + \frac{\sqrt{5}}{2^1} + \frac{\sqrt{5}}{2^2} + \frac{\sqrt{5}}{2^3} + \cdots + \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

$$= \sqrt{5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$= \sqrt{5}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]$ où $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ est la somme des $(n+1)$ terme consécutive d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$.

$L_n = \sqrt{5}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right] \Leftrightarrow \boldsymbol{L_n = 2\sqrt{5}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$ **0,25pt**

$\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\sqrt{5}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\right) = 2\sqrt{5} \quad car \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 2\sqrt{5}}$. **0,25pt**

6) Déterminons une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}\,;\ \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de $n$

$(\overrightarrow{OM_0}\,;\ \overrightarrow{OM_n}) = \arg\left(\frac{Z_n}{Z_0}\right) = \arg(Z_n) - \arg(Z_0)\ [2\pi]$

$= n\arg\left(\frac{1}{2}i\right) + \arg(Z_0) - \arg(Z_0)\ [2\pi]$

$= n \times \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\boldsymbol{\theta = \frac{n\pi}{2}[2\pi]}$ ***est*** **une mesure de l'angle** $(\overrightarrow{OM_0}\,;\ \overrightarrow{OM_n})$ **en fonction de** $\boldsymbol{n}$ **0,5pt**

7) Les valeurs de $n$ pour lesquelles les points $O,\ M_0\ et\ M_n$ sont alignés :

$O,\ M_0\ et\ M_n\ sont\ alignés\ si\ et\ seulement\ si\ (\overrightarrow{OM_0}\,;\ \overrightarrow{OM_n}) = 0 + 2k\pi\ \text{ où }\ (\overrightarrow{OM_0}\,;\ \overrightarrow{OM_n}) = \pi + 2k\pi$

$$\begin{cases}(\overrightarrow{OM_0}\,;\ \overrightarrow{OM_n}) = 0 + 2k\pi \\ (\overrightarrow{OM_0}\,;\ \overrightarrow{OM_n}) = \arg\left(\frac{Z_n}{Z_0}\right) = \frac{n\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} = 2k\pi \Leftrightarrow n = 4k = 2(2k) = 2k'\ avec\ k' = 2k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases}(\overrightarrow{OM_0}\,;\ \overrightarrow{OM_n}) = \pi + 2k\pi \\ (\overrightarrow{OM_0}\,;\ \overrightarrow{OM_n}) = \arg\left(\frac{Z_n}{Z_0}\right) = \frac{n\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow n = 4k+2 = 2(2k+1) = 2k'\ avec\ k' = 2k+1 \in \mathbb{Z}$$

**Les points** $\boldsymbol{O,\ M_0\ et\ M_n}$ **sont alignés Pour** $\boldsymbol{n = \{2k\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$

**Ou encore**

**Les points** $\boldsymbol{O,\ M_0\ et\ M_n}$ **sont alignés si et seulement si n est pair** **0,25pt**

## Exercice 2 :______________________________________5pts

I) Dans le plan affine, on considère le triangle $ABC$ rectangle en $A$, $I$ le milieu du segment $[AB]$ et $J$ le centre de gravité de $ABC$.

Pour tout réel $m$, différent de $-\frac{1}{3}$, on note $G_m$ le barycentre du système de points pondérés :

$\{(A\ ;\ 1)\ ;\ \ (\mathrm{B}\ ;\ \mathrm{m})\ \ ;\ \ (\mathrm{C}\ ;\ 2\mathrm{m})\}$.

Pour tout point $M$ du plan on noté $\overrightarrow{V_m} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1) Montrons que, $G_1$ est le milieu du segment $[CI]$.

$G_1$ est le milieu du segment $[CI]$ si et seulement si : $\overrightarrow{G_1C} = -\overrightarrow{G_1I}\ \ ou\ \ \overrightarrow{CG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

$G_m = Bary\{(A\ ;\ 1)\ ;\ \ (\mathrm{B}\ ;\ \mathrm{m})\ \ ;\ \ (\mathrm{C}\ ;\ 2\mathrm{m})\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_mA} + m\overrightarrow{G_mB} + 2m\overrightarrow{G_mC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{G_mA} + m\overrightarrow{G_mB} + 2m\overrightarrow{G_mC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$ Pour $m = 1$ fixons C

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ Soit I milieu de $[AB]$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{G_1C} + 2\overrightarrow{CI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}}$. **Alors** $\boldsymbol{G_1}$ **est le milieu du segment** $\boldsymbol{[CI]}$. **0,5pt**

2) Montrons que les points $G_1\ ;\ J\ et\ C$ sont alignés.

Les points $G_1\ ;\ J\ et\ C$ sont alignés si et seulement si l'un est le barycentre des deux autres.

Soit $J$ le centre de gravité du triangle $ABC$. Alors :

$j = bary\,\{(A,1)\,;\ (B,1)\,;\ (C,1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ Fixons C

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ Soit I milieu du segment $[AB]$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC} + 2\overrightarrow{CI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC} = -2\overrightarrow{CI}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC} = -2\left(2\overrightarrow{CG_1}\right)$ Car $\overrightarrow{CG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{CJ} + 4\overrightarrow{CG_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow C = bary\{(J\ ;\ -3)\ ;\ (G_1\ ;\ 4)\}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{CG_1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CJ}}$ **. Les points $\boldsymbol{G_1}$ ; $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{C}$ sont alignés.** **0,5pt**

3) Montrons que pour tout point $M$, $\overrightarrow{V_m} = -\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.

$\overrightarrow{V_m} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ Fixons A

$= 3\overrightarrow{MA} - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) - 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AC}$

$= -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{V_m} = -\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)}$ ***CQFD*.** **0,5pt**

4) Montrons que pour tout réel $m$ distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

$\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$ si et seulement si, il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AG_m} = k\overrightarrow{AG_{-1}}$

$G_m = Bary\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ m)\ ;\ (C\ ;\ 2m)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_mA} + m\overrightarrow{G_mB} + 2m\overrightarrow{G_mC} = \vec{0}$ Fixons A

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_mA} + m\overrightarrow{G_mA} + m\overrightarrow{AB} + 2m\overrightarrow{G_mA} + 2m\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (1 + m + 2m)\overrightarrow{G_mA} = -m\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$

$\Leftrightarrow (3m + 1)\overrightarrow{G_mA} = m\overrightarrow{V_m}$ Avec $\overrightarrow{V_m} = -\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$

D'autre par :

$\Leftrightarrow \overrightarrow{V_m} = \frac{3m+1}{m}\overrightarrow{G_mA}$ (1)

$G_{-1} = Bary\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ -1)\ ;\ (C\ ;\ -2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{G_{-1}B} - 2\overrightarrow{G_{-1}C} = \vec{0}$ Fixons A

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{G_{-1}A} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{G_{-1}A} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{G_{-1}A} = -\overrightarrow{V_m}$

$\Leftrightarrow V_m = 2\overrightarrow{G_{-1}A}$ (2)

$(1) = (2) \Leftrightarrow \frac{3m+1}{m}\overrightarrow{G_mA} = 2\overrightarrow{G_{-1}A}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_mA} = \frac{2m}{3m+1}\overrightarrow{G_{-1}A}$ Avec $m \neq -\frac{1}{3}$

**Pour tout réel $\boldsymbol{m}$ distinct de $\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$, on a : $\boldsymbol{\overrightarrow{G_mA} = \frac{2m}{3m+1}\overrightarrow{G_{-1}A}}$ . Alors $\boldsymbol{\overrightarrow{AG_m}}$ est colinéaire à $\boldsymbol{\overrightarrow{AG_{-1}}}$** **0,5pt**

5) Montrons que le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.

$IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle si et seulement si $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = \vec{0}$

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = \overrightarrow{IB}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG_{-\frac{1}{2}}}\right)$

$\overrightarrow{G_mA} + m\overrightarrow{G_mB} + 2m\overrightarrow{G_mC} = \vec{0}$ Fixons B

$\overrightarrow{G_mB} + \overrightarrow{BA} + m\overrightarrow{G_mB} + 2m\overrightarrow{G_mB} + 2m\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

(3m+1) $\overrightarrow{G_mB} = -\left(\overrightarrow{BA} + 2m\overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{BG_m} = \frac{1}{3m+1}\left(\overrightarrow{BA} + 2m\overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = -2\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right)$ Pour $m = -\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = 2((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$$

Alors :

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = \overrightarrow{BI}.(2\overrightarrow{AC})$$
$$= \frac{\overrightarrow{BA}}{2}.(2\overrightarrow{AC})$$
$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ Car ABC est triangle rectangle en A}$$

D'où **$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = \vec{0}$. Alors le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle en B** 0,5pt

II) Dans le plan affine euclidienne rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine $f$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$$

1) Démontrons que, $f$ est une isométrie.

Soit $M_\varphi = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix}$ la matrice de l'application linéaire $\varphi$ associée à $f$.

$$M_\varphi = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{-9-16}{25} = \frac{-25}{25} = -1$$

**$M_\varphi = -1$. Alors $f$ est un antidéplacement. Par conséquent, $f$ est une isométrie**. 0,75pt

2) Trouvons l'ensemble des points invariants par $f$.

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y = 4 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -2x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

**L'ensemble des points invariants par $f$ est la droite d'équation $y = 2x - 1$.** 0,5pt

3) Caractérisons géométriquement l'application $f$.

**L'application $f$ est une symétrie orthogonale d'axe $(D) : y = 2x - 1$** . 1pt

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (D) \textit{ milieux du segment } [MM'] \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{U} = 0 \textit{ où } \vec{U} \textit{ est un vecteur directeur de la droite } (D) \end{cases}$$

## Problème : 10pts

**Partie A :**

Soit la fonction $f$ définie sur $[0 \ ; \ +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$. On appelle $(C)$ la courbe représentative de $f$.

1) a) Calculons la fonction dérivée de $f$.

$\forall\, x \in [0 \ ; \ +\infty[ \ ; \ f'(x) = e^{-2x} - 2e^{-2x}.x - 2e^{-2x} - 1 = -2xe^{-2x} - e^{-2x} - 1 = (-2x - 1)e^{-2x} - 1$

**$\forall\, x \in [0 \ ; \ +\infty[ \ ; \ f'(x) = (-2x - 1)e^{-2x} - 1$** 0,5pt

b) Dressons le tableau de variation de $f'$ sur $[0 \ ; \ +\infty[$. Puis déduisons-en le signe de $f$

$\forall\, x \in [0 \ ; \ +\infty[ \ ; \ f''(x) = -2e^{-2x} - 2e^{-2x}(-2x - 1) = (-2 + 4x + 2)e^{-2x} = 4xe^{-2x}$

$\forall\, x \in [0 \ ; \ +\infty[ \ ; \ f''(x) = 4xe^{-2x} \geq 0$. Alors $f$ est croissante sur $[0 \ ; \ +\infty[$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | |
| $f'(x)$ | $-2$ ↗ | $-1$ |

0,5pt

$\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = -2$

$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = -1$

**$f'(x) \leq 0$ sur $x \in [0 \ ; \ +\infty[$** 0,5pt

c) Dressons le tableau de variation de $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$\forall\, x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\quad f'(x) < 0$. Alors $f$ est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ ↘ | $-\infty$ |

**0,5pt**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0e^0 + e^0 + 1 - 0 = 2$$

$$\lim_{x\to +\infty} f'(x) = -\infty$$

d) Montrons que $(C)$ admet une asymptote $(D)$ que l'on déterminera.

$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{x} + \frac{1}{x} - 1\right) = -1 = a$$

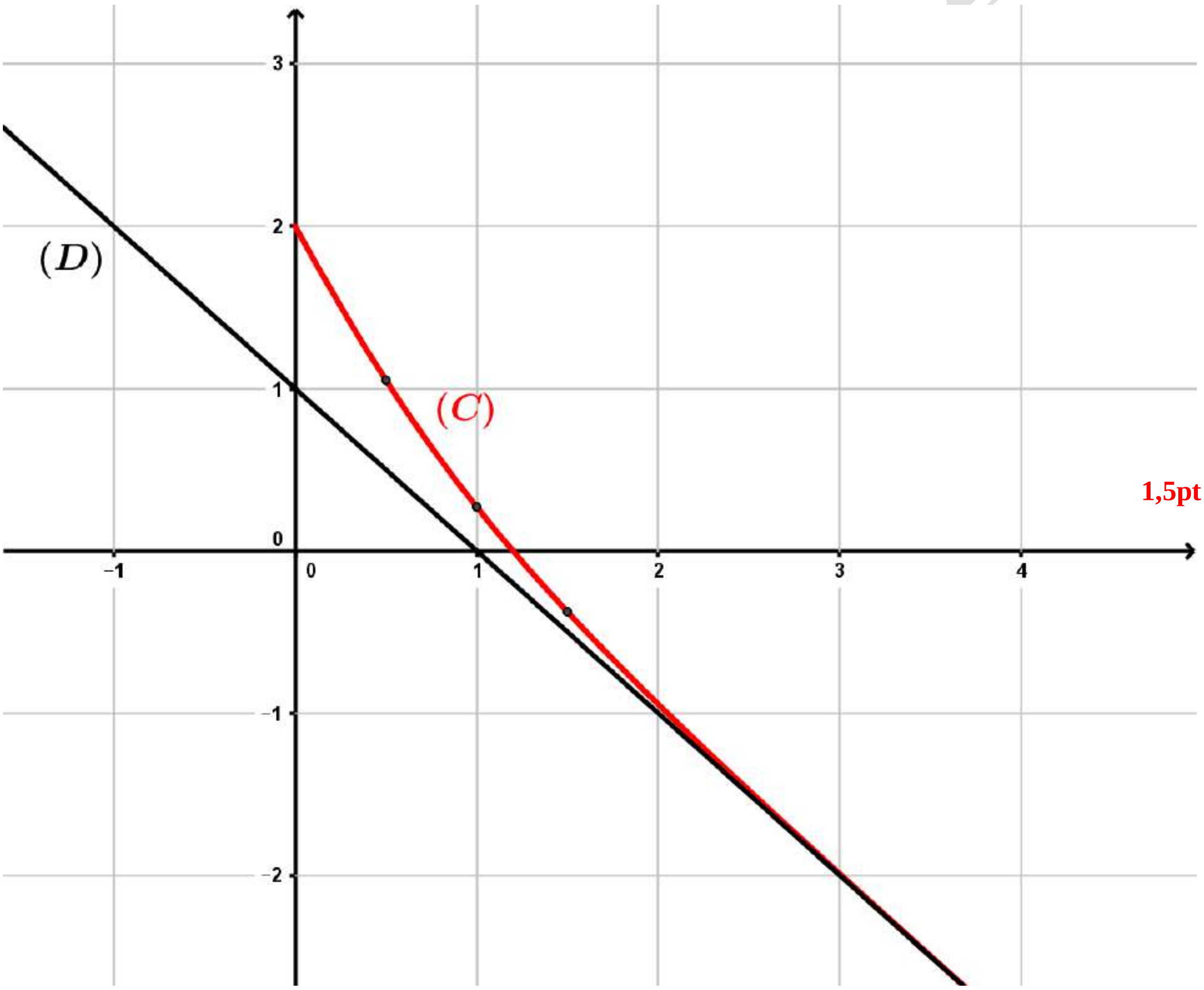
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-x)] = \lim_{x\to+\infty}(xe^{-2x} + e^{-2x} + 1) = 1 = b$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (-x+1)] = 0$**. Alors $(C)$ admet une asymptote $(D)$ d'équation $y = -x + 1$.** **0,5pt**

e) Construis $(C)$ *et* $(D)$ sur un même graphique.

Tableau de valeur

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 0,25 | 1,05 | $-0{,}38$ |




**1,5pt**

2) a) etablissons que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une solution et une seule notée $\alpha$.

**$f$ est continue et strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, elle réalise une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ vers $[-\infty\ ;\ 2[$.**
**Or $0 \in [-\infty\ ;\ 2[$ , alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule $\alpha \in [0\ ;\ +\infty[$. *telle que* $f(\alpha) = 0$.** **0,25pt**

b) Justifie l'encadrement : $1 \le \alpha \le 2$.

$\left.\begin{array}{r} f(1) = 0{,}27 \\ f(2) = -0{,}95 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(1) \times f(2) < 0}$. Alors $f(2) \le 0 \le f(1) \Leftrightarrow f(2) \le f(\alpha) \le f(1)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{1 \le \alpha \le 2}$ car $f$ est décroissante **0,25pt**

**Partie B :**

Soit la fonction $g$ définie sur l'intervalle $J = [1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1) Etudions les variations de $g$ sur $J$ .

$\forall\, x \in J\ ;\ g'(x) = e^{-2x} - 2e^{-2x}.x - 2e^{-2x} = -e^{-2x} - 2xe^{-2x} = (-2x-1)e^{-2x} \boldsymbol{= -(2x+1)e^{-2x}}$ **0,5pt**

**$\forall\, x \in J\ ;\ g'(x) < 0$. Alors $g$ est strictement décroissante sur $J = [1\ ;\ +\infty[$.** **0,5pt**

Déduisons-en que pour tout $x \in J$ , $g(x) \in J$

Tableau de variation :

| $x$ | $1$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ |
| $g(x)$ | $(2e^{-2}+1)$ $\searrow$ $1$ |

$\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1) = 2e^{-2} + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

$x \in J = [1\ ;\ +\infty[\ \ g(x) > 1 \Leftrightarrow g(x) \in\ ]1\ ;\ +\infty[\ \subset [1\ ;\ +\infty[$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{g(x) \in [1\ ;\ +\infty[ = J}$

**Alors, pour tout $x \in J$ , $g(x) \in J$ .** **0,5pt**

2) Montrons que pour tout $x \in J, on\ a : |g'(x)| \le \frac{3}{e^2}$.

$\forall\, x \in J\ ;\ g''(x) = -[2e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x+1)] = -(2-4x-2)e^{-2x} = 4xe^{-2x} \ge 0$

$\forall\, x \in J\ g''(x) \ge 0$. Alors $g'$ est croissante sur $J$.

$\forall\, x \in J$, on a : $1 \le x \Leftrightarrow g'(1) \le g'(x)$

$\Leftrightarrow -3e^{-2} \le g'(x)$ Car $g'$ croissante

$\Leftrightarrow |g(x)'| \le 3e^{-2}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{|g(x)'| \le \frac{3}{e^2}}$ **0,5pt**

Déduisons-en que pour tout $x \in J$, on a : $|g(x) - \alpha| \le \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

$\forall\, x \in J$, on a : $\boldsymbol{|g'(x)| \le \frac{3}{e^2}}$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur l(intervalle $[\alpha\ ;\ x] \subset J$ on a :

$\forall\, x \in J,\ \ |g'(x)| \le \frac{3}{e^2} \Leftrightarrow |g(x) - g(\alpha)| \le \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$

$\alpha \in\ [0\ ;\ +\infty[\ \subset J\ ;\ f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{-2\alpha} + e^{-2\alpha} + 1 - \alpha = 0$

$\Leftrightarrow \alpha e^{-2\alpha} + e^{-2\alpha} + 1 = \alpha$

$\Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$

$|g(x) - g(\alpha)| \le \frac{3}{e^2}|x - \alpha| \Leftrightarrow \boldsymbol{|g(x) - \alpha| \le \frac{3}{e^2}|x - \alpha|}$ **car $g(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in J$** **0,5pt**

3) Soit $(u_n)$ la suite d'éléments de $J$ définie par par $U_n = 1\ \ et\ \ U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier $n$ positif ou nul.

a) Montrons que pour tout entier $n$ positif ou nul, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$.

pour tout $x \in J$, on a : $|g(x) - \alpha| \le \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

Pour tout entier $n$ positif ou nul, posons $x = U_n \in J$, donc :

pour tout $U_n \in J$, on a : $|g(U_n) - \alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha| \Leftrightarrow |U_{n+1} - \alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$ où $g(U_n) = U_{n+1}$

**Alors, pour tout entier $n$ positif ou nul, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$** **0,5pt**

b) Déduisons-en que pour tout entier $n$ positif ou nul, on a : $|U_n - \alpha| \le \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

Démontrons par recurrence la proposition $P_n$ : $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

Initialisation :

Pour $n=0$ on a :

$P_0$ : $|U_0-\alpha|\leq\left(\frac{3}{e^2}\right)^0$

**: $|1-\alpha|\leq 1$ Vraie. (1)**

Transmission :

Supposons que Pour tout entier $n$ positif ou nul, $P_n$ est vraie ( c'est-à-dire $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{3}{e^2}\right)^n$) et montrons pour $P_{n+1}$ (c'est-à-dire $|U_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{3}{e^2}\right)^{n+1}$)

D'après 3) a) :

pour tout entier $n$ positif ou nul, on a : $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{3}{e^2}|U_n-\alpha|\leq\frac{3}{e^2}.\left(\frac{3}{e^2}\right)^n$ Car par hypothèse, $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

$: |U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{3}{e^2}.\left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

$: |U_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{3}{e^2}\right)^{n+1}$

D'où $\boldsymbol{P_{n+1}}$: $\boldsymbol{|U_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{3}{e^2}\right)^{n+1}}$ **est vraie (2)**

Conclusion :

**(1) et (2) $\Leftrightarrow$ pour tout entier $\boldsymbol{n}$ positif ou nul, on a : $\boldsymbol{|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{3}{e^2}\right)^n}$** 0,5pt

c) Déterminons la limite de la suite $(U_n)$.

$\forall\, n\in\mathbb{N}, |U_n-\alpha|\leq\left(\frac{3}{e^2}\right)^n$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{e^2}\right)^n=0$ $\;alors\;$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(|U_n-\alpha|)=0\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha}$ **0,5pt**

d) Déterminons un entier $p$ pour lequel on est sur d'avoir $|U_p-\alpha|\leq 10^{-3}$. Calcule $U_p$ à $10^{-3}$

$|U_p-\alpha|\leq\left(\frac{3}{e^2}\right)^p\leq 10^{-3}\Leftrightarrow p\ln\left(\frac{3}{e^2}\right)\leq\ln(10^{-3})$

$\Leftrightarrow p(\ln 3-2)\leq -3\ln 10$

$\Leftrightarrow p\geq\frac{-3\ln 10}{\ln 3-2}$

$\Leftrightarrow p\geq 7{,}66$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{p=8}$ 0,5pt

$|U_8-\alpha|\leq 10^{-3}$

$U_1=1\;\; et\; U_{n+1}=g(U_n)$

$U_2=g(U_1)=xe^{-2U_1}+e^{-2U_1}+1$
$U_2=1{,}2707\ldots$

$U_3=g(U_2)=xe^{-2U_2}+e^{-2U_2}+1$
$U_3=1{,}7788\ldots$

$U_4=g(U_3)=xe^{-2U_3}+e^{-2U_3}+1$
$U_4=1{,}2006\ldots$

$U_5=g(U_4)=xe^{-2U_4}+e^{-2U_4}+1$
$U_5=1{,}1977\ldots$

$U_6=g(U_5)=xe^{-2U_5}+e^{-2U_5}+1$
$U_5=1{,}2003\ldots$

$U_7=g(U_6)=xe^{-2U_6}+e^{-2U_6}+1$
$U_2=1{,}9995\ldots$

$U_8=g(U_7)=xe^{-2U_7}+e^{-2U_7}+1$
$U_8=1{,}1997\ldots$

$\boldsymbol{U_8=1{,}997}$ **à $\boldsymbol{10^{-3}}$ près par défaut** 0,5pt

## Exercice 1 : 6pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $(E)$ d'inconnue $z$ suivante :

$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$

**Partie A :**

1) Montre que $-i$ est une solution de $(E)$.

2) Détermine les nombres réels $a,\ b\ et\ c$ tels que :

$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2+bz+c)$

3) Résous l'équation $(E)$ dans l'ensemble des nombres complexes.

**Partie B :**

On appelle $A,\ B\ et\ C$ les points d'affixes respectives $4+i\ ;\ 4-i\ ;\ -i$.

1) Place les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2) Soit $r$ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = iz - 2i + 2$. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle $S$ l'image de $A$ par $r$. Calcule l'affixe $s$ de $S$.

3) Démontre que les points $B,\ A,\ S,\ C$ appartiennent à un même cercle $C$ dont on déterminera le centre et le rayon. **Tracer $C$.**

4) A tout point $M$ d'affixe $z \neq 2$, on associe le point $M'$ d'affixe : $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.

a) Détermine les affixes des points $A',\ B',\ C'$ associés respectivement aux points $A,\ B\ et\ C$.

b) Vérifier que $A',\ B',\ C'$ appartienne à un cercle $(C')$ de centre $P$, d'affixe $i$. Détermine son rayon et trace $(C')$.

c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprime $|z'-i|$ en fonction de $z$.

d) Soit $M$ un point d'affixe $z$ appartenant au cercle $(C)$. Démontre que $|z'-1| = 2\sqrt{5}$.

e) en déduis à quel ensemble appartiennent les points $M'$ associés aux points du cercle $(C)$.

## Exercice 2 : 4pts

I. On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$, où $(x\ ;\ y)$ est un couples entiers relatifs.

1) a) Donne une solution particulière de l'équation $(E)$.

b) Résous l'équation $(E)$.

2) Soit $N$ un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a\ ;\ b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$

a) Montre que le couple $(a\ ;\ -b)$ est solution de $(E)$.

b) Quel est le reste, dans la division de $N$ par 40 ?

3) a) Résous l'équation $8x + 5y = 100$, où (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au $VIII$ è siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monaine dans une auberge.

Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Combien pouvait il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupes ?

II) On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$ (E).

1) Soit $g$ une fonction dérivable sur ℝ et $f'$ la fonction définie par : $f(x) = e^{2x}g(x)$.

Montre que $f$ est une solution de $(E)$ si, et seulement si $g'(x) = -\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

2) En déduis toutes les solutions de $(E)$.

## Problème : 10pts

I) On définit la fontion $g$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

$a)$ *On admet le résul* $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. *En déduis la limite de* $g(x)$*lorsque* $x$ *tend vers* $1$.

b) Calcule $g'(x)$ pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

c) Résous l'inéquation : $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue $x$ appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

d) Etudie le sens de variation de $g$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

e) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique notée $\alpha$, dans l'intervalle $[e+1\ ;\ e^3+1]$, puis étudie le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

II) soit $\varphi$ la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$.

$A/\ a)$ *Détermine* $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ *et prouve que* $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x) = 0$

b) Calcule $\varphi'(x)$ et montre que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

c) Montre que $\varphi$ est croissante sur l'intervalle $\left]1\ ;\ \sqrt{\alpha}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty\right[$.

B/ On définit la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$.

1) Vérifie que, pour tout $x$ appartenanr à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$.

2) En déduis :

a) la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 ;

b) la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ;

c) le sens de variation de $f$ surl'intervalle et le fait que $f$ admet un maximum en $\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)$.

3) Montre que, pour tout $x$ de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[\ ;\ f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

4) Réproduis et compléte le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à $10^{-2}$ près.

| $x$ | 0,1 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

Représente graphiquement $f$ dans un repère orthogonal, d'unité 5 $cm$ en abscisse, 10 $cm$ en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de $\alpha$.

## Exercice 1 : 6pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $(E)$ d'inconnue $z$ suivante :
$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$

**Partie A :**

1) Montrons que $-i$ est une solution de $(E)$.
$(E)$: $(-i)^3+(-8+i)(-i)^2+(17-8i)(-i)+17i=i+8-i-17i-8+17i=0$
$(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{(-i)^3+(-8+i)(-i)^2+(17-8i)(-i)+17i=0}$. **Alors $-i$ est une solution de $(E)$.**

2) Déterminons les nombres réels $a,\ b\ et\ c$ tels que :
$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$
$-i$ étant une solution de (E). L'équation (E) est divisible par $z+i$.
Factorisons l'équation $(E)$ par la méthode D'Horner

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-8+i$ | $17-8i$ | $17i$ |
| $-i$ | | $-i$ | $8i$ | $-17i$ |
| | $1$ | $-8$ | $17$ | $0$ |

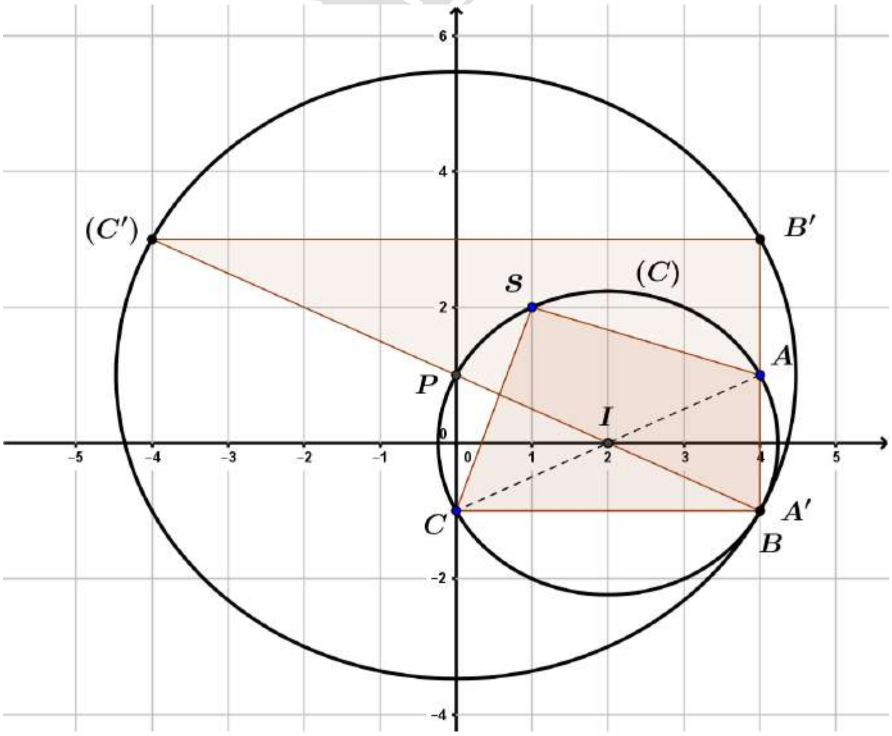
$\boldsymbol{a=1}$ ; $\boldsymbol{b=-8}$ ; $\boldsymbol{c=17}$
$(\boldsymbol{E})$ : $\boldsymbol{z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2-8z+17)}$

3) Résolvons l'équation $(E)$ dans l'ensemble des nombres complexes.
$(E)$ : $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0 \Leftrightarrow (z+i)+(z^2-8z+17)=0$
$\Leftrightarrow z+1=0\ \ ou\ \ z^2-8z+17=0$

$*\ \ z+1=0 \Leftrightarrow z=-i$
$*\ \ z^2-8z+17=0$
$\Delta'=b'-ac=(-4)^2-(1)(17)=-1=i^2$
$x_1=\frac{b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=4-i$ $\quad et \quad$ $x_2=\frac{b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=4+i$
$\boldsymbol{S=\{-i\ \ ;\ \ 4-i\ \ ;\ \ 4+i\}}$

**Partie B :**

On appelle $A,\ B\ et\ C$ les points d'affixes respectives $4+i\ ;\ 4-i\ ;\ -i$.
1) Plaçons les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.



2) Soit $r$ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = iz - 2i + 2$. Le point $\Omega$ est le point d'affixe 2. On appelle $S$ l'image de $A$ par $r$. Calculons l'affixe $s$ de $S$.

$z_A = 4 + i \quad ; \quad z_B = 4 - i \quad ; \quad z_C = -i$

$r : \ P \longrightarrow P$

$\quad M \longmapsto M'$ Tel que $z' = iz - 2i + 2$

$$\begin{aligned} r(A) = S \Leftrightarrow z_{S'} &= iz_A - 2i + 2 \\ &= i(4+i) - 2i + 2 \\ &= 4i - 1 - 2i + 2 \\ &= 1 + 2i \end{aligned}$$

**D'où l'affixe $s$ de $S$ est $\ s = 1 + 2i$**

3) Démontrons que les points $B,\ A,\ S,\ C$ appartiennent à un même cercle $(C)$ dont on déterminera le centre et le rayon. Traçons $C$.

$$\left.\begin{aligned} AB &= |z_B - z_A| = |4 - i - 4 - i| = |-2i| = 2 \\ BC &= |z_C - z_B| = |-i - 4 + i| = |-4| = 4 \\ AC &= |z_C - z_A| = |-i - 4 - i| = |-4 - 2i| = \sqrt{20} \end{aligned}\right\} \ AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Alors $ABC$ est un triangle rectangle en B. Soit $AC$ son hypoténuse et le milieu de $[AC]$

$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{4+i-i}{2} = 2$

$IA = |z_A - z_I| = |4 + i - 2| = |2 + i| = \sqrt{5}$

$IB = |z_B - z_I| = |4 - i - 2| = |2 - i| = \sqrt{5}$

$IC = |z_C - z_I| = |-i - 2| = \sqrt{5}$

$Is = |z_s - z_I| = |1 + 2i - 2| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$

**$IA = IB = IC = IS = \sqrt{5}$ . Alors les points $B,\ A,\ S,\ C$ appartiennent à un même cercle $(C)$ de centre $I\binom{2}{0}$ et de rayon $\sqrt{5}$** .

4) A tout point $M$ d'affixe $z \neq 2$, on associe le point $M'$ d'affixe : $z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$.

a) Déterminons les affixes des points $A',\ B',\ C'$ associés respectivement aux points $A,\ B\ et\ C$.

$$\begin{aligned} z'_A &= \frac{iz_A + 10 - 2i}{z_A - 2} \\ &= \frac{i(4+i) + 10 - 2i}{(4+i) - 2} = \frac{4i - 1 + 10 - 2i}{2 + i} \\ &= \frac{(9+2i)(2-i)}{5} = \frac{18 - 9i + 4i + 2}{5} \\ &= 4 - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_B &= \frac{iz_B + 10 - 2i}{z_B - 2} \\ &= \frac{i(4-i) + 10 - 2i}{(4-i) - 2} = \frac{4i + 1 + 10 - 2i}{2 - i} \\ &= \frac{(11+2i)(2+i)}{5} = \frac{22 + 11i + 4i - 2}{5} \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_C &= \frac{iz_C + 10 - 2i}{z_C - 2} \\ &= \frac{i(-i) + 10 - 2i}{(-i) - 2} = \frac{1 + 10 - 2i}{-2 - i} \\ &= \frac{(11-2i)(-2+i)}{5} = \frac{-22 + 11i + 4i + 2}{5} \\ &= -4 + 3i \end{aligned}$$

**Les affixes des points $A',\ B',\ C'$ associés respectivement aux points $A,\ B\ et\ C$ sont : $4 - i$ ; $4 + 3i$ ; $-4 + 3i$.**

b) Vérifions que $A', B', C'$ appartienne à un cercle $(C')$ de centre $P$, d'affixe $i$. Déterminons son rayon et traçons $(C')$.

$$\left.\begin{aligned} A'B' &= |z'_B - z'_A| = |4 + 3i - 4 + i| = |4i| = 4 \\ A'C' &= |z'_C - z'_A| = |-4 + 3i - 4 + i| = |-8 + 4i| = \sqrt{80} \\ B'C' &= |z'_C - z'_B| = |-4 + 3i - 4 - 3i| = |-8| = 8 \end{aligned}\right\}.\ A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2$$

Alors $A'B'C'$ est un triangle rectangle en $B$

Soit $P$ milieu de $A'C'$ d'affixe $\frac{z'_C + z'_A}{2} = \frac{-4+3i+4-i}{2} = i$

$I'A' = |z'_A - z'_I| = |4 - i - i| = |4 - 2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$I'B' = |z'_B - z'_I| = |4 + 3i - i| = |4 + 2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$I'C' = |z'_C - z'_I| = |-4 + 3i - i| = |-4 + 2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

**$I'A' = I'B' = I'C' = 2\sqrt{5}$ . Alors les points $A', B', C'$ appartienne à un cercle $(C')$ de centre $P$, d'affixe $i$ et de rayon $r = 2\sqrt{5}$** .

c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimons $|z' - i|$ en fonction de $z$.

$|z'-i| = \left|\frac{iz+10-2i}{z-2} - i\right| = \left|\frac{iz+10-2i-zi+2i}{z-2}\right| = \left|\frac{10}{z-2}\right|$

$\boldsymbol{|z'-i| = \frac{10}{|z-2|}}$

d) Soit $M$ un point d'affixe $z$ appartenant au cercle $(C)$. Démontrons que $|z'-1| = 2\sqrt{5}$.

$M$ un point d'affixe $z$ appartenant au cercle $(C) \Leftrightarrow |z-2| = \sqrt{5}$. Alors :

$|z'-i| = \frac{10}{|z-2|} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad |z'-i| = 2\sqrt{5}$ CQFD

e) en déduis à quel ensemble appartiennent les points $M'$ associés aux points du cercle $(C)$.

**$|z'-i| = 2\sqrt{5}$ . Alors les points $M'$ associés aux points du cercle $(C)$ appartiennent au cercle $(C')$ de centre $P$ d'affixe $i$ et de rayon $r = 2\sqrt{5}$ .**

## Exercice 2 :________________________________________________4pts

I. On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$, où $(x\ ;\ y)$ est un couples entiers relatifs.

1) a) Donnons une solution particulière de l'équation $(E)$.

**Le couple $(2\ ;\ -3)$ est une solution particulière de l'équation $(E)$**. En effet, $8(2) + 5(-3) = 1$

b) Résolvons l'équation $(E)$

$\begin{cases} 8x + 5y = 1 & (1) \\ 8(2) + 5(-3) = 1 & (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \Leftrightarrow 8(x-2) + 5(y+3) = 0$

$\Leftrightarrow 8(x-2) = 5(-y-3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5/8(x-2) & PGCD(5\ ;\ 8) = 1\ alors\ d'après\ Gaus\ \ 5/x-2 \\ 8/5(-y-3) & PGCD(8\ ;\ 5) = 1\ alors\ d'après\ Gaus\ \ 8/-y-3 \end{cases}$

$\begin{cases} 5/x-2 \\ 8/-y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 5k \\ -y-3 = 8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+5k \\ y = -3-8k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\boldsymbol{S = \{(2+5k\ ;\ -3-8k\}\ avec\ k \in \mathbb{Z}}$

2) Soit $N$ un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a\ ;\ b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$

a) Montrons que le couple $(a\ ;\ -b)$ est solution de $(E)$.

$\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases} \Leftrightarrow 8a+1 = 5b+2 \Leftrightarrow 8a-5b = 1 \Leftrightarrow 8(a)+5(-b) = 1$

$\boldsymbol{\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases} \Leftrightarrow 8(a)+5(-b) = 1}$. **Alors le couple $(a\ ;\ -b)$ est solution de $(E)$**

b) le reste, dans la division de $N$ par 40 :

le couple $(a\ ;\ -b)$ est solution de $(E)$. Alors :

$(a\ ;\ -b) = \{(2+5k\ \ ;\ \ -3-8k)\ \ k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2+5k \\ b = 3+8k \end{cases}$

$\begin{cases} N = 8a+1 = 8(2+5k)+1 = 17+40k \\ N = 5b+2 = 5(3+8k)+2 = 17+40k \end{cases} \Leftrightarrow \quad N = 17+40k \Leftrightarrow N \equiv 17[40]$

**$N \equiv 17[40]$. Alors le reste, dans la division de $N$ par 40 est 17**

3) a) Résolvons l'équation $8x+5y = 100$, $où$ (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

$8(2)+5(-3) = 1 \Leftrightarrow 8(200)+5(-300) = 100$

Alors le couple $(200\ ;\ -300)$ est une solution particulière l'équation 8x+5y=100.

Ainsi : $\boldsymbol{S = \{(200+5k\ ;\ -300-8k)\}\ avec\ k \in \mathbb{Z}}$

b) Au $VIII$ è siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monaine dans une auberge.

- Le nombre d'hommes et de femmes dans le groupes est

Soit $x$ le nombre d'homme et y le nombre de femmes.

Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Alors :

$$\begin{cases} 8x+5y=100 \\ 0<x<\frac{100}{8} \\ 0<y<\frac{100}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=200+5k \quad et \quad y=-300-8k \\ 0<200+5k<12{,}5 \\ 0<-300-8k<20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0<200+5k<12{,}5 \\ 0<-300-8k<20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -40<k<-37{,}5 \\ -40k<k<-37{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -40<k<-37{,}5 \\ -40k<k<-37{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad k\in\{-39\ ;\ -38\}$$

Pour $k=-39$ on a : $\begin{cases} x=200+5(-39) \\ -300-8(-39) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=5} \\ \boldsymbol{y=12} \end{cases}$

Pour $k=-38$ on a : $\begin{cases} x=200+5(-38) \\ -300-8(-38) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=10} \\ \boldsymbol{y=4} \end{cases}$

**Il y a 5 hommes et 12 femmes ou 10 homme et 4 femmes dans ce groupe**

II) On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y'-2y=-\frac{2}{1+e^{-2x}}$ (E).

1) Soit $g$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f$ la fonction définie par : $f(x)=e^{2x}g(x)$.

Montrons que $f$ est une solution de $(E)$ si, et seulement si $g'(x)=-\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

$f$ est une solution de $(E)$ si et seulement si : $f'-2f=-\frac{2}{1+e^{-2x}}$

$f'(x)=2e^{2x}.g(x)+g'(x).e^{2x}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ ; $f'(x)=\big(g'(x)+2g(x)\big)e^{2x}$

$$\begin{aligned} f'(x)-2f(x)=-\frac{2}{1+e^{-2x}} &\Leftrightarrow \big(g'(x)+2g(x)\big)e^{2x}-2e^{2x}g(x)=-\frac{2}{1+e^{-2x}} \\ &\Leftrightarrow \big(g'(x)+2g(x)-2g(x)\big)e^{2x}=-\frac{2}{1+e^{-2x}} \\ &\Leftrightarrow g'(x)e^{2x}=-\frac{2}{1+e^{-2x}} \\ &\Leftrightarrow g'(x)=\frac{-\frac{2}{1+e^{-2x}}}{e^{2x}} \\ &\Leftrightarrow g'(x)=-\frac{2}{1+e^{-2x}}\times\frac{1}{e^{2x}} \\ &\Leftrightarrow g'(x)=-\frac{2}{1+e^{-2x}}\times e^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{g'(x)=-\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}} \quad \textbf{CQFD} \end{aligned}$$

2) En déduis toutes les solutions de $(E)$.

$g'(x)=-\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \Leftrightarrow g(x)=\ln|1+e^{-2x}|$

Soit $(E')$ : $y'-2y=0$. L'équation différentielle du premier degré sans second membre.

Les solution de $(E')$ sont de la forme $ke^{2x}$ $avec$ $k\in\mathbb{R}$.

$f$ *étant une solution particulière de* $(E)$.

Alors $y=ke^{2x}+e^{2x}g(x)$ $avec$ $k\in\mathbb{R}$

$y=ke^{2x}+e^{2x}.\ln(1+e^{-2x})$

$\boldsymbol{y=\big(k+\ln(1+e^{-2x})\big)e^{2x}}$ ***avec*** $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$ **est l'ensemble solution de** $(\boldsymbol{E})$.

## Problème : ________________________________________ 10pts

I) On définit la fontion $g$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par : $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.

$a)$ *On admet le résul* $\lim\limits_{x\to0} x\ln x=0$. *Déduisons – en la limite de* $g(x)$ *lorsque* $x$ *tend vers* $1$.

$\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{x\to1}[2x-(x-1)\ln(x-1)]=?$

Posons $x-1=X$

si $x\to1$, alors $X\to0$ avec $x=X+1$

$\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{x\to1}[2x-(x-1)\ln(x-1)]=\lim\limits_{X\to0}[2(X+1)-X\ln X]=2(0+1)-0=2$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to1} g(x)=2}$.

b) Calculons $g'(x)$ pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

$\forall x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ \ g'(x) = 2 - \left[\ln(x-1) + \frac{1}{x-1}(x-1)\right] = 2 - \ln(x-1) - 1 = 1 - \ln(x-1)$

$\boldsymbol{\forall x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ \ g'(x) = 1 - \ln(x-1)}$

c) Résolvons l'inéquation : $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue $x$ appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

Pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, on a :

$1 - \ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) < 1 \Leftrightarrow x - 1 < e \Leftrightarrow x < e + 1$

D'où $\boldsymbol{S = ]1\ ;\ 1+e[}$

d) Etudions le sens de variation de $g$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

$\forall x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ \ g'(x) = 1 - \ln(x-1)$

$g'(x) > 0$, pour tout $x \in ]1\ ;\ 1+e[$. **Alors $g$ est strictement croissante sur $]1\ ;\ 1+e[$.**

$g'(x) < 0$, pour tout $x \in ]1+e\ ;\ +\infty[$. **Alors $g$ est strictement décroissante sur $]1+e\ ;\ +\infty[$.**

$g'(x) = 0$, pour tout $x \in \{1+e\}$. **Alors $g$ est constante sur $\{1+e\}$**

e) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique notée $\alpha$, dans l'intervalle $[e+1\ ;\ \ e^3+1]$, puis étudions le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

Pour cela, dressons le tableau de variation de $g$ *sur* l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$

| $x$ | $1$ | | $1+e$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | | | $-$ | |
| $g(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | $(2+e)$ | $\searrow$ | $(0)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x(2 - \frac{x-1}{x}\ln(x-1)\right] = +\infty(2 - 1(+\infty)$.
$= +\infty(-\infty) = -\infty$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

$f(1+e) = 2(1+e) - (1+e-1)\ln(1+e-1)$
$= 2 + 2e - e\ln e = 2 + 2e - e$

$\boldsymbol{f(1+e) = 2+e}$.

$g$ est continue et strictement décroissante sur $]1+e\ ;\ +\infty[$; elle réalise donc une bijection de $]1+e\ ;\ +\infty[$ vers $]-\infty\ ;\ 2+e[$. Or $0 \in ]-\infty\ ;\ 2+e[$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique notée $\alpha$, dans l'intervalle $]1+e\ ;\ +\infty[$. **(1)**

En plus $\left.\begin{array}{l} f(1+e) = 2+e > 0 \\ f(e^3+1) = 2 - e^3 < 0 \end{array}\right\}$ ; $f(1+e) \times f(e^3+1) < 0 \Leftrightarrow f(e^3+1) < 0 < f(e+1)$

$\Leftrightarrow f(e^3+1) < f(\alpha) < f(e+1)$

$\Leftrightarrow e+1 < \alpha < e^3+1$

$\Leftrightarrow \alpha \in [e+1\ ;\ \ e^3+1]$ **(2)**

**(1) *et* (2) $\Leftrightarrow$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique notée $\alpha$, dans l'intervalle $[e+1\ ;\ \ e^3+1] \subset ]1+e\ ;\ +\infty[$**

- Le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$:

$\boldsymbol{g(x) \geq 0\ sur\ \ ]1\ ;\ \alpha]}$

$\boldsymbol{g(x) \leq sur\ \ [\alpha\ ;\ +\infty[}$

II) soit $\varphi$ la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$.

*A/ a) Déterminons* $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)$ *et prouve que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to1}\varphi(x) = \frac{\ln(0^+)}{1} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to1}\varphi(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x^2 + \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[2.\frac{\ln x}{x}\right] = 2\times0 = 0$$

*D'où* $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0}$

b) Calcule $\varphi'(x)$ et montre que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

$\forall\, x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ \ \varphi'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1}x - \ln(x^2-1)}{x^2} = \frac{\frac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2-1}}{x^2} = \frac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{1}{x^2(x^2-1)}g(x^2)$

$\forall\, x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ \ \boldsymbol{\varphi'(x) = \frac{1}{x^2(x^2-1)} g(x^2)}$.

Pour tout $x > 1$ ; $x^2(x^2-1) > 0$. Alors le signe de $\varphi'(x)$ dépend de celui de $g(x^2)$.

**D'où, $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$**

c) Montre que $\varphi$ est croissante sur l'intervalle $]1\ ;\ \sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty[$.

$\forall x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ x^2 \in ]1\ ;\ +\infty[\ et\ g(x^2) \geq 0 \iff g(x^2) \geq g(\alpha) \iff x^2 \leq \alpha$ car $g$ décroissante d'après I) e)

$\iff x \leq \sqrt{\alpha} \iff x \in ]1\ ;\ \sqrt{\alpha}]$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in ]1\ ;\ \sqrt{\alpha}]\ ;\ g(x^2) \geq 0 \iff \varphi'(x) \geq 0 \\ \forall x \in ]\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty]\ ;\ g(x^2) \leq 0 \iff \varphi'(x) \leq 0 \end{array}\right\}$$ **, alors $\varphi$ est croissante sur l'intervalle $]1\ ;\ \sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty[$**

B/ On définit la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$.

1) Vérifions que, pour tout $x$ appartenanr à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$.

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}\ ;\ e^x \neq 0\ \ et\ \ e^{2x} - 1 > 0\}$

$e^x \neq 0\ \ vraie$ et $e^{2x} - 1 > 0 \iff e^{2x} > 1 \iff 2x > 0 \iff x > 0 \iff x \in ]0\ ;\ +\infty[$.

$\forall\, x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ \boldsymbol{f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} = \frac{\ln((e^x)^2-1)}{e^x} = \varphi(e^x)}$ **où** $\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}}$

**Alors , pour tout $x$ appartenanr à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$**

2) Déduisons-en :

a) la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 ;

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \varphi(e^x) = \varphi(e^0) = \varphi(1) = \frac{\ln(1^2-1)}{1} = \ln(0^+) = -\infty \quad ; \quad \boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$$

b) la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(e^x) = \lim_{X\to+\infty} \varphi(X) = 0 \quad avec\ \ e^x = X \quad ; \quad \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

c) le sens de variation de $f$ surl'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et le fait que $f$ admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

$f(x) = \varphi(e^x) \iff f'(x) = e^x \varphi'(e^x)$

$\forall\, x \in ]0\ ;\ +\infty[$ le signe de $f'$ dépend de celui de $\varphi'(e^x)$ qui dépend de $g(e^{2x})$

$g(e^{2x}) \geq 0 \iff g(e^{2x}) \geq g(\alpha) \iff e^{2x} \leq \alpha \iff 2x \leq \ln\alpha \iff x \leq \frac{1}{2}\ln\alpha \iff x \leq \ln\sqrt{\alpha} \iff x \in ]0\ ;\ \ln\sqrt{\alpha}]$

$$\left.\begin{array}{l} sur\ ]0\ ;\ \ln\sqrt{\alpha}]\ ;\ g(e^{2x}) \geq 0 \iff f'(x) \geq 0 \\ sur\ [\ln\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty[\ ;\ g(e^{2x}) \leq 0 \iff f'(x) \leq 0 \end{array}\right\}$$ **, alors $f$ est croissante sur $]0\ ;\ \ln\sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur $[\ln\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty[$. *elle admet* donc un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$**

3) Montrons que, pour tout $x$ de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ ; $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

Dressons le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\ln\sqrt{\alpha}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}\right)$ | $\searrow$ | $0$ |

$\forall\, x ]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

$f(\ln\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(e^{2\ln\sqrt{\alpha}}-1)}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}} = \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}\ln(\alpha-1)$

D'autre par : $g(\alpha) = 0 \iff 2\alpha - (\alpha-1)\ln(\alpha-1) = 0$

$\iff \ln(\alpha-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$

Alors :

$f(\ln\sqrt{\alpha}) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}\ln(\alpha-1) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} \times \frac{2\alpha}{\alpha-1} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

$f(\ln\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

**D’après le tableau de variation** :

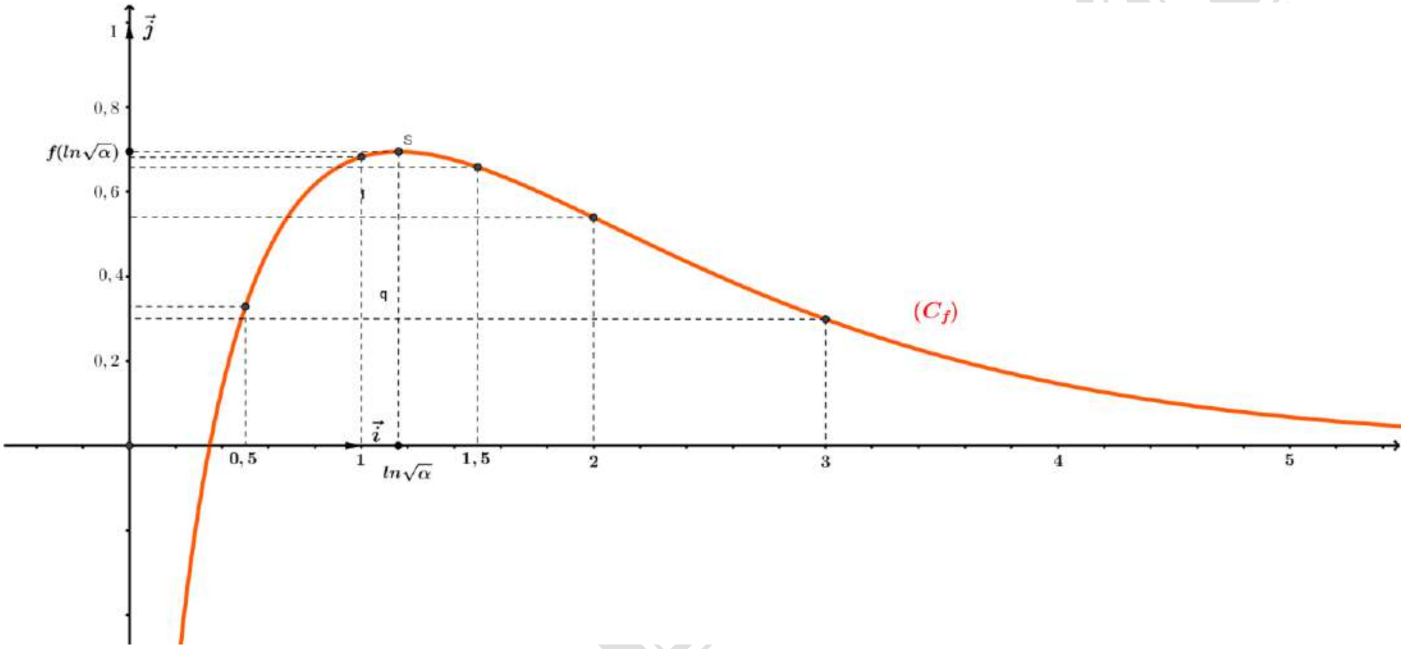
$\forall\, \boldsymbol{x} \in \left]\boldsymbol{0}\ ;\ +\infty\right[\ ;\ \boldsymbol{f(x)} \leq \frac{\boldsymbol{2\sqrt{\alpha}}}{\boldsymbol{\alpha-1}}$

4) Réproduisons et compléte le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à $10^{-2}$ près.

| $x$ | 0,1 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1{,}36$ | 0,33 | 0,68 | 0,66 | 0,54 | 0,3 |

Représentons graphiquement $f$ dans un repère orthogonal, d’unité 5 $cm$ en abscisse, 10 $cm$ en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de $\alpha$.

$\alpha = 10 \quad ; \quad \ln(\sqrt{\alpha}) = ln\sqrt{10} = 1{,}15 \quad ; \quad f(\ln(\sqrt{\alpha})) = f(1{,}15) = \frac{2\sqrt{1{,}5}}{1{,}5-1} = 4{,}9$



## Exercice 1 : 6pts

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ (unité graphique 5 cm), on considère les points $A\ \ et\ \ B$ d'affixes respectives $z_A = 1 + i\quad et\quad z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On désigne par $(C)$ le cercle de centre $O$ et de rayon 1.

1) Donne la forme trigonométrique de $z_A$ et celle de $z_B$.

2) Dans la suite de l'exercice, $M$ désigne un point de $(C)$ d'affixe $e^{i\alpha}$, $[0\ ;\ 2\pi]$. On considère l'application qui à tout point $M$ de $(C)$, associe $f(M) = MA \times MB$.

a) Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.

b) Montre l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$

c) En déduis l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$

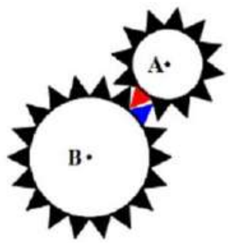
3) a) En utilisant 2). c), montre qu'il existe deux points $M\ \ de\ \ (C)$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.

b) En utilisant 2).c), montre qu'il existe un seul point $M\ \ de\ \ (C)$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

## Exercice 2 : 4pts

I) Une roue d'engrenage $(A)$ a douze dents.

a) Elle est en contact avec une roue $(B)$ de 18 dents. Au bout de combien de tours de chacune d'elles seront-elles de nouveau, et pour la première fois dans la même position ?




b) Elle est maintenant en contact avec une roue dentée $(C)$, ayant plus de 12 dents. Après 10 tours de $(A)$, les deux roux sont, de nouveau pour la première fois, dans la même position. Détermine le nombre de dents de la roue $(C)$.

II) On considère un triangle du plan.

1) a) Détermine et construis le point $G$, barycentre de $\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ -1)\ ;\ (C\ ;\ 1)\}$.

b) Détermine et construis le point $G'$, barycentre de $\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ 5)\ ;\ (C\ ;\ -2)\}$

2) a) Soit $J$ le milieu de $[AB]$. Exprime $\overrightarrow{GG'}\ \ et\ \ \overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}\ \ et\ \ \overrightarrow{AC}$ et en déduis l'intersection des droites $(GG')\ \ et\ \ (AB)$.

b) Montre que le barycentre $I$ de $\{(B\ ;\ 2)\ ;\ (C\ ;\ -1)\}$ appartient à $(GG')$.

3. Soit $D$ un point quelconque du plan. Soient $O$ le milieu de $[CD]$ et $K$ le milieu de $[OA]$. Détermine trois réels $a,\ d\ \ et\ \ c$ tels que $K$ soit barycentre de $\{(A\ ;\ a)\ ;\ (D\ ;\ d)\ ;\ (C\ ;\ c)\}$.

## Problème 1 : 10pts

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. L'unité graphique est 4 $cm$ sur l'axe des abscisses et 2 $cm$ sur l'axe des ordonnées

**Partie A :**

Soit $f$ fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$.

On note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

1) Montre que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

2) a) Montrer que, pour tout $x$ $de$ $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$

b) En déduis que, pour tout $x$ $de$ $\mathbb{R}$, $2 + \cos x + \sin x > 0$.

c) Montre que $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ .

3) a) Montre que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.

b) En déduis les limites de $f$ en $+\infty$ $et$ $en$ $-\infty$.

c) Interprète géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de $f$ en $+\infty$.

4) a) Montre que, sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique $\alpha$.

b) Donne un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

5) Représente la courbe $C$ sur $[0\ ;\ \pi]$.

**Partie B :**

On veut calculer l'aire $A$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $C$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $t = 1$.

1) Montre que $A = 2e - 2 + \int_0^1 (e^{1-t}\cos t)\, dt$

2) On pose $I = \int_0^1 (e^{1-t}\cos t)\, dt$ $et$ $J = \int_0^1 (e^{1-t}\sin t)\, dt$

a) A partir de deux intégrations par parties, montre que : $I = e - J - \cos 1$ $et$ $J = I - \sin 1$.

b) En déduis la valeur de $I$.

3) Détermine la valeur exacte de $A$ en unité d'aire, puis donne une valeur approchée de $A$ à $10^{-2}$ près par défaut.

**Partie C :**

Soit $h$ la fonction définie sur $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

1) a) Montre que la fonction $h$ admet les primitives sur $\mathbb{R}$.

b) Calcule la primitive $H$ de la fonction $h$, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.

2) a) Détermine $\ln\big(f(x)\big)$ pour tout $x$ $de$ $\mathbb{R}$.

b) Etudie le sens de variation de la fonction $H$.

c) Détermine le tableau de variation de $H$.

3) On appelle $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. On ne demande pas de représenter $\Gamma$. On appelle $\Delta$ la droite d'équation $y = -x + 1$.

a) Etudie la position relative de $\Gamma$ et de $\Delta$.

b) Détermine les abscisses des points commun à $\Gamma$ et $\Delta$.

4) a) Etablie une équation de la tangente $(T)$ à $\Gamma$ au point d'abscisse 0.

b) Etudie la position relative de $\Gamma$ et $(T)$.

5) Montre que la courbe $\Gamma$ est contenue dans une bande du plan limité par deux droites parallèles dont on donnera les équations.

## Exercice 1 : 6pts

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ (unité graphique 5 cm), on considère les points $A\ \ et\ \ B$ d'affixes respectives $z_A = 1 + i\quad et\quad z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On désigne par $(C)$ le cercle de centre $O$ et de rayon 1.

1) Donne la forme trigonométrique de $z_A$ et celle de $z_B$.

$|z_A| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}\ \ ;\ \ \arg(z_A) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \arg z_A = \theta = \frac{\pi}{4}$

$\boldsymbol{z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$|z_B| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ ;\ \ \arg(z_A) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \arg z_B = \theta = \frac{3\pi}{4}$

$\boldsymbol{z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$

2) Dans la suite de l'exercice, $M$ désigne un point de $(C)$ d'affixe $e^{i\alpha}$, $[0\ ;\ 2\pi]$. On considère l'application qui à tout point $M$ de $(C)$, associe $f(M) = MA \times MB$.

a) Montrons, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.

$$\begin{aligned}
e^{i2\alpha} - 1 &= \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) - 1 \\
&= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + i(2\sin\alpha.\cos\alpha) - 1 \\
&= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha.\cos\alpha - 1 \\
&= (1 - sin^2\alpha) - sin^2\alpha + 2i\sin\alpha.\cos\alpha - 1 \\
&= 1 - sin^2\alpha - sin^2\alpha + 2i\sin\alpha.\cos\alpha - 1 \\
&= -2\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha.\cos\alpha \\
&= 2i\sin\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\
&= \boldsymbol{2i\sin\alpha.e^{i\alpha}}
\end{aligned}$$

**D'où** $\boldsymbol{e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha}$

b) Montrons l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$

$$\begin{aligned}
f(M) &= MA \times MB \\
&= |z_A - z_M| \times |z_B - z_M| \\
&= |(z_A - z_M)(z_B - z_M)| \\
&= |z_A \times z_B - z_A \times z_M - z_M \times z_B + z_M^2| \\
&= \left|(1 + i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) - (1 + i)e^{\alpha i} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)e^{\alpha i} + e^{2\alpha i}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(i^2 - 1^2) - \left(1 + i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)e^{\alpha i} + e^{2\alpha i}\right| \\
&= \left|\boldsymbol{-1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{\alpha i} + e^{2\alpha i}}\right|
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{f(M) = e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}}$

c) Déduisons-en l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$

$$\begin{aligned}
f(M) &= \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right| \\
&= \left|2i\sin\alpha.e^{i\alpha} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right| \\
&= \left|\left(2i\sin\alpha - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right| \\
&= \left|-\frac{1}{2} + \left(2\sin\alpha - \frac{3}{2}\right)i\right| \times |e^{i\alpha}|
\end{aligned}$$

$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\sin\alpha - \frac{3}{2}\right)^2} \times 1$

$\boldsymbol{f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}}$

3) a) En utilisant 2). c), montrons qu'il existe deux points $M$ $de$ $(C)$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donnons cette valeur minimale.

$f(M)$ est minimal si et seulement si : $\left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2 = 0$

$\left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} + 2\sin\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3}{4} \in [-1\ ;\ 1]$ . Alors il existe un angle $\theta \in [0\ ;\ 2\pi]$ tel que $\sin\theta = \frac{3}{4}$

Sachant que pour tout $\theta \in [0\ ;\ 2\pi]$ tel que : $\sin\theta = \frac{3}{4}$

On a : $cos^2\theta + sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow cos^2\theta + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow cos^2\theta = \frac{7}{16} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ $ou$ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$z_M = \cos\theta + i\ sins\ \theta \Leftrightarrow z_{M_1} = \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4}i$ $et$ $z_{M_2} = -\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4}i$

**Alors existe deux points $\boldsymbol{M_1\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\right)}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{M_2\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\right)}$ $\boldsymbol{de}$ $\boldsymbol{(C)}$ pour lesquels $\boldsymbol{f(M)}$ est minimal.**

**Cette valeur minimale est : $\boldsymbol{f(M) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}}$**

b) En utilisant 2).c), montrons qu'il existe un seul point $M$ $de$ $(C)$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donnons cette valeur minimale.

$f(M)$ est maximal si et seulement si, $\sin\alpha = -1$ c'est-à-dire pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Alors $z_M = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$.

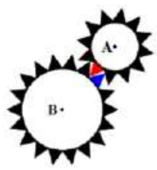
Et $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2(-1)\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

**D'où, il existe un seul point $\boldsymbol{M\binom{0}{-1}}$ pour lequel $\boldsymbol{f(M)}$ est minimal.**

**Cette valeur maximale est $\boldsymbol{f(M) = \frac{5\sqrt{2}}{2}}$**

## Exercice 2 :___________________________________________4pts

I) a) Le nombre de tour Au bout duquel chacune d'elles seront de nouveau, et pour la première fois dans la même position.




Soient $x$ le nombre de tours de la roue $A$ et $y$ le nombre de tours de la roue $B$ :

On l'équation : $12x = 18y$.

$12x = 18y \Leftrightarrow 2x = 3y \Leftrightarrow 2x \equiv 0[3] \Leftrightarrow x \equiv 0[3] \Leftrightarrow x = 3k$.

Remplaçons x par sa valeur dans l'équation :

$3y = 2(3k) \Leftrightarrow y = 2k$

Pour la première fois dans la même position signifie que $k = 1$

**On a : x = 3 et y = 2. Alors, Les deux roues $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{B}$ seront de nouveau, pour la première, dans la même position au 3è tours de $\boldsymbol{A}$ et 2è tours de $\boldsymbol{B}$.**

b) Déterminons le nombre de dents de la roue $(C)$.

Soit $k$ le nombre de dent pour $(C)$ et $x$ le nombre de tours de $(C)$, tel que $k > 12$

On a : $k \times x = 12 \times 10 \Leftrightarrow k \times x = 120 \Leftrightarrow k \times x = 2^3 \times 3 \times 5$

120 a $(3 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1)$ diviseurs soit 16

$D_{120} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ 10\ ;\ 12\ ;\ 15\ ;\ 20\ ;\ 24\ ;\ 30\ ;\ 40\ ;\ 60\ ;\ 120\ \}$

$k \times x = 1 \times 120$ $ou$ $k \times x = 2 \times 60$ $ou$ $k \times x = 3 \times 40$ $ou$ $k \times x = 3 \times 30$ $ou$ $k \times x = 5 \times 24$ $ou$

$k \times x = 6 \times 20$ $ou$ $k \times x = 8 \times 15$ $ou$ $k \times x = 10 \times 12$

- Si le nombre de tours de $(C)$ est $x = 1$ alors le nombre de dent pour $(C)$ est $k = 120$
- Si le nombre de tours de $(C)$ est $x = 2$ alors le nombre de dent pour $(C)$ est $\boldsymbol{k = 60}$

- Si le nombre de tours de $(C)$ est $x = 3$ alors le nombre de dent pour $(C)$ est $\boldsymbol{k = 40}$
- Si le nombre de tours de $(C)$ est $x = 4$ alors le nombre de dent pour $(C)$ est $\boldsymbol{k = 30}$
- Si le nombre de tours de $(C)$ est $x = 5$ alors le nombre de dent pour $(C)$ est $\boldsymbol{k = 15}$
- Si le nombre de tours de $(C)$ est $x = 6$ alors le nombre de dent pour $(C)$ est $\boldsymbol{k = 20}$
- Si le nombre de tours de $(C)$ est $x = 8$ alors le nombre de dent pour $(C)$ est $\boldsymbol{k = 15}$
- Si le nombre de tours de $(C)$ est $x = 10$ alors le nombre de dent pour $(C)$ est $k = 12$ à rejeter car $k > 12$

II) On considère un triangle du plan.

1) a) Déterminons et construis le point $G$, barycentre de $\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ -1)\ ;\ (C\ ;\ 1)\}$.

$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ Fixons A

$$\overrightarrow{GA} - \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC}}$$

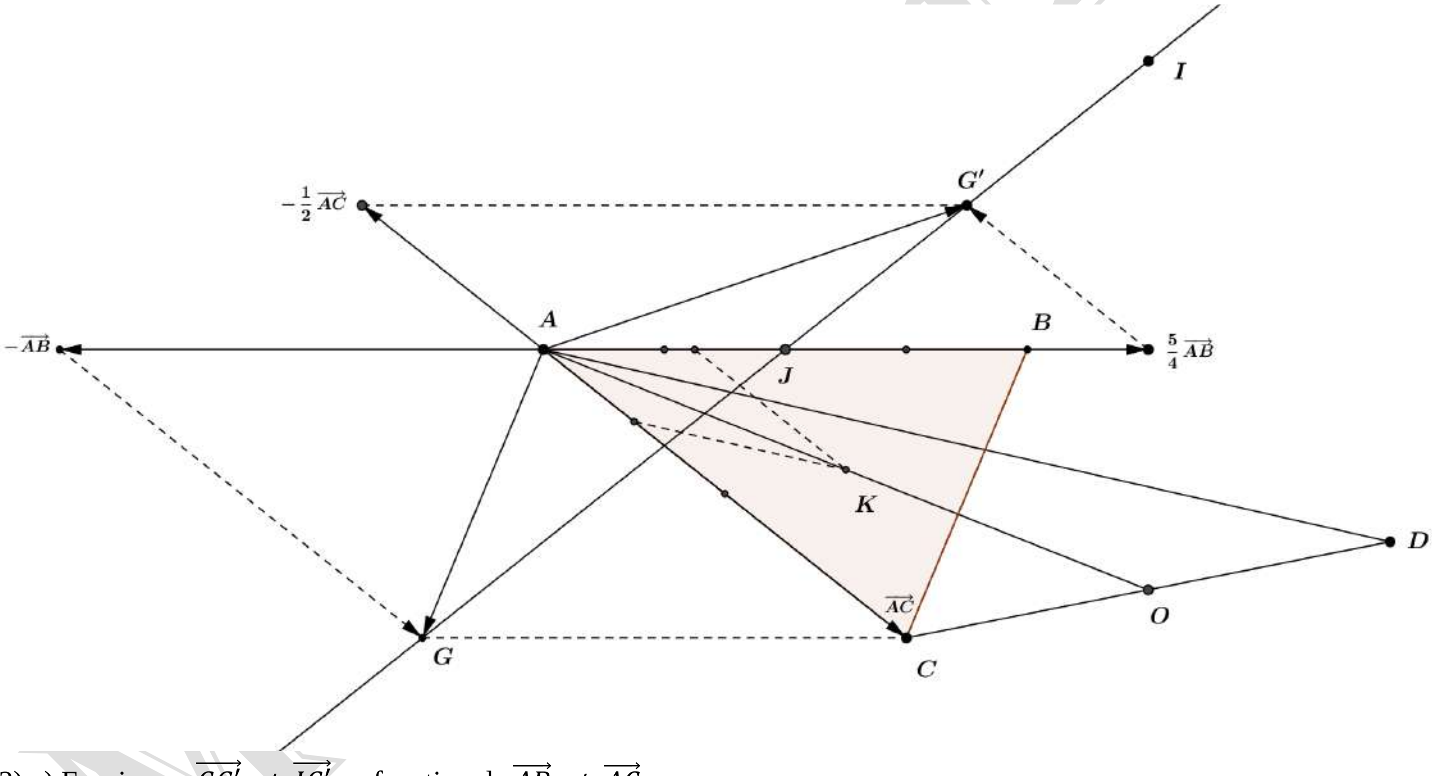
b) Détermine et construis le point $G'$, barycentre de $\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ 5)\ ;\ (C\ ;\ -2)\}$

$\overrightarrow{G'A} + 5\overrightarrow{G'B} - 2\overrightarrow{G'C} = \vec{0}$ Fixons A

$$\overrightarrow{G'A} + 5\left(\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{AB}\right) - 2\left(\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{G'A} + 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{AG'} + 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG'} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AG'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}} \qquad (2)$$

Construction :




2) a) Exprimons $\overrightarrow{GG'}$ *et* $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$

Soit $J$ le milieu de $[AB]$, alors : $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$ *ou* $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG'} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) + \left(\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{4}\overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{GG'} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$$

$\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$ Fixons $G'$

$$\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{JG'} + \overrightarrow{G'A}\right) + \left(\overrightarrow{JG'} + \overrightarrow{G'B}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{2}\overrightarrow{JG'} + \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{2}\overrightarrow{JG'} = \overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{BG'}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JG'} = \left(\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JG'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JG'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JG'} = \left(\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JG'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{JG'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

Ou encore :

$\overrightarrow{JG'} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AG'}$

$= -\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AG'}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$\boldsymbol{\overrightarrow{JG'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

Déduisons-en l'intersection des droites $(GG')$ $et$ $(AB)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{GG'} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{JG'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{GG'} = 3\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \\ \overrightarrow{JG'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'}$

$\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'} \Leftrightarrow$ *Les points* $G$ ; $G'$ *et* $J$ sont alignés. Par conséquent : $J \in (GG')$ (1)

D'autre part : $J \in (AB)$ voir 2) a). (2)

Alors : (1) et (2)$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{(GG') \cap (AB) = \{J\}}$

b) Montrons que le barycentre $I$ de $\{(B\ ;\ 2)\ ;\ (C\ ;\ -1)\}$ appartient à $(GG')$.

$2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ Fixons B

$2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'}$ (1)

$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG'} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG'} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = -\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AG'}$ Car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{GG'} = -\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AG'}$

$= \overrightarrow{BI} + \left(\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$= \overrightarrow{BI} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$= \overrightarrow{BI} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{BI} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BI}$ Avec $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IB}$ $ou$ $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BI}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BI} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BI} + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{JB}\right)$ Avec $\overrightarrow{JB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{JB}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{JI}$ Car $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{JI}$

$\overrightarrow{GG'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{JG'} + \frac{3}{2}\overrightarrow{G'I}$

$* \begin{cases}\overrightarrow{GG'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{JG'} + \frac{3}{2}\overrightarrow{G'I} \\ \overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'} + 3\overrightarrow{G'I} & (1) \\ \overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'} & (2)\end{cases}$

$(1) - (2) \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{G'I}}$ **$\Leftrightarrow$Les points $G$ ; $G'$ *et* $I$ sont alignés. Alors $I \in (GG')$**

3. Soit $D$ un point quelconque du plan. Soient $O$ le milieu de $[CD]$ et $K$ le milieu de $[OA]$. Déterminons trois réels $a,\ d\ et\ c$ tels que $K$ soit barycentre de $\{(A\ ;\ a)\ ;\ (D\ ;\ d)\ ;\ (C\ ;\ c)\}$.

$O$ milieu de $[CD]$, alors : $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ (1)

$K$ milieu de $[OA]$, alors : $\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{KA} = \vec{0}$ (2)

$(1) + (2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{KA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \left(\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OD}\right) + \overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}+\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KC}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KA}$ Car $\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{KA}=\vec{0}$ $ou$ $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{KA}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow K = bary\{(A\ ;\ 2)\ ;\ (D\ ;\ 1)\ ;\ (C\ ;\ 1)\}$

Par identification :

$\boldsymbol{a=2\ ;\ b=1\ et\ c=1}$

## Problème :______________________________________10pts

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. L'unité graphique est 4 $cm$ sur l'axe des abscisses et 2 $cm$ sur l'axe des ordonnées

**Partie A :**

Soit $f$ fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}$.

On note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

2) a) Montrons que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $f(x)>0$.

$\forall\, x\in\mathbb{R}\ ;\ -1\le\cos x\le 1$ $\quad et\quad$ $e^{1-x}>0$

$-1\le\cos x\le 1 \Leftrightarrow 1\le 2+\cos x\le 3$

$\Leftrightarrow 2+\cos x>0$

$\boldsymbol{\begin{cases}2+\cos x>0\\ e^{1-x}>0\end{cases} \Leftrightarrow\ (2+\cos x)e^{1-x}>0.}$ ***Alors* pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{f(x)>0}$.**

2) a) Montrer que, pour tout $x\ de\ \mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$

$\forall\ x\ de\ \mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{4}+\sin x.\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos x.\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\cos x+\sin x$

**D'où, $\boldsymbol{\forall\ x\ de\ \mathbb{R},\ \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x+\sin x}$**

b) Déduisons-en que, pour tout $x\ de\ \mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0$.

$\forall\, x\in\mathbb{R}$ on a : $-1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\cos x+\sin x\le\sqrt{2}$ d'après 2) a)

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{2}\le 2+\cos x+\sin x\le 2+\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 0<2-\sqrt{2}\le 2+\cos x+\sin x\le 2+\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 0<2+\cos x+\sin x$

**Alors, pour tout $\boldsymbol{x\ de\ \mathbb{R},\ 2+\cos x+\sin x>0}$.**

c) Montre que $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ .

$$f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}$$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-\sin x.e^{1-x}-e^{1-x}(2+\cos x)=-(2+\cos x+\sin x)e^{1-x}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $e^{1-x}>0$, le signe de $f'$ dépend de celui de $-(2+\cos x+\sin x)$

D'après b), pour tout $x\ de\ \mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0\Leftrightarrow -(2+\cos x+\sin x)<0$

**D'où, pour tout $\boldsymbol{x\ de\ \mathbb{R},\ f'(x)<0}$. Alors $\boldsymbol{f}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ .**

3) a) Montrons que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $e^{1-x}\le f(x)\le 3e^{1-x}$.

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $On\ a$ :

$-1\le\cos x\le 1\ \Leftrightarrow\ 1\le 2+\cos x\le 3$

$\Leftrightarrow e^{1-x}\le(2+\cos x)e^{1-x}\le 3e^{1-x}$ Car $e^{1-x}>0$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^{1-x}\le f(x)\le 3e^{1-x}$

Alors, **pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{e^{1-x}\le f(x)\le 3e^{1-x}}$**

b) Déduisons-en les limites de $f$ en $+\infty$ $et\ en\ -\infty$.

$f(x)\le 3e^{1-x}$ $et$ $\lim\limits_{x\to+\infty}3e^{1-x}=0$ $alors$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$

$e^{1-x} \leq f(x) \quad et \quad \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty \;\; alors \;\; \boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

c) Interprétons géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de $f$ en $+\infty$.

$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.\ Alors\ (C_f)\ admet\ une\ asymptote\ horizontale\ en + \infty\ d'équation\ \ y} = 0$

4) a) Montrons que, sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique $\alpha$.

Posons pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 3$

$*$ Limites

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 3) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - 3 = +\infty - 3 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 3 = 0 - 3 = -3$

$*$ Tableau de variation :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) < 0.$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $(0)$ | $-3$ |

$g$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R} = ]-\infty\ ;\ +\infty[$, elle réalise donc une bijection de $]-\infty\ ;\ +\infty[$ vers $]-3\ ;\ +\infty[$. Or $0 \in ]-3\ ;\ +\infty[$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in ]-\infty\ ;\ +\infty[$. Telle que $g(\alpha) = 0$. En plus :

$\left.\begin{array}{r} g(0) = f(0) - 3 = 2e - 3 > 0 \\ g(\pi) = e^{1-\pi} - 3 < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha \in [0\ ;\ \pi]$ D'après le théorème des valeurs intermédiaire

En conclusion : L'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0\ ;\ \pi] \subset \mathbb{R}$. Par conséquent, $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3$.

D'où, sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique $\alpha$

**Autre méthode :**

$\forall\ x \in [0\ ;\ \pi]$, on a : $0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow f(\pi) \leq f(x) \leq f(0)$ car $f$ est strictement décroissante.

$\Leftrightarrow e^{1-\pi} \leq g(x) \leq 3e$

$\Leftrightarrow g(x) \in [e^{1-\pi}\ ;\ 3e]$

$Si\ \ x \in [0\ ;\ \pi]\ \ alors\ \ f([0\ ;\ \pi]) = [e^{1-\pi}\ ;\ 3e]$.

$f$ est continue et strictement décroissante sur $[0\ ;\ \pi] \subset \mathbb{R}$, alors elle réalise de $[0\ ;\ \pi]\ \ vers\ \ f([0\ ;\ \pi]) = [e^{1-\pi}\ ;\ 3e]$

Or, $3 \in [e^{1-\pi}\ ;\ 3e]$. Alors il existe une et une seule solution $\alpha \in [0\ ;\ \pi]$ telle que $f(x) = 3 \in [e^{1-\pi}\ ;\ 3e]$

b) Donnons un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique $\alpha$ telle que $f(\alpha) = 3$

Par balayage :

$\left.\begin{array}{r} f(0) = 3e = 8{,}15 \\ f(1) = (2 + \cos 1)e^0 = 2{,}54 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 3 \in [f(1)\ ;\ f(0)] \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq 1$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaire

| $x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | … | … | … | … | … | … | … | … | 3,29 | 2,9 | |

$3 \in [f(0{,}9)\ ;\ f(0{,}8)] \Leftrightarrow \alpha \in 0{,}8 \leq \alpha \leq 0{,}9$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaire

| $x$ | 0,8 | 0,81 | 0,82 | 0,83 | 0,84 | 0,85 | 0,86 | 0,87 | 0,88 | 0,89 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | 3,01 | 2,97 | 2,94 | 2,9 |

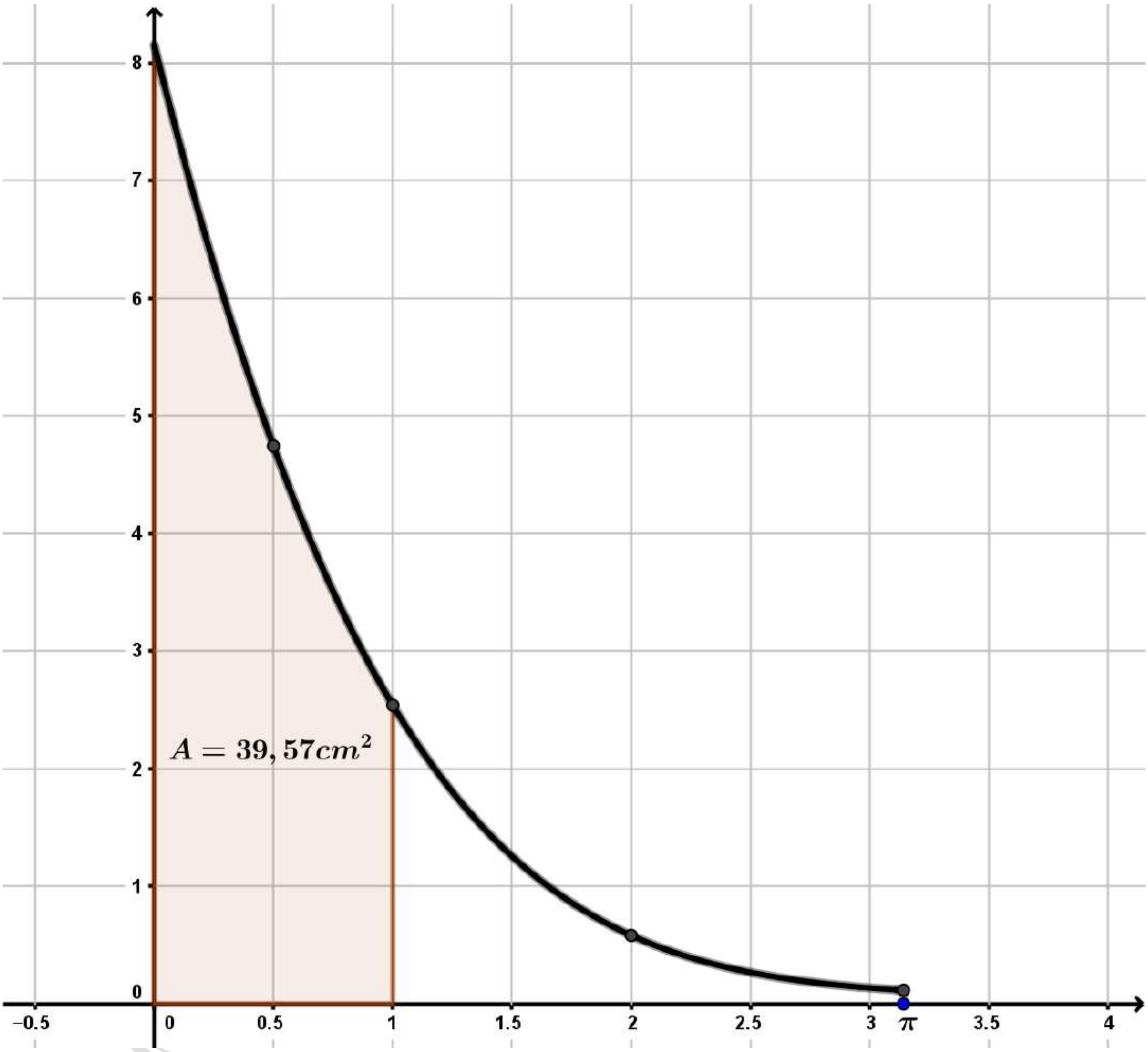
$3 \in [f(0{,}88)\ ;\ f(0{,}87)] \Leftrightarrow 0{,}87 \leq \alpha \leq 0{,}88$. D'après le théorème des valeurs intermédiaire

**Alors, $0,87 \leq \alpha \leq 0,88$ est un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.**

5) Représentons la courbe $C$ sur $[0\ ;\ \pi]$.

Tableau de valeur :

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 2 | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 8,1 | 4,7 | 2,2 | 0,6 | 0,1 |




**Partie B :**

On veut calculer l'aire $A$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $C$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $t = 1$.

1) Montrons que $A = 2e - 2 + \int_0^1 (e^{1-t} \cos t)\, dt$

$A = \int_0^1 f(t)\, dt.ua = \int_0^1 (2 + \cos t)e^{1-x} dt\,.ua$

$\int_0^1 (2 + \cos x)e^{1-t} dt = \int_0^1 2\, e^{1-x} dt + \int_0^1 \cos t\,.\, e^{1-t} dt$

$= 2\int_0^1 e^{1-t} dt + \int_0^1 \cos t\,.\, e^{1-t} dt$

$= 2[-e^{1-t}]_0^1 + \int_0^1 \cos t\,.e^{1-t}dt$

$= 2(-e^0 + e) + \int_0^1 \cos t\,.e^{1-t}dt$

$= -2 + 2e + \int_0^1 \cos t\,.e^{1-t}dt$

**D'où $A = 2e - 2 + \int_0^1 (e^{1-t}\cos t)\,dt$ exprimée en unités d'aire**

2) On pose $I = \int_0^1 (e^{1-t}\cos t)\,dt \quad et \quad J = \int_0^1 (e^{1-t}\sin t)\,dt$

a) A partir de deux intégrations par parties, montrons que : $I = e - J - \cos 1 \;\; et \;\; J = I - \sin 1$.

$I = \int_0^1 (e^{1-t}\cos t)\,dt$

Posons :

$u = e^{1-t} \Leftrightarrow u' = -e^{1-t}$

$v' = \cos t \Leftrightarrow v = \sin t$

$I = [\sin t\,.e^{1-t}]_0^1 - \int_0^1 -\sin t\,.e^{1-t}\,dx$

$\;\; = \sin 1 - 0 + \int_0^1 e^{1-t}.\sin x\,dx$

$I = \sin 1 + J \Leftrightarrow \boldsymbol{J = I - \sin 1}$

$u = \cos t \Leftrightarrow u' = -\sin t$

$v' = e^{1-t} \Leftrightarrow v = -e^{1-t}$

$I = [-e^{1-t}\cos x]_0^1 - \int_0^1 e^{1-t}\sin t\,dt$

$I = (-\cos 1 + e) - J \Leftrightarrow \boldsymbol{I = e - J - \cos 1}$

b) Déduisons-en la valeur de $I$.

$\begin{cases} J = I - \sin 1 \\ I = e - J - \cos 1 \end{cases} \Leftrightarrow I = e - (I - \sin 1) - \cos 1 \Leftrightarrow 2I = e + \sin 1 - \cos 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{I = \frac{1}{2}(e + \sin 1 - \cos 1)}$

3) Déterminons la valeur exacte de $A$ en unité d'aire, puis donnons une valeur approchée de $A$ à $10^{-2}$ près par défaut.

$A = \left(2e - 2 + \int_0^1 (e^{1-t}\cos t)\,dt\right) ua$

$\;\; = (2e - 2 + I)ua$

$\;\; = \left(2e - 2 + \frac{1}{2}(e + \sin 1 - \cos 1)\right) ua$

$A = \left(\frac{1}{2}(5e - 4 + \sin 1 - \cos 1)\right) 8\,cm^2 \quad avec \;\; ua = 2cm \times 4cm$

$\boldsymbol{A = 4(5e - 4 + \sin 1 - \cos 1)\;\; cm^2}$ **Valeur exacte**

$\boldsymbol{A = 39{,}57}$ Est une valeur approchée de $A$ à $10^{-2}$ près par défaut.

**Partie C :**

Soit $h$ la fonction définie sur $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

1) a) Montrons que la fonction $h$ admet les primitives sur $\mathbb{R}$.

**$h$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $h$ admet les primitives sur $\mathbb{R}$.**

b) Calculons la primitive $H$ de la fonction $h$, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.

$H(x) = -x + \ln|2 + \cos x| + c \quad ,c \in \mathbb{R} \quad et \quad H(0) = 1 + \ln 3$

$H(0) = 1 + \ln 3 \Leftrightarrow -0 + \ln|3| + c = 1 + \ln 3 \Leftrightarrow c = 1$

**D'où $H(x) = -x + 1 + \ln|2 + \cos x|$ est la fonction $h$, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.**

2) a) Déterminons $\ln(f(x))$ pour tout $x \;\, de \;\, \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R},\;\; \ln(f(x)) = \ln[(2 + \cos x)e^{1-x}] = \ln(2 + \cos x) + \ln(e^{1-x}) = \ln(2 + \cos x) + 1 - x$

$\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R},\;\; \ln(f(x)) = \ln(2 + \cos x) + 1 - x}$

b) Etudions le sens de variation de la fonction $H$.

$H(x) = -x + 1 + \ln|2 + \cos x|$

$D_H = \mathbb{R} = ]-\infty \;;\; +\infty[$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\; H'(x) = h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2+\cos x} = \frac{-2-\cos x-\sin x}{2+\cos x} = -\frac{2+\cos x+\sin x}{2+\cos x}$

Le signe $H'$ dépend de son numérateur.

D'après partie A : b), pour tout $x \ de \ \mathbb{R}$, $2+\cos x > 0 \quad et \quad 2+\cos x + \sin x > 0$

Donc, **pour tout $x \ de \ \mathbb{R}$, $H'(x) < 0$. Alors $H$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.**

c) Déterminons le tableau de variation de $H$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = +\infty \qquad et \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = -\infty$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $H'(x)$ | $-$ | |
| $H(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

3) On appelle $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto 1 - x + \ln(2+\cos x)$. On ne demande pas de représenter $\Gamma$. On appelle $\Delta$ la droite d'équation $y = -x+1$.

a) Etudions la position relative de $\Gamma$ et de $\Delta$.

Posons : $P(x) = 1 - x + \ln(2+\cos x) \quad et$ $\Gamma$ sa courbe représentative

$P(x) - y = 1 - x + \ln(2+\cos x). + x - 1 = \ln(2+\cos x)$

$P(x) - y = \ln(2+\cos x)$ e

$\forall x \in \mathbb{R}, \ 2+\cos x > 0, alors \ \ln(2+\cos x) \geq 0$

**D'où pour tout $x$ de $\mathbb{R}, P(x) - y \geq 0$. Alors $(\Gamma)$ est au-dessus $(\Delta)$ sur $\mathbb{R}$.**

b) Déterminons les abscisses des points commun à $\Gamma$ et $\Delta$.

$(\Gamma) \cap (\Delta) \ : \ P(x) = y \iff P(x) - y = 0$

$\iff \ln(2+\cos x) = 0$

$\iff 2+\cos x > 1$

$\iff \cos x = -1 \iff x = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

**$x = \{(2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}\}$ sont les abscisses des points commun à $\Gamma$ et $\Delta$.**

4) a) Etablie une équation de la tangente $(T)$ à $\Gamma$ au point d'abscisse $0$.

$(T) : y = P'(0)(x-0) + P(0)$

$P(0) = 1 + \ln 3 \quad et \quad P'(0) = h(0) = -1$

$(T) : \ y = -1(x-0) + 1 + \ln 3 \iff$ **$(T) : y = -x + \ln 3 + 1$**

b) Etudions la position relative de $\Gamma$ et $(T)$.

$P(x) - y_T = (1 - x + \ln(2+\cos x)) - (-x + \ln 3 + 1)$

$= 1 - x + \ln(2+\cos x) + x - \ln 3 - 1$

$P(x) - y_T = \ln(2+\cos x) - \ln 3$

$\forall \ x \in \mathbb{R}; \ \cos x \leq 1 \iff 2 + \cos x \leq 3$

$\iff \ln(2+\cos x) \leq \ln 3$ Car $\ln x$ est croissante

$\iff \ln(2+\cos x) - \ln 3 \leq 0$

$\iff P(x) - y_T \leq 0$

**$\forall \ x \in \mathbb{R}, P(x) - y_T \leq 0$. Alors $(\Gamma)$ est en dessous de la tangente $(T)$ sur $\mathbb{R}$.**

5) Montre que la courbe $\Gamma$ est contenue dans une bande du plan limité par deux droites parallèles dont on donnera les équations.

D'après 3) a) ; $(\Gamma)$ est au-dessus de la droite $(\Delta)$ d'équation $y = -x + 1$ sur $\mathbb{R}$

D'après 4) a) ; $(\Gamma)$ est en dessous de la tangente $(T)$ d'équation $y = -x + \ln 3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

En plus la droite $(\Delta) \ et \ (T)$ ont le même coefficient directeur, Alors elle sont parallèles.

Par conséquent :

**La courbe $\Gamma$ est contenue dans une bande du plan limité par deux droites parallèles d'équations $(\Delta) : y = -x + 1$ et $(T) : \ y = -x + \ln 3 + 1$.**

# Baccalauréat Malien : Session de septembre 2020 ( TSE-STI )

## Exercice 1 : 5pts

On désigne par $A\ et\ B$ les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i\ et\ z_B = -2i$, et pour tout nombre complexe $z$ différent $de\ z_B$ , On pose $Z = \frac{z-z_A}{z-z_B}$

1) Détermine, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

a) $Z$ soit un réel ;

b) $Z$ soit un imaginaire pur $($éventuellement nul$)$ ;

c) $Z$ soit de module 1.

2) Calcule $|Z-1| \times |z - z_B|$ et en déduis que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre $B$ et de rayon $R$, les points d'affixes $Z$ sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et rayon.

## Exercice 2 : 5pts

1) Démontre que pour tout entier naturel $n$, $2^{3n} - 2$ est un multiple de 7. En déduis que $2^{3n+1} - 1$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.

2) Détermine les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Si $p = 3n$, quel est reste de la division de $A_p$ par 7 ?

b) Démontre que si $p = 3n + 1$ alors $A_p$ est divisible par 7.

c) Étudie le cas où $p = 3n + 2$.

## Problème : 10pts

Les parties $A\ et\ B$ sont indépendantes.

A) Soit $f$ la fonction définie $[0\ ;\ +\infty[\ par\ f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^{-x})$.

On désigne par $(C)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, unité graphique : 2cm.

1) Montre que, pour tout réel $x$ positif : $f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-3x})$.

2) a) Étudie la limite de $f\ en\ +\infty$.

b. Montre que la droite $(D)$ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $(C)$, quand $x$ tend vers $+\infty$.

c) Étudie la position de $(C)\ et\ (D)$.

3) Étudie les variations de $f$.

4) Trace $(C)\ et\ (D)$.

5) Montre que, pour tout réel $\alpha$, $\alpha > 0$ : $\int_0^\alpha e^{-3x}\,dx \leq \frac{1}{3}$.

6) Établis que, pour tout réel $u, u \geq 0$ ; $\ln(1+u) \leq u$.

7) En déduis que, pour tout réel $\alpha, \alpha > 0$ : $\int_0^\alpha \ln(1 + 2e^{-3x})\,dx \leq \frac{2}{3}$.

8) Soit $A(x)$ l'aire, exprimée en cm², du domaine limité par les droites d'équations $x = 0$ ;

$x = \alpha,\ \ y = 2x\ et$ la courbe $(C)$. En déduis des questions précédentes une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de $\alpha$.

B) 1) Étudie les variations de la fonction $h$ définie dans l'intervalle $[2\ ;\ 4]$ par :

$h : x \longmapsto h(x) = 2 - x + \ln x$ ; en déduis que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β

2) Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

Montre que l'image de l'intervalle $[2\ ;\ 4]$ par la fonction $g : x \longmapsto 2 + lnx$ est incluse dans l'intervalle $[2\ ;\ 4]$. .

3) Montre que en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel $n : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$.

4) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouve que pour tout entier nature $n : |u_n - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5) En déduis que $(u_n)$ est convergente.

6) Détermine un entier $N$ tel que $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$.

**Exercice 1 :** **5pts**

On désigne par $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$, et pour tout nombre complexe $z$ différent de $z_B$ , On pose $Z = \frac{z-z_A}{z-z_B}$

- Ecrivons $Z$ sous forme algébrique

$$Z = \frac{z-z_A}{z-z_B} = \frac{x+yi-2+i}{x+yi+2i} = \frac{(x-2)+(y+1)i}{x+(y+2)i} = \frac{[(x-2)+(y+1)i][x-(y+2)i]}{x^2+(y-2)^2} = \frac{x(x-2)-(x-2)(y+2)i+x(y+1)i+(y+1)(y+2)}{x^2+(y-2)^2}$$
$$= \frac{(x^2-2x+y^2+3y+2)+(-xy-2x+2y+4+xy+x)i}{x^2+(y-2)^2}$$

$$Z = \frac{1}{x^2+(y-2)^2}\left((x^2+y^2-2x+3y+2)+(-x+2y+4)i\right)$$

1) Déterminons, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

a) $Z$ soit un réel ;

$Z$ est réel si et seulement si : $Im(Z) = 0$

$Im(Z) = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 4 = 0$

**Alors, l'ensemble des points $M(z)$ tel que $Z$ soit un réel est la droite d'équation $(D) : -x + 2y + 4 = 0$ Privé de $B(0\ ;\ -2)$.**

b) $Z$ soit un imaginaire pur $\big($éventuellement nul$\big)$ ;

$Z$ est un imaginaire pur si et seulement si : $Re(Z) = 0$

$$Re(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 3y) + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow [(x-1)^2 - 1] + \left[\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-1 - \frac{9}{4} + 2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

**Alors, l'ensemble des points $M(z)$ tel que $Z$ soit un imaginaire pur est le cercle de centre $I\left(1\ ;\ -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$ privé de $B(0\ ;\ -2)$.**

c) $Z$ soit de module 1.

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = 1 \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

**Alors, l'ensemble des points $M(z)$ tel que $Z$ soit de module 1 est la médiatrice du segment $[AB]$.**

2) Calculons $|Z-1| \times |z - z_B|$

$$|Z-1| \times |z-z_B| = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B} - 1\right| \times |z-z_B| = \left|\frac{z_B-z_A}{z-z_B}\right| \times |z-z_B| = \left|\frac{z-z_B}{z-z_B}\right| \times |z_B - z_A|$$
$$= |1| \times |-2i - 2 + i| = |-2 - i| = \sqrt{5}$$

$$\boldsymbol{|Z-1| \times |z-z_B| = \sqrt{5}}$$

- Déduisons-en que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre $B$ et de rayon $R$, les points d'affixes $Z$ sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et rayon.

$(M(z) parcourt\ le\ cercle\ de\ centre\ B\ et\ de\ rayon\ R) \Leftrightarrow |z - z_B| = R$

$|Z-1| \times |z-z_B| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |Z-1| \times R = \sqrt{5} \Leftrightarrow |Z-1| = \frac{\sqrt{5}}{R}$

**Lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre $B$ et de rayon $R$, alors les points d'affixes $Z$ sont tous situés sur un même cercle de centre Ω d'affixe 1 et rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{R}$**

## Exercice 2 :______________________________5pts

1) Démontrons que pour tout entier naturel $n$, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

Par récurrence :

- Initialisation :

Soit pour tout entier naturel, la proposition $P_n$ : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7(c'est-à-dire $2^{3n} - 1 \equiv 0[7]$ )

Pour $n = 0$ on a :

$$\begin{cases} \text{Pour } n = 0,\ \ P_0 :\ 2^{3(0)} - 1 = 0 \equiv 0[7]\ \ vraie \\ Pour\ n = 1,\ \ P_1 :\ 2^{3(1)} - 1 = 8 - 1 = 7 \equiv 0[7]\ \ vraie \end{cases} \qquad (1)$$

- Transmission :

Pour tout entier naturel, supposons $P_n$ vraie (c'est-à-dire $2^{3n} - 1 \equiv 0[7]$ ou $2^{3n} - 1 = 7k$ ; $k \in \mathbb{Z}$ )

Et montrons que $P_{n+1}$ est vraie (c'est-à-dire $2^{3(n+1)} - 1 \equiv 0[7]$)

$$\begin{aligned} P_{n+1} : 2^{3(n+1)} - 1 &= 2^{3n} \times 2^3 - 1 \\ &= 2^{3n}(7 \times 1 + 1) - 1 \\ &= 7 \times 2^{3n} + 2^{3n} - 1 \\ &= 7 \times 2^{3n} + (2^{3n} - 1) \\ &= 7 \times 2^{3n} + 7k \qquad \text{Car par hypothèse, } 2^{3n} - 1 = 7k\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ &= 7(2^{3n} + k) \\ &= 7k' \equiv 0[7] \qquad où\ \ k' = 2^{3n} + k \end{aligned}$$

$P_{n+1}$ : $2^{3(n+1)} - 1 \equiv 0[7]$ vraie (2)

- Conclusion :

**(1) et (2) ⇔ Pour tout entier naturel $n$, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7**.

-Déduisons-en que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.

$$\begin{aligned} 2^{3n+1} - 2 &= 2^{3n} \times 2 - 2 \\ &= 2(2^{3n} - 1) \\ &= 2(7k) \qquad \text{Car } 2^{3n} - 1 \equiv 0[7] \text{ ou } 2^{3n} - 1 = 7k\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ &= 14k \equiv 0[7] \end{aligned}$$

**D'où, $2^{3n+1} - 2 \equiv 0[7]$. Alors $2^{3n+1} - 2$ sont des multiples de 7**.

$$\begin{aligned} 2^{3n+2} - 4 &= 2^{3n} \times 2^2 - 4 \\ &= 2^{3n} \times 4 - 4 \\ &= 4(2^{3n} - 1) \\ &= 4(7k) \qquad \text{Car } 2^{3n} - 1 \equiv 0[7] \text{ ou } 2^{3n} - 1 = 7k\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ &= 28k \equiv 0[7] \end{aligned}$$

**D'où $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7**.

2) Détermine les restes de la division par 7 des puissances de 2.

$2^0 \equiv 1[7]$ ; $2^1 \equiv 2[7]$ ; $2^2 \equiv 4[7]$ ; $2^3 \equiv 1[7]$. Alors 3 est la période c'est-à-dire $2^{3k} \equiv 1[7]$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2^{3k} \equiv 1[7]$ ; $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ et $2^{3k+2} \equiv 4[7]$.

**Alors les restes de la division par 7 des puissances de 2 sont : 1 ; 2 $et$ 4**.

3) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Le reste de la division de $A_p$ par 7 $si\ p = 3n$

$A_{3n} = 2^{(3n)} + 2^{2(3n)} + 2^{3(3n)}$
$\quad = (2^3)^n + (2^3)^{2n} + (2^3)^{3n}$
$A_{3n} \equiv (1)^n + (1)^{2n} + (1)^{3n}[7] \Leftrightarrow A_{3n} \equiv 3[7]$

**Alors, $si\ p = 3n$, le reste de la division de $A_p$ par 7 est 3**

b) Démontrons que si $p = 3n + 1$ alors $A_p$ est divisible par 7.

$A_{3n+1} = 2^{(3n+1)} + 2^{2(3n+1)} + 2^{3(3n+1)}$
$\quad = 2^{3n+1} + 2^{3(2n)+2} + 2^{3(3n+1)}$
$\quad = (2^3)^n \times 2 + (2^3)^{2n} \times 2^2 + (2^3)^{3n+1}$
$A_{3n+1} \equiv (1)^n \times 2 + (1)^{2n} \times 4 + (1)^{3n+1}[7]$
$A_{3n+1} \equiv (2 + 4 + 1)[7]$
$\boldsymbol{A_{3n+1} \equiv 0[7]}\ CQFD$

**D'où si $p = 3n + 1$ alors $A_p$ est divisible par 7**

c) Étudions le cas où $p = 3n + 2$.

$A_{3n+2} = 2^{(3n+2)} + 2^{2(3n+2)} + 2^{3(3n+2)}$
$\quad = (2^3)^n \times 2^2 + (2^3)^{2n} \times 2^4 + (2^3)^{3n+2}$
$A_{3n+2} \equiv (1)^n \times 4 + (1)^{2n} \times 16 + (1)^{3n+2}[7]$
$A_{3n+2} \equiv (4 + 16 + 1) \equiv [7] \Leftrightarrow A_{3n+2} \equiv 0[7]$

**Alors, pour $p = 3n + 2$ , $A_p$ est également divisible par 7.**

## Problème : 10pts

Les parties $A\ et\ B$ sont indépendantes.

A) Soit $f$ la fonction définie $[0\ ;\ +\infty[\ par\ f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^{-x})$.

On désigne par $(C)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, unité graphique : 2cm.

1) Montrons que, pour tout réel $x$ positif : $f(x) = 2x + \ln(1 + 2e^{-3x})$.

$\forall\ x \in [0\ ;\ +\infty[$

$f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^{-x}) = \ln\left[e^{2x}\left(1 - \frac{2e^{-x}}{e^{2x}}\right)\right] = \ln[e^{2x}(1 - 2e^{-3x})] = \ln e^{2x} + \ln(1 - 2e^{-3x})$
$\qquad = \mathbf{2x + \ln(1 - 2e^{-3x})}$

**D'où, pour tout réel $x$ positif : $f(x) = 2x + \ln(1 + 2e^{-3x})$.**

2) a) Étudions la limite de $f\ en\ +\ \infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [2x + \ln(1 + 2e^{-3x})] = 2(+\infty) + \ln 1 = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

b) Montrons que la droite $(D)$ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $(C)$, quand $x$ tend vers $+\infty$.

$Pour\ cela, montrons\ que\ \lim_{x\to+\infty} [f(x) - y] = 0$

$f(x) - y = 2x + \ln(1 + 2e^{-3x}) - 2x = \ln(1 + 2e^{-3x})$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty} [\ln(1 + 2e^{-3x})] = \ln 1 = 0$

$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y] = 0}$. ***Alors*, la droite $(D)$ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $(C)$, quand $x$ tend vers $+\infty$**

c) Étudions la position de $(C)\ et\ (D)$.

Signe de $f(x) - y$ :

$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ posons\ f(x) - y > 0 \Leftrightarrow \ln(1 + 2e^{-3x}) > 0 \Leftrightarrow 1 + 2e^{-3x} > 1 \Leftrightarrow 2e^{-3x} > 0$ vraie

**$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ f(x) - y > 0$. Alors $(C)$ est au-dessus de $(D)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.**

3) Étudions les variations de $f$.

- sens de variation :

$\forall\, x \in [0\ ;\ +\infty[;\ f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - 2e^{-x}}{e^{2x} + 2e^{-x}} = \dfrac{2e^{2x} - \dfrac{2}{e^{x}}}{e^{2x} + 2e^{-x}} = \dfrac{2e^{3x} - 2}{e^{x}(e^{2x} + 2e^{-x})} = \dfrac{2(e^{3x} - 1)}{e^{3x} + 2} \geq 0$

**$\forall\, x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) \geq 0$. Alors $f$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.**

- Tableau de variation :

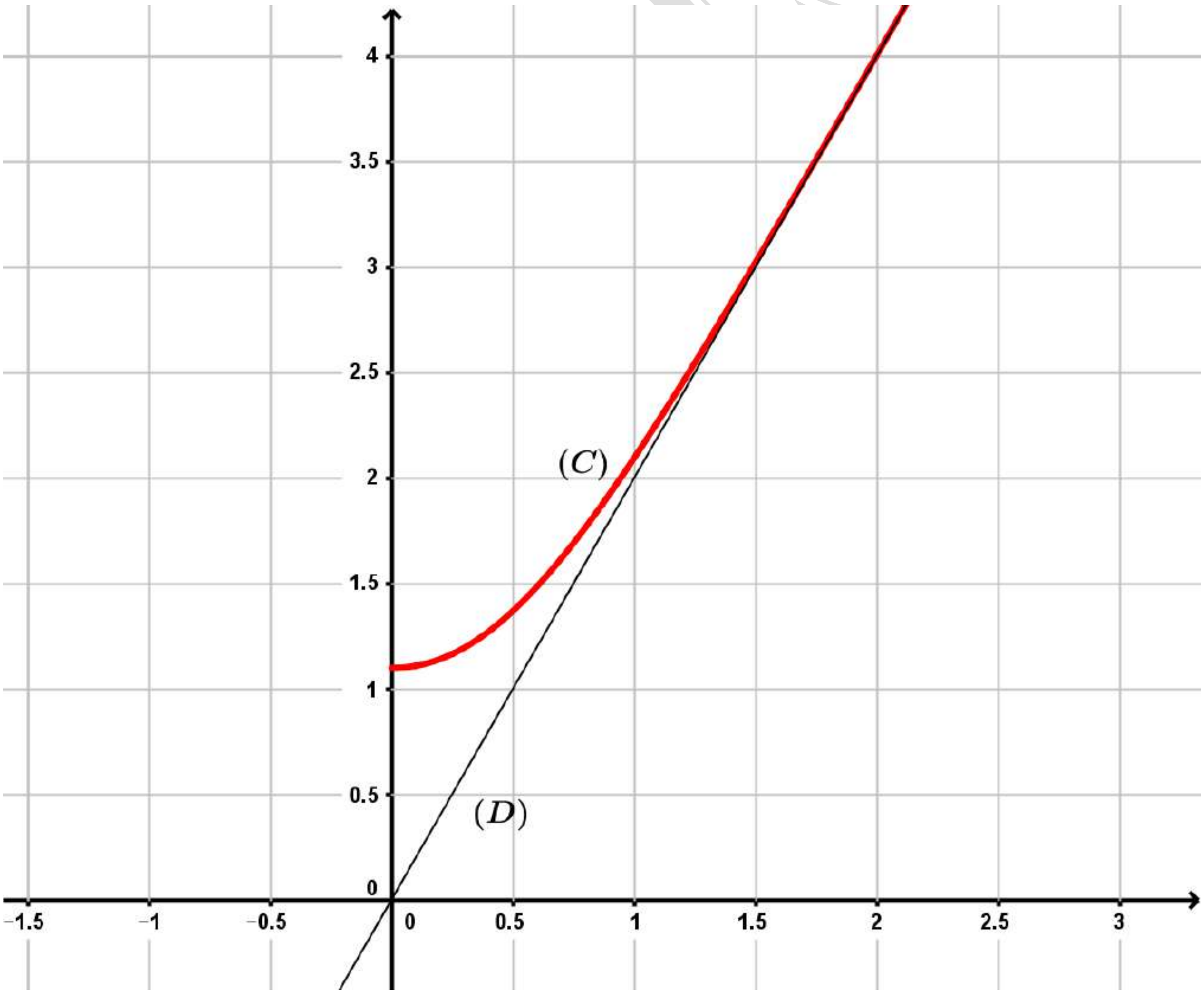
| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\ln 3$ $\nearrow$ $+\infty$ |

$f(0) = \ln 3$

4) Trace $(C)$ $et$ $(D)$.

Tableau des valeurs :

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,1 | 1,37 | 2,1 | 3,02 | 4 |



5) Montrons que, pour tout réel $\alpha,\ \alpha > 0$ : $\int_0^\alpha e^{-3x}\,dx \le \frac{1}{3}$.

$\int_0^\alpha e^{-3x} = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^\alpha = -\frac{1}{3}e^{-3\alpha} + -\frac{1}{3}e^{-3(0)} = -\frac{1}{3}e^{-3\alpha} + \frac{1}{3} \le \frac{1}{3}$ Pour tout réel $\alpha$ strictement positif

**D'où, pour tout réel $\alpha > 0$ : $\int_0^\alpha e^{-3x}\,dx \le \frac{1}{3}$**

6) Établissons que, pour tout réel $u, u \ge 0$ ; $\ln(1+u) \le u$.

Posons pour tout réel $u, u \ge 0$ ; $r(x)(u) = \ln(1+u) - u$ puis étudions son signe :

$$r(0) = 0 \quad et \quad \lim_{u\to+\infty} r(u) = \lim_{u\to+\infty}\left[u\left(\frac{\ln(u+1)}{u} - 1\right)\right] = +\infty(0-1) = -\infty$$

$$\forall\, u \in [0\ ;\ +\infty[, \qquad r'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = \frac{-u}{1+u} \le 0$$

Tableau de variation :

| $u$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $r'(u)$ | $-$ |
| $r(u)$ | $0 \searrow -\infty$ |

D'après le tableau de variation de la fonction $r$ :

Pour tout réel $u \ge 0$ ; on a : $r(u) \le 0$

$r(u) \le 0 \Leftrightarrow \ln(1+u) - u \le 0 \Leftrightarrow \ln(1+u) \le u$

**D'où, pour tout réel $u \ge 0$ ; $\ln(1+u) \le u$.**

7) Déduisons-en que, pour tout réel $\alpha, \alpha > 0$ : $\int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})\,dx \le \frac{2}{3}$.

Pour tout réel $u, u \ge 0$ ; $\ln(1+u) \le u \Leftrightarrow \ln(1+2e^{-3x}) \le 2e^{-3x}$ $\quad$ Avec $u = 2e^{-3x} \ge 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})\,dx \le \int_0^\alpha 2e^{-3x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})\,dx \le 2\int_0^\alpha e^{-3x}\,dx \le 2\times\frac{1}{3}\left(Car \int_0^\alpha e^{-3x}\,dx \le \frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})\,dx \le \frac{2}{3}$$

**Ainsi, pour tout réel $\alpha, \alpha > 0$ : $\int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})\,dx \le \frac{2}{3}$**

8) Soit $A(x)$ l'aire, exprimée en cm², du domaine limité par les droites d'équations $x = 0$ ; $x = \alpha,\ \ y = 2x\ et$ la courbe $(C)$. Déduisons-en des questions précédentes une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de $\alpha$.

$A(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - y]\,dx.ua = \int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})\,dx \times 4cm^2 \le \frac{2}{3}\times 4cm^2 \Leftrightarrow$ **$A(\alpha) \le \frac{8}{3}\ cm^2$**

B) 1) Étudions les variations de la fonction $h$ définie dans l'intervalle $[2\ ;\ 4]$ par :

$h : x \longmapsto h(x) = 2 - x + \ln x$

- sens de variation de $h$ sur $[2\ ;\ 4]$ :

$\forall\, x \in [2\ ;\ 4]$; $h'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x} < 0$

**$\forall\, x \in [2\ ;\ 4]$; $h'(x) < 0$. Alors $h$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[2\ ;\ 4]$.**

- Tableau de variation de $h$ sur $[2\ ;\ 4]$ :

| $x$ | $2$ $\qquad$ $\beta$ $\qquad$ $4$ |
|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ |
| $h(x)$ | $\ln 2 \searrow (0) \searrow (-2+\ln 4)$ |

$h(2) = \ln 2 > 0 \quad et \quad h(4) = -2 + \ln 4 < 0$

- Déduisons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β

D'après le tableau de variation :

La fonction $h$ est continue et strictement décroissante sur $[2\ ;\ 4]$, elle réalise une bijection de $[2\ ;\ 4]$ vers $[-2+\ln 4\ ;\ \ln 2]$.

Or $0 \in [-2+\ln 4\ ;\ \ln 2]$, **alors l'équation $\boldsymbol{h(x)=0}$ admet une solution unique $\boldsymbol{\beta} \in [\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{4}]$.**

2) Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

Montrons que l'image de l'intervalle $[2\ ;\ 4]$ par la fonction $g : x \longmapsto 2 + lnx$ est incluse dans l'intervalle $[2\ ;\ 4]$.

$\forall x \in [2\ ;\ 4]$, on a : $2 \le x \le 4 \Leftrightarrow \ln 2 \le \ln x \le \ln 4$

$$\Leftrightarrow 2+\ln 2 \le 2+\ln x \le 2+\ln 4$$
$$\Leftrightarrow 2{,}69 \le g(x) \le 3{,}38$$
$$\Leftrightarrow g(x) \in [2{,}69\ ;\ 3{,}38] \subset [2\ ;\ 4]$$
$$\Leftrightarrow g([2\ ;\ 4]) = [2{,}69\ ;\ 3{,}38] \subset [2\ ;\ 4]$$

D'où, **l'image de l'intervalle $[\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{4}]$ par la fonction $\boldsymbol{g : x \longmapsto 2 + lnx}$ est incluse dans l'intervalle $[\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{4}]$.**

3) Montrons que en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel $n$ : $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n - \beta|$.

$\forall\, x \in [2\ ;\ 4]$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

$x \in [2\ ;\ 4] \Leftrightarrow 2 \le x \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le g'(x) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow |g(x)| \le \frac{1}{2}$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur le couple $(u_n\ ;\ \beta) \in [2\ ;\ 4] \times [2\ ;\ 4]$ ; $n \in \mathbb{N}$, à la fonction $g$. On a : $\forall x \in [2\ ;\ 4]$ ; $|g(x)| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow |g(u_n) - g(\beta)| \le \frac{1}{2}|u_n - \beta|$

Or $g(u_n) = 2 + \ln u_n = u_{n+1}$ et d'après partie B) 1) l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in [2\ ;\ 4]$ telle que $h(\beta) = 0$

$h(\beta) = 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha + \ln \alpha \Leftrightarrow 2 + \ln \alpha = \alpha \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$

Alors :

$\forall x \in [2\ ;\ 4]$ ; $|g(x)| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow |g(u_n) - g(\beta)| \le \frac{1}{2}|u_n - \beta|$

$$\Leftrightarrow |u_{n+1} - \beta| \le \frac{1}{2}|u_n - \beta|$$

**D'où, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ : $\boldsymbol{|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|u_n - \beta|}$.**

4) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouvons que pour tout entier nature $n$ : $|u_n - \beta| \le 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Soit pour tout entier nature $n$ la proposition $P_n$ : $|u_n - \beta| \le 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- Initialisation :

Pour $n = 0$ on a :

$P_0$ : $|u_0 - \beta| \le 2\left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow |u_0 - \beta| \le 2$ ?

Or :

$\beta \in [2\ ;\ 4] \Leftrightarrow 2 \le \beta \le 4$

$$\Leftrightarrow -4 \le -\beta \le -2$$

$\Leftrightarrow u_0 - 4 \leq u_0 - \beta \leq u_0 - 2$

$\Leftrightarrow 2 - 4 \leq u_0 - \beta \leq 2 - 2 \qquad ; \qquad u_0 = 2$

$\Leftrightarrow -2 \leq u_0 - \beta \leq 0$

$\Leftrightarrow |u_0 - \beta| \leq 2 \ \ vraie$

D'où $P_0 :\ |u_0 - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^0$ est vraie.

- Transmission :

Pour tout entier nature $n$ , supposons que $P_n$ est vraie $\left(\text{c'est} - \text{à} - \text{dire } |u_n - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ et montrons que $P_{n+1}$ est vraie ( $c'est - \text{à} - \ dire\ \ |u_{n+1} - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'après 3) pour tout entier naturel $n$ : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$

$: |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$: |u_{n+1} - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'où $|u_{n+1} - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est vraie (2)

- Conclusion :

**D'après (1) et (2), pour tout entier nature $n$ : $|u_n - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$**

5) Déduisons-en que $(u_n)$ est convergente.

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ; \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0 \ \ alors \ \ \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - \beta) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$

$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta. \ Alors\ la\ suite\ (u_n)\ est\ convergente\ et\ converge\ vers\ \beta.}$

6) Déterminons un entier $N$ tel que $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$.

$|u_N - \beta| \leq 10^{-4} \Leftrightarrow |u_N - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^N \leq 10^{-4}$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^N \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^N \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Leftrightarrow N\ln(0{,}5) \leq -\ln 2 - 4\ln 10$

$\Leftrightarrow N \geq \frac{-\ln 2 - 4\ln 10}{\ln 0{,}5} \Leftrightarrow N \geq 14{,}28 \Leftrightarrow N = 15$

**Pour $N = 15$, on a : $|u_{15} - \beta| \leq 10^{-4}$**

## Exercice 1 : 6pts

Soit la fonction polynôme $p$ de l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, dans $\mathbb{C}$ définie pour tout nombre complexe $z$ par : $p(z) = z^3 - (7+9i)z^2 + (-14+39i)z + 50$.

1) Démontre que la fonction polynôme $p$ admet une racine imaginaire pure noté $z_0$. **1,5pt**

2) Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$. On note $z_1 \;\; et \;\; z_1$ les solutions non imaginaire pures avec $Re(z_1) < Re(z_2)$. **2,5pt**

3) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on désigne par $A,\ B\ \ et\ \ C$ les points d'affixe respectives $z_0,\ z_1\ \ et\ \ z_2$.

a) Détermine l'affixe $z_G$ du point $G$ barycentre du système $\{(A,\ 1)\ ;\ \ (B, -1)\ ;\ \ (C,\ 1)\}$ puis écris $z_G$ sous la forme exponentielle. **0,5pt**

b) Détermine puis construis l'ensemble $(E)$ des points $M$ du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$. **1pt**

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCG$ ? **0,5pt**

## Exercice 2 : 5pts

A) On désigne par $x$ un entier naturel supérieur ou égal à 5.

Soient les entiers naturels $N\ \ et\ \ N'$ que s'écrivent respectivement $\overline{100x}\ \ et\ \ \overline{x001}$ dans le système de base $x+1$.

1) Ecris $N\ \ et\ \ N'$ dans le système de base $x$. **1pt**

2) Ecrire $N + N'$ dans le système de base $x+1$. Déduis-en que $N + N'$ est un multiple de $x+1$. **1pt**

3) Donne, dans le système de base $x$, le quotient $q$ de la division euclidienne de $N + N'$ par $x+1$. **0,5pt**

4) Montre qu'il existe deux entiers naturels $a\ \ et\ \ b$ tels que $\overline{ab}^{x} \times \overline{aaa}^{x} = q$ **1pt**

B) Détermine tous les couples $(\alpha\ ;\ \beta)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$PGCD(\alpha\ ;\ \beta) + PPCM(\alpha\ ;\ \beta) = \beta + 9$ **1,5pt**

## Problème : 9pts

**Partie A**

Soit la fonction $g$ de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ définie par : $g\colon x \longmapsto g(x) = x - 1 - x\ln x$.

1) Détermine l'ensemble de définition $D_g$ de $g$ puis calcule les limites de $g$ aux bornes de $D_g$. **1pt**

2) $g'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $g$.

a) Détermine puis étudie le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de $x$. **0,5pt**

b) Etudie les variations de $g$ puis dresse son tableau de variations. **1pt**

c) Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$. **0,5pt**

**Partie B**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ d'unité graphique :2 $cm$. $(C)$ désigne la représentation graphique de la fonction $f$ de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ définie par :

$f : x \longmapsto f(x) = |x^2 - 1| + \ln|x - 1|, si\ x \leq 0 \quad et \quad f : x \longmapsto f(x) = \frac{\ln x}{x-1},\ si\ \ x > 0$.

1) $D_f$ désigne l'ensemble de définition de la fonction $f$.

a) Détermine $D_f$. **0,25pt**

b) Calcule les limites de $f$ aux bornes de $D_f$. **1pt**

2. Etude de $f$ en $-1$ :

a) Etudie la continuité et la dérivabilité de $f$ en $-1$. **0,75pt**

b) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus. **0,25pt**

3) Détermination de la fonction dérivée, notée $f'$, de la fonction **0,5pt**

a) Calcule $f'(x)$ pour $x \leq 0$. **0,5pt**

b) Montre que: $\forall\, x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*$ , $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$. Donne le sens de variation de $f$ puis dresse son tableau de variations. **1pt**

4) Construction de la représentation graphique de $f$ :

a) Précise les branches infinies de $(C)$. **0,25pt**

b) Trace $(C)$. **0,25pt**

**Partie C :**

1) Montre que la fonction $H : x \longmapsto -x + (x-1)\ln|x-1|$ est une primitive sur $]-\infty\ ;\ 1[$ de la fonction $h : x \longmapsto \ln|x-1|$. **0,75pt**

2) Calcule l'aire $A$ , en $cm$ , de la partie du plan définie par : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ **0,5pt**

## Proposition de correction : Session d'août 2021 ( TSE-STI )

## Exercice 1 : 6pts

Soit la fonction polynôme $p$ de l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, dans $\mathbb{C}$ définie pour tout nombre complexe $z$ par : $p(z) = z^3 - (7+9i)z^2 + (-14+39i)z + 50$.

1) Démontrons que la fonction polynôme $p$ admet une racine imaginaire pure noté $z_0$.

Soit $bi$ cette solution :

$$p(z_0) = 0 \Leftrightarrow {z_0}^3 - (7+9i){z_0}^2 + (-14+39i)z_0 + 50 = 0$$
$$\Leftrightarrow (bi)^3 - (7+9i)(bi)^2 + (-14+39i)bi + 50 = 0$$
$$\Leftrightarrow -b^3 i + 7b^2 + 9b^2 i - 14bi - 39b + 50 = 0$$
$$\Leftrightarrow (7b^2 - 39b + 50) + (-b^3 + 9b^2 - 14b)i = 0$$

$$\begin{cases} 7b^2 - 39b + 50 = 0 & (1) \\ -b^3 + 9b^2 - 14b = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) : $7b^2 - 39b + 50 = 0$

$\Delta = (-39)^2 - 4(7)(50) = 121 = 11^2$

$b_1 = \frac{39-11}{14} = \frac{28}{14} = 2 \quad et \quad b_1 = \frac{39+11}{14} = \frac{25}{7}$

$b = 2$ Vérifie l'équation (2). En effet : $-(2)^3 + 9(2)^2 - 14(2) = 0$

: $8 + 36 - 24 = 0$

: $0 = 0 \quad vraie$

**D'où, la fonction polynôme $p$ admet une racine imaginaire pure $z_0 = 2i$.** 1,5pt

2) Résolvons, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$. On note $z_1 \ et \ z_1$ les solutions non imaginaire pures avec $Re(z_1) < Re(z_2)$.

$p(2i) = 0$. Alors il existe trois complexes $a, \ b \ et \ c$ tels que $p(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$

En utilisant la méthode d'Hörner, on a :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-7-9i$ | $-14+39i$ | $50$ |
| $2i$ | | $2i$ | $-14i+14$ | $-50$ |
| | $1$ | $-7-7i$ | $25i$ | $0$ |

$Alors : \ p(x) = (z-2i)(z^2 - (7+7i)z + 25i)$

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2 - (7+7i)z + 25i) = 0$$
$$\Leftrightarrow z - 2i = 0 \ \ ou \ \ z^2 - (7+7i)z + 25i = 0$$

$*\ \ z - 2i = 0 \ \Leftrightarrow z = 2i$

$*\ \ z^2 - (7+7i)z + 25i = 0$

$\Delta = [-(7+7i)]^2 - 4(1)(25i)$

$= 49 + 98i - 48 - 100i$

$= -2i$

Déterminons $u = x + yi$ tel que : $u^2 = \Delta$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) \\ 2xy = Im(\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = -2 & (3) \end{cases}$$

(1)+(2) : $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \ ou \ x = -1$.

Pour $x = 1$, on a : dans (3) : $y = -1 \ \Leftrightarrow \ u_1 = 1 - i$

Pour $x = -1$, on a : dans (3) : $y = 1 \ \Leftrightarrow \ u_2 = -1 + i$

$$z_1 = \frac{7+7i-1+i}{2} = \frac{6+8i}{2} = 3 + 4i$$
$$z_2 = \frac{7+7i+1-i}{2} = \frac{8+6i}{2} = 4 + 3i$$

Alors, les complexe $u_1 = 1 - i \;\; et \;\; u_2 = -1 + i$ sont les racines carrées de $\Delta$.

**D'où $z_0 = 2i \;\; ; \;\; z_1 = 3 + 4i \;\; et \;\; z_2 = 4 + 3i$ sont les solutions de l'équation $p(z) = 0$.** 2,5pt

3) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O \; ; \; \vec{u} \; ; \; \vec{v})$, on désigne par $A, \; B \;\; et \;\; C$ les points d'affixe respectives $z_0, \; z_1 \;\; et \;\; z_2$.

a) Déterminons l'affixe $z_G$ du point $G$ barycentre du système $\{(A, \; 1) \; ; \; (B, -1) \; ; \; (C, \; 1)\}$

$G = Bary\{(A, \; 1) \; ; \; (B, -1) \; ; \; (C, \; 1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (Fixons A)

$\overrightarrow{GA} - \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &\Leftrightarrow z_G - z_0 = -(z_1 - z_0) + (z_2 - z_0) \\
&\Leftrightarrow z_G - z_0 = z_2 - z_1 \\
&\Leftrightarrow z_G = z_2 - z_1 + z_0 \\
&\Leftrightarrow z_G = (4 + 3i) - (3 + 4i) + 2i \\
&\Leftrightarrow z_G = 4 + 3i - 3 - 4i + 2i \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{z_G = 1 + i}
\end{aligned}$$

**D'où, l'affixe du point $G$ barycentre du système $\{(A, \; 1) \; ; \; (B, -1) \; ; \; (C, \; 1)\}$ est $z_G = 1 + i$.** 0,25pt

Ecris $z_G$ sous la forme exponentielle.

$$|z_G| = \sqrt{2} \quad ; \quad \arg(z_G) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \arg(z_G) = \theta = \frac{\pi}{4}$$

**Alors, la forme exponentielle est $z_G = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$.** 0,25pt

b) Déterminons puis construis l'ensemble $(E)$ des points $M$ du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.

$\sum \alpha_i \neq 0$. Alors il existe $G = bary\,\{(A, \; 1) \; ; \; (B, -1) \; ; \; (C, \; 1)\}\, tel \; que : \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4 &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2 - MG^2 - 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GB} + MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + GC^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\right) + GA^2 - GB^2 + GC^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow MG^2 = 4 - (GA^2 - GB^2 + GC^2)
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |2i - 1 - i|^2 = |-1 + i|^2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2}^{\,2} = 2$$

$$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |3 + 4i - 1 - i|^2 = |2 + 3i|^2 = \sqrt{(2)^2 + (3)^2}^{\,2} = 13$$

$$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |4 + 3i - 1 - i|^2 = |3 + 2i|^2 = \sqrt{(3)^2 + (2)^2}^{\,2} = 13$$

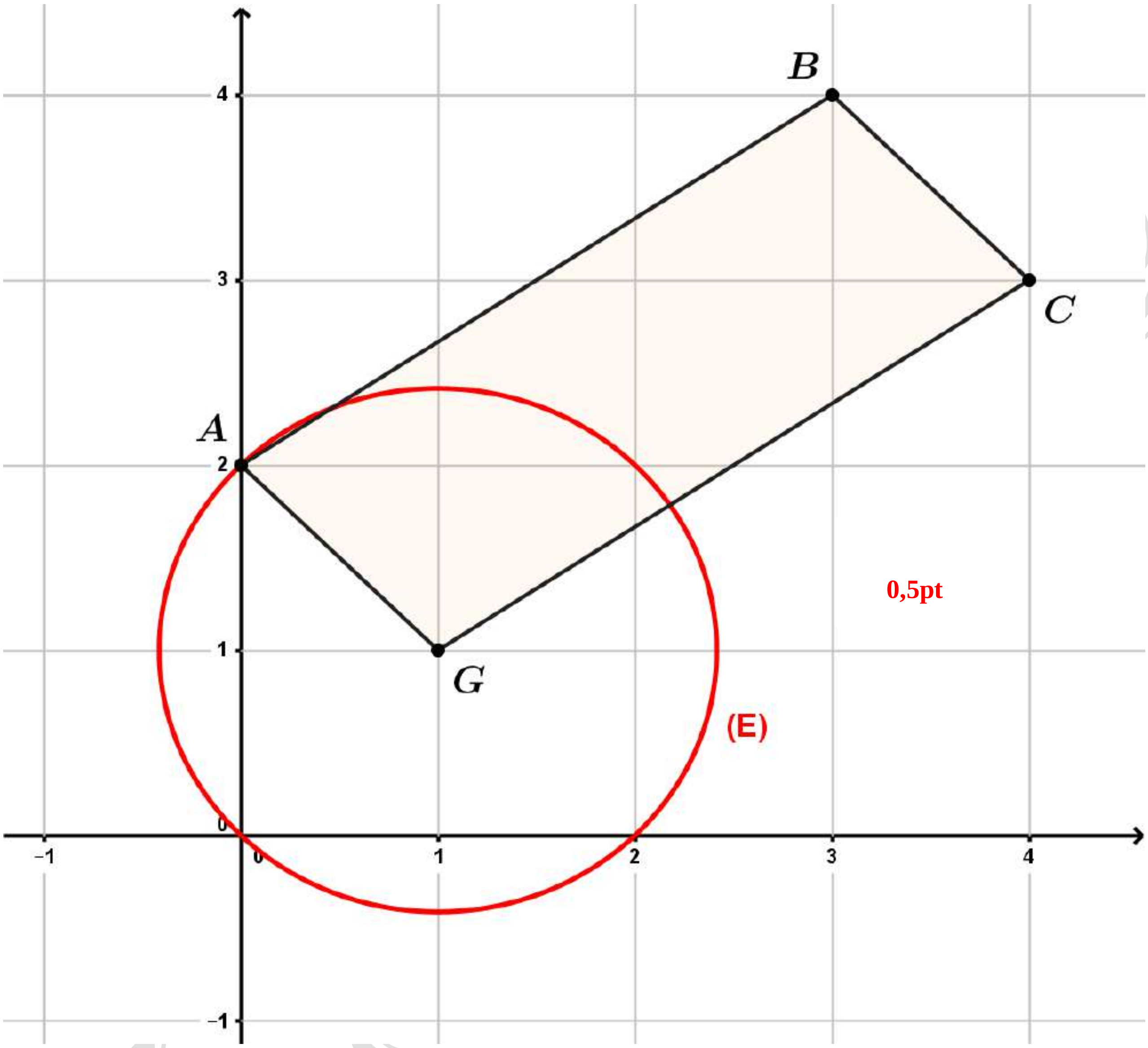
Donc :

$$\begin{aligned}
MG^2 &= 4 - (GA^2 - GB^2 + GC^2) \\
&= 4 - (2 - 13 + 13)
\end{aligned}$$

$MG^2 = 2 \Leftrightarrow MG = \sqrt{2}$

**L'ensemble $(E)$ des points $M$ du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$, est le cercle de centre $G(1\ ;\ 1)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$.** 0,5pt

Construction :




c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCG$ ?

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = z_B - z_A = 3 + 4i - 2i = 3 + 2i \\ \overrightarrow{GC} = z_C - z_G = 4 + 3i - 1 - i = 3 + 2i\end{array}\right| \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GC} \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{AB}}(G) = C.$$

**Alors le quadrilatère $ABCG$ est un parallélogramme** 0,5pt

## Exercice 2 : 5pts

A) On désigne par $x$ un entier naturel supérieur ou égal à 5.

Soient les entiers naturels $N\ et\ N'$ que s'écrivent respectivement $\overline{100x}\ et\ \overline{x001}$ dans le système de base $x + 1$.

1) Ecrivons $N\ et\ N'$ dans le système de base $x$.

$$\begin{aligned} N = \overline{100x}^{\,x+1} &= 1 \times (x+1)^3 + x(x+1)^0 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x \\ &= x^3 + 3x^2 + 4x + 1 \\ &= \overline{1341}^{\,x} \end{aligned}$$

D'où, $\boldsymbol{N = \overline{1341}^{\,x}}$ 0,5pt

$$\begin{aligned} N' = \overline{x001}^{\,x+1} &= x(x+1)^3 + 1(x+1)^0 \\ &= x(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 1 \\ &= x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1 \\ &= \overline{13311}^{\,x} \end{aligned}$$

D'où, $\boldsymbol{N' = \overline{13311}^{\,x}}$ 0,5pt

2) Ecrivons $N+N'$ dans le système de base $x+1$.

$N+N' = [1\times(x+1)^3 + x(x+1)^0] + [x(x+1)^3 + 1(x+1)^0]$

$\quad = (x+1)^3[1+x] + (x+1)^0[x+1]$

$\quad = (x+1)^4 + (x+1)$

$\boldsymbol{N+N' = \overline{10010}^{x+1}}$ **0,5pt**

Déduisons-en que $N+N'$ est un multiple de $x+1$.

$N+N' = (x+1)^4 + (x+1) = (x+1)[(x+1)^3+1] = (x+1)(x^3+3x^2+3x+2)$

$\boldsymbol{N+N' = K\times(x+1)}$ $\boldsymbol{avec\ k = x^3+3x^2+3x+2\ \ et\ k\in\mathbb{N}}$**. Alors** $\boldsymbol{N+N'}$ **est un multiple de** $\boldsymbol{x+1}$**.** **0,5pt**

3) Donnons, dans le système de base $x$, le quotient $q$ de la division euclidienne de $N+N'$ par $x+1$.

$N+N' = K(x+1) \Leftrightarrow \frac{N+N'}{x+1} = k = x^3+3x^2+3x+2 = \overline{1332}^x$

**D'où, le quotient de la division euclidienne de** $\boldsymbol{N+N'}$ **par** $\boldsymbol{x+1}$ **est :** $\boldsymbol{q = \overline{1332}^x}$ **0,5pt**

4) Montrons qu'il existe deux entiers naturels $a$ et $b$ tels que $\overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = q$

$\overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = q \Leftrightarrow (ax+b)(ax^2+ax+a) = q$

$\Leftrightarrow a^2x^3 + a^2x^2 + a^2x + abx^2 + abx + ab = q$

$\Leftrightarrow a^2x^3 + (a^2+ab)x^2 + (a^2+ab)x + ab = x^3+3x^2+3x+2$

Par identification :

$\begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2+ab = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a=1} \\ ab = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{b=2} \end{cases}$

**Alors existe deux entiers naturels** $\boldsymbol{a=1\ \ et\ \ b=2}$ **tels que** $\boldsymbol{\overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = q\ \ ou\ \overline{12}^x \times \overline{111}^x = \overline{1332}^x}$ **1pt**

B) Déterminons tous les couples $(\alpha\ ;\ \beta)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$\boldsymbol{PGCD(\alpha\ ;\ \beta) + PPCM(\alpha\ ;\ \beta) = \beta + 9}$ (1)

Posons : $PGCD(\alpha\ ;\ \beta) = d\quad et\quad PPCM(\alpha\ ;\ \beta) = m$

On a : $\boldsymbol{m\times d = \alpha\times\beta}$ (2)

$PGCD(\alpha\ ;\ \beta) = d$. Alors, il existe deux entiers $\alpha'\ et\ \beta'$ premiers entre eux ($\alpha' \wedge \beta' = 1$) tels que :

$\alpha = \alpha' d\ \ et\ \ \beta = \beta' d$

Dans (2) : $m = \frac{\alpha\times\beta}{d} = \frac{\alpha' d\times\beta' d}{d} = \alpha'\times\beta'\times d$

Dans (1) : $d + m = \beta + 9 \Leftrightarrow d + \alpha'\times\beta'\times d = \beta' d + 9$

$\Leftrightarrow d + \alpha'\times\beta'\times d - \beta' d = 9$

$\Leftrightarrow d(1+\alpha'\times\beta' - \beta') = 9$

$\Leftrightarrow d[1+(\alpha'-1)\beta'] = 9$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ 1+(\alpha'-1)\beta' = 9 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} d = 9 \\ 1+(\alpha'-1)\beta' = 1 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} d = 3 \\ 1+(\alpha'-1)\beta' = 3 \end{cases}$

∗ Pour $S_1$ : $\begin{cases} d = 1 \\ 1+(\alpha'-1)\beta' = 9 \end{cases}$

$1+(\alpha'-1)\beta' = 9 \Leftrightarrow (\alpha'-1)\beta' = 8$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha'-1 = 8 \\ \beta' = 1 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} \alpha'-1 = 1 \\ \beta' = 2 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} \alpha'-1 = 2 \\ \beta' = 4 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} \alpha'-1 = 4 \\ \beta' = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = 9 \\ \beta' = 1 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} \boldsymbol{\alpha' = 2} \\ \boldsymbol{\beta' = 2} \end{cases}$ à $\boldsymbol{rejetter}$ $ou\ \begin{cases} \alpha' = 3 \\ \beta' = 4 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} \alpha' = 5 \\ \beta' = 2 \end{cases}$

$\boldsymbol{S_1 : (\alpha'\ ;\ \beta') = \{(9\ ;\ 1)\ \ ;\ \ (3\ ;\ 4)\ \ ;\ \ (5\ ;\ 2)\} \Leftrightarrow (\alpha\ ;\ \beta) = \{(9\ ;\ 1)\ \ ;\ \ (3\ ;\ 4)\ \ ;\ \ (5\ ;\ 2)\}}$

∗ Pour $S_2$ : $\begin{cases} d = 9 \\ 1+(\alpha'-1)\beta' = 1 \end{cases}$

$1+(\alpha'-1)\beta' = 1 \Leftrightarrow (\alpha'-1)\beta' = 0 \Leftrightarrow \alpha'-1 = 0\ \ Car\ \beta\neq 0\ (\beta'\neq 0)$

$\Leftrightarrow \alpha' = 1$

$\boldsymbol{S_2 : (\alpha'\ ;\ \beta') = \{(1\ ;\ \beta)\} \Leftrightarrow (\alpha\ ;\ \beta) = \{(9\ ;\ 9\beta)\}}$

$*$ Pour $S_3$ : $\begin{cases} d = 3 \\ 1 + (\alpha' - 1)\beta' = 3 \end{cases}$

$1 + (\alpha' - 1)\beta' = 3 \Leftrightarrow (\alpha' - 1)\beta' = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' - 1 = 1 \\ \beta' = 2 \end{cases} ou \begin{cases} \alpha' - 1 = 2 \\ \beta' = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = 2 \\ \beta' = 2 \end{cases} ou \begin{cases} \alpha' = 3 \\ \beta' = 1 \end{cases}$$

$\boldsymbol{S_3 : (\alpha' ; \beta') = \{(3 ; 1)\} \Leftrightarrow (\alpha ; \beta) = \{(9 ; 3)\}}$

$\boldsymbol{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{(9 ; 1) ; (3 ; 4) ; (5 ; 2) ; (9 ; 9\beta) ; (9 ; 3)\} \beta \in \mathbb{N}}$ **1,5pt**

## Problème : 9pts

**Partie A :**

Soit la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par : $g: x \mapsto g(x) = x - 1 - x\ln x$.

1) Déterminons l'ensemble de définition $D_g$ de $g$ puis calculons les limites de $g$ aux bornes de $D_g$.

- Domaine :

$\boldsymbol{D_g = ]0 ; +\infty[}$ **1,5pt**

- Limites

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0 - 1 - 0 = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -1}$ **0,25pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty - 1 - \infty \ FI$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x(1 - \frac{1}{x} - \ln x\right] = +\infty(1 - 0 - \infty) = -\infty \Leftrightarrow \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$ **0,25pt**

2) $g'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $g$.

a) Déterminons puis étudions le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de $x$.

- Dérivée

$\forall x \in ]0 ; +\infty[ ; \ g'(x) = 1 - \left(\ln x + \frac{1}{x}.x\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

$\boldsymbol{\forall x \in ]0 ; +\infty[ ; \ g'(x) = -\ln x}$ **0,25pt**

- Signe de $g'(x)$ :

$\ln x \leq 0 \ sur \ ]0 ; 1] \Leftrightarrow -\ln x \geq 0 \ sur \ ]0 ; 1]$

$\ln x \geq 0 \ sur \ [1 ; +\infty[ \Leftrightarrow -\ln x \leq 0 \ sur [1 ; +\infty[$

$\boldsymbol{\forall x \in ]0 ; 1] ; \ g'(x) \geq 0}$

$\boldsymbol{\forall x \in [1 ; +\infty[ ; \ g'(x) \leq 0}$ **0,25pt**

$\boldsymbol{\forall x \in \{1\} ; \ g'(x) = 0}$

b) Etudions les variations de $g$ puis dresse son tableau de variations.

- Sens de variation :

$\forall x \in ]0 ; 1] ; \ g'(x) \geq 0$. **Alors $g$ est croissante sur l'intervalle $]0 ; 1]$.**

$\forall x \in [1 ; +\infty[ ; \ g'(x) \leq 0$. **Alors $g$ est décroissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.** **0,5pt**

$\forall x \in \{1\} ; \ g'(x) = 0$. **Alors $g$ est constante sur l'ensemble $\{1\}$.**

Tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | \|\| $-1$ | $\nearrow$ | $(0)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$g(1) = 0$ **0,5pt**

c) Déduisons-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

D'après le tableau de variation ci-dessus :

$\boldsymbol{\forall \ x \in ]0 ; +\infty[ ; \ g(x) \leq 0}$. **0,5pt**

**Partie B :**

# Proposition de correction : Session d'août 2021 ( TSE-STI )

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ d'unité graphique :2 $cm$. $(C)$ désigne la représentation graphique de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par :

$f : x \longmapsto f(x) = |x^2 - 1| + \ln|x - 1|, si\ x \leq 0 \quad et \quad f : x \longmapsto f(x) = \frac{\ln x}{x-1},\ si\ \ x > 0.$

1) $D_f$ désigne l'ensemble de définition de la fonction $f$.

a) Détermine $D_f$.

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| + \ln|x - 1|, si\ x \in ]-\infty\ ;\ 0] \\ \frac{\ln x}{x-1},\ si\ \ x \in ]0\ ;\ +\infty[ \end{cases}$$

$\boldsymbol{D_f = ]-\infty\ ;\ 0] \cup ]0\ ;\ +\infty[ - \{1\} = ]-\infty\ ;\ 1[ \cup ]1\ ;\ +\infty[}$ **0,25pt**

b) Calculons les limites de $f$ aux bornes de $D_f$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [|x^2 - 1| + \ln|x - 1|] = +\infty + \infty = +\infty \iff \boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ **0,25pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1}\right) = 0 \times 1 = 0 \iff \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$ **0,25pt**

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = \frac{\ln 0^+}{-1} = +\infty \iff \boldsymbol{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty}$ **0,25pt**

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = 1 \quad et \quad \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = 1$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1.}$ **0,25pt**

2. Etude de $f$ en $-1$ :

a) Etudions la continuité et la dérivabilité de $f$ en $-1$.

- Continuité de $f$ en $-1$ :

Sur $]-\infty\ ;\ 0]$, écrivons $f$ sans le symbole de la valeur absolue :

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1\ \ ou\ \ x = -1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\lvert x^2 - 1\rvert$ | | $x^2 - 1$ | | $-x^2 + 1$ | | $-x^2 + 1$ | | $x^2 - 1$ | |

***Sur*** $\boldsymbol{]-\infty\ ;\ -1[\ ;\ f(x) = x^2 - 1 + \ln|x - 1|}$

**Sur** $\boldsymbol{]-1\ ;\ 0]\ ;\ f(x) = x^2 - 1 + \ln|x - 1|}$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} (x^2 - 1 + \ln|x - 1|) = 1 - 1 + \ln|-2| = \ln 2$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} (-x^2 + 1 + \ln|x - 1|) = -1 + 1 + \ln|-2| = \ln 2$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)}$. ***Alors f est continue en*** $\boldsymbol{-1}$. **0,25pt**

- Dérivabilité de $f$ en $-1$ :

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to-1^+} \left(\frac{x^2 - 1 + \ln|x - 1| - \ln 2}{x + 1}\right) = \lim_{x\to-1^+} \left((x - 1) + \frac{\ln|x - 1| - \ln 2}{x + 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to-1^+} (x - 1) + \lim_{x\to-1^+} \left(\frac{\ln|x-1| - \ln 2}{x+1}\right)$$

$$= (-1 - 1) + p'(-1) \quad où\ \ p(x) = \ln|x - 1|\ \ et\ \ p'(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -\frac{5}{2}}$. ***Alors f dérivable à droite de*** $\boldsymbol{-1}$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to-1^-} \left(\frac{-x^2 + 1 + \ln|x - 1| - \ln 2}{x + 1}\right) = \lim_{x\to-1^-} \left(-(x - 1) + \frac{\ln|x - 1| - \ln 2}{x + 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to-1^-} (-x + 1) + \lim_{x\to-1^-} \left(\frac{\ln|x-1| - \ln 2}{x+1}\right)$$

$= (-(-1)+1) + p'(-1) \quad$ où $\quad p(x) = \ln|x-1| \quad et \quad p'(x) = \frac{1}{x-1}$

$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{3}{2}$. ***Alors f dérivable à gauche de −1***

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} \neq \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$. ***Alors f n'est pas dérivable en −1.*** **0,5pt**

b) Donnons une interprétation graphique des résultats obtenus.

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} \neq \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$. ***Alors (C) admet deux demi tangentes obliques en −1.***

***d'équation*** $(T_d)$ : $y = \frac{3}{2}(x+1) + \ln 2$ ***et*** $(T_g)$ : $y = -\frac{5}{2}(x+1) + \ln 2$ **0,25pt**

**Autrement dit, le point d'abscisse $x_0 = -1$ est un point anguleux.**

3) Détermination de la fonction dérivée, notée $f'$, de la fonction

a) Calculons $f'(x)$ pour $x \leq 0$.

$\forall\ x \in ]-\infty\ ;\ -1[\ ;\ f'(x) = 2x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x^2-2x+1}{x-1}$

$\forall\ x \in ]-1\ ;\ 0[\ ;\ f'(x) = -2x + \frac{1}{x-1} = \frac{-2x^2+2x+1}{x-1}$

**Pour $x \leq 0$,** $\begin{cases} f'(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x-1} & si\ x \in ]-\infty\ ;\ -1[ \\ f(x) = \frac{-2x^2+2x+1}{x-1} & si\ x \in ]-1\ ;\ 0[ \end{cases}$ **0,5pt**

b) Montrons que: $\forall\ x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$.

$\forall\ x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*\ ;\ f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2} = \frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2} = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$

**D'où, pour tout $x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$** **0,5pt**

- Donnons le sens de variation de $f$ puis dressons son tableau de variations.

*Posons :* $\begin{cases} \forall\ x \in ]-\infty\ ;\ -1[\ ;\ f_1'(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x-1} \\ \forall\ x \in ]-1\ ;\ 0[\ ; f_2'(x) = \frac{-2x^2+2x+1}{x-1} \\ \forall\ x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^* = ]0\ ;\ 1[ \cup ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ f_3'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2} \end{cases}$

$*\ \ \forall\ x \in ]-\infty\ ;\ -1[\ ;\ f_1'(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x-1}$

Posons: $2x^2 - 2x + 1 = 0$ ; $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin ]-1\ ;\ 0[$

$\Delta' = 1 - 2(1) = -1 < 0$

| $x$ | $-\infty$   $-1$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $2x^2-2x+1$ | + | + | + | + |
| $x-1$ | − | − | − | + |
| $f_2'(x)$ | − | − | − | + |

$*\ \ \forall\ x \in ]-1\ ;\ 0[\ ; f_2'(x) = \frac{-2x^2+2x+1}{x-1}$

Posons : $-2x^2 + 2x + 1 = 0\ \ et\ \ x - 1 = 0$

$-2x^2 + 2x + 1 = 0$ $\qquad\qquad\qquad$ $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\Delta' = 1 + 2 = 3$

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{-2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ou $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{-2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2+2x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f_1'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | |

$*\quad \forall\, x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*\ ;\ f_3'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$

$\forall\, x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^* = ]0\ ;\ 1[\,\cup\,]1\ ;\ +\infty[\ ; x(x-1)^2 > 0.$ *Le signe de* $f'$ *dépend de celui de* $g(x)$.

D'après partie A) c) ; $\forall\ x \in ]0\ ;\ +\infty[\ ;\quad g(x) \leq 0.$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_3'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |

- Tableau de signe de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $-$ | |

- Sens de variation :

$f'(x) \leq 0\ sur\ ]-\infty\ ;\ -1[\,\cup \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}\ ;\ 0\right] \cup\, ]0\ ;\ 1[\,\cup\,]1\ ;\ +\infty[$, alors :

$\boldsymbol{f\ est\ décroissante\ sur\ ]-\infty\ ;\ -1[\,\cup \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}\ ;\ 0\right] \cup\, ]0\ ;\ 1[\,\cup\,]1\ ;\ +\infty[}.$

$f'(x) \geq 0\ sur\ \left]-1\ ;\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right]$, alors : **0,25pt**

$\boldsymbol{f\ est\ croissante\ sur\ \left]-1\ ;\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right]}$

- Tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $-\frac{5}{2}$ \| $\frac{3}{2}$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | ↘ | $\ln 2$ | ↗ | $(1{,}18)$ | ↘ | $1$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ ‖ $1$ | ↘ | $0$ |

**0,25pt**

$f(-1) = \ln 2\quad et\quad f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 1{,}18$

4) Construction de la représentation graphique de $f$ :

a) Précisons les branches infinies de $(C)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$ *Il y a possibilité d'asymptoteoblique*

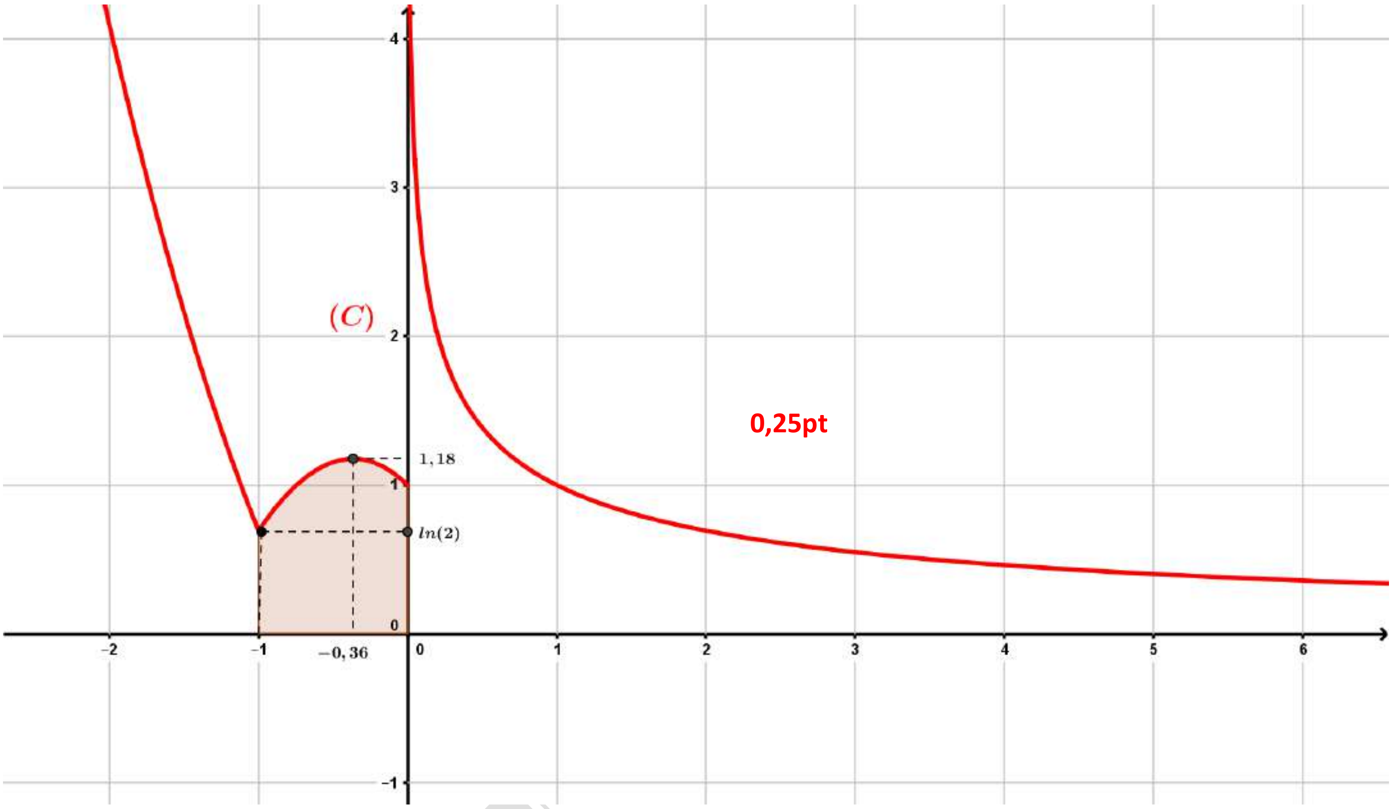
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-1+\ln|x-1|}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x - \frac{1}{x} + \frac{\ln|x-1|}{x}\right) = -\infty$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.}$ ***Alors la courbe $(C)$ admet une branche parabolique de direction*** **0,25pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. ***alors la courbe*** $(C)$ ***admet une asymptote horizontale d'équation*** $y = 0$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$. ***alors la courbe*** $(C)$ ***admet une asymptote verticale d'équation*** $x = 0$

b) Trace $(C)$.




**Partie C :**

1) Montrons que la fonction $H : x \longmapsto -x + (x-1)\ln|x-1|$ est une primitive sur $]-\infty\ ;\ 1[$ de la fonction $h : x \longmapsto \ln|x-1|$.

$H'(x) = -1 + \left[\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} \times (x-1)\right] = -1 + \ln|x-1| + 1 = \ln|x-1|$

$\boldsymbol{H'(x) = \ln|x-1| = h(x)}$**. Alors $\boldsymbol{H}$ est une primitive de $\boldsymbol{h}$.** 0,75pt

2) Calcule l'aire $A$ , en $cm$ , de la partie du plan définie par : $\begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

$A = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx.ua$

$\forall\, x \in [-1\ ;\ 0]\ ;\ f(x) = -x^2 + 1 + \ln|x-1|$

$\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} (-x^2 + 1 + \ln|x-1|)\, dx = \int_{-1}^{0} (-x^2+1) dx + \int_{-1}^{0} \ln|x-1|\, dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{0} + [-x + (x-1)\ln|x-1|]_{-1}^{0}$

$= -\left(\frac{1}{3} - 1\right) - (1 - 2\ln 2)$

$= -\frac{1}{3} + 2\ln 2$

$\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = \frac{6\ln 2 - 1}{3}$

$\boldsymbol{A = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx.ua = \frac{6\ln 2-1}{3} \times 4\ cm^2 = \frac{24\ln 2-4}{3}}$ Valeur exacte 0,5pt

$\boldsymbol{A = 4{,}21\ cm^2}$ Valeur approchée de A à $10^{-2}$ près.

## Exercice 1 : 5pts

1) Démontre que pour tout entier naturel $n$, $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1$est divisible par 13. **1pt**

2) Détermine le chiffre des unités du nombre $17^{97}$ écrit dans le système décimal. **1pt**

3) Détermine les entiers naturels $a\ et\ b$ ($a<b$) tels que : $\begin{cases} a\times b=1734 \\ a\wedge b=17 \end{cases}$ **1pt**

4) a) Résous, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $17x-13y=4$. **1pt**

b) La division euclidienne d'un entier naturel $N$ par 13 donne pour reste 5. Le même entier divisé par 17 donne pour reste 1. Quel sera son reste dans la division euclidienne par 221 ? **1pt**

## Exercice 2 : 5pts

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. On appelle $A, B\ et\ C$ les points d'affixes respectives : $z_A=-1+3i$ ; $z_B=-2$ $et$ $z_C=-\frac{3-3i}{2}$.

Soit $f$ l'application du plan privé de $A$ dans le plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ distinct de $z_A$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par : $z'=\frac{z+2}{z+1-3i}$.

1) Résous, dans $\mathbb{C}$ , l'équation : $z^2-3iz-2=0$. **1pt**

2) Détermine les affixes des points invariants par $f$. **1pt**

3) Détermine l'ensemble des points $M$ tels que $M'$ appartienne au cercle de centre $O$ et de rayon 1. **1pt**

4) En posant $z=x+iy$, détermine $Im\ (z')$ en fonction de $x\ et\ y$. Déduis-en l'ensemble des points $M$ tels que $M'$ appartienne à l'axe des abscisses. **1pt**

5) a) Montre que pour tout $z\neq -1+3i$, on ait l'équivalence : $\frac{z+2}{z+1-3i}=-\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z+z_C)\left(\overline{z+z_C}\right)=\frac{5}{2}$. **0,5pt**

b) Déduis-en l'ensemble des points $M$ tels que $M'$ ait une affixe imaginaire pure. **0,5pt**

## Problème : 10pts

I. Soit la fonction $f$ définie sur $[0;\pi]$ par $f : x \mapsto f(x)=\frac{2+cosx}{2-cosx}$. On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

1) Étudie les variations de $f$. **2pt**

2) Démontre que $f$ est une bijection de $[0;\pi]$ sur un sous-ensemble $E\ de\ \mathbb{R}$ que l'on précisera. **1pt**

3) Construis (C). **1pt**

II) Soit $A, B, C$ trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que $AB=AC=5\ unités,\ BC=6\ unités$.

1) Construis le triangle $ABC$ puis calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. **2pt**

2) Construis le barycentre $G$ des points pondérés $(A;\ 2), (B;\ 3)\ et\ (C;\ 3)$ puis calcule $GA$. **2pt**

3) Soit $h$ l'application de $\mathcal{P}\to\mathbb{R}$

$$M \longmapsto h(M)=2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}.$$

a) Exprime $h(M)$ en fonction de $h(G)\ et\ MG$. **0,5pt**

b) Calcule $h(A)\ et\ h(G)$. **0,5pt**

c) Détermine puis construis l'ensemble $(E)$ des points $M$ tels que $h(M=h(A)$. **0,5pt**

d) $E\ et\ F$ sont deux points distincts du plan. Détermine puis construis l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ tel que : $\frac{ME}{MF}=\frac{3}{2}$. **0,5pt**

## Exercice 1 : 5pts

1) Démontrons que pour tout entier naturel $n$, $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1$est divisible par 13.

**Par récurrence :**

$3^{6n+2}+3^{3n+1}+1$est divisible par 13 $\Leftrightarrow 3^{6n+2}+3^{3n+1}+1\equiv 0[13] \Leftrightarrow 3^{6n+2}+3^{3n+1}+1=13k$ ; $k\in\mathbb{N}$

Soit la proposition $P_n$ : $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1$est divisible par 13

**- Initialisation :**

Pour $n=0$, on a :

$P_0$ : $3^{6(0)+2}+3^{3(0)+1}+1=3^2+3+1=13\equiv 0[13]$

**D'où, pour $n=0$, $P_0$ : $3^{6(0)+2}+3^{3(0)+1}+1$ est divisible par 13 (1)**

**- Transmission :**

pour tout entier naturel $n$, supposons $P_n$ vraie (c'est-à-dire $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1=13k$ ; $k\in\mathbb{N}$) et montrons que $P_{n+1}$ est vraie (c'est-à-dire $3^{6(n+1)+2}+3^{3(n+1)+1}+1=13k'$ ; $k'\in\mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
P_{n+1}:\ 3^{6(n+1)+2}+3^{3(n+1)+1}+1 &= 3^{6n+8}+3^{3n+4}+1\\
&= 3^{6n+2}.3^6+3^{3n+1}.3^3+1\\
&= 729\times 3^{6n+2}+27\times 3^{3n+1}+1\\
&= (56\times 13+1)3^{6n+2}+(2\times 13+1)3^{3n+1}+1\\
&= 56\times 13\times 3^{6n+2}+3^{6n+2}+2\times 13\times 3^{3n+1}+3^{3n+1}+1\\
&= 13(56\times 3^{6n+2}+2\times 3^{3n+1})+(3^{6n+2}+3^{3n+1}+1)\\
&= 13(56\times 3^{6n+2}+2\times 3^{3n+1})+13k \quad ; \quad k\in\mathbb{N}\\
&= 13(56\times 3^{6n+2}+2\times 3^{3n+1}+k)\\
&= 13k' \quad avec \quad k'=56\times 3^{6n+2}+2\times 3^{3n+1}+k \ \ tel\ que\ k'\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

$P_{n+1}$ : $3^{6(n+1)+2}+3^{3(n+1)+1}+1=13k'$ ; $k'\in\mathbb{N}$ vraie

**D'où, $P_{n+1}$ est divisible par 13. (2)**

**- Conclusion :**

**D'après (1) et (2), pour tout entier naturel $n$, $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1$est divisible par 13.** **1pt**

2) Déterminons le chiffre des unités du nombre $17^{97}$ écrit dans le système décimal

Effectuons la division euclidienne de 17 par 10

$17^0\equiv 1[10]$ ; $17^1\equiv 7[10]$ ; $17^3\equiv 3[10]$ ; $17^4\equiv 1[10]$ alors 4 est la période.

Or, $97=24\times 4+1$ donc :

$$17^{97}=17^{24\times 4+1}=(17^4)^{24}\times 17^1\equiv 1^{24}\times 7[10] \quad\Leftrightarrow\quad 17^{97}\equiv 7[10]$$

$17^{97}\equiv 7[10]$

**7 est le reste de la division euclidienne de** $17^{97}$ par 10.

**Alors, 7 est le chiffre des unités du nombre $17^{97}$ écrit dans le système décimal** **1pt**

3) Déterminons les entiers naturels $a\ et\ b$ $(a<b)$ tels que : $\begin{cases} a\times b=1734\\ a\wedge b=17\end{cases}$

$a \wedge b = 17$, alors il existe deux entiers naturels $a'$ $et$ $b'$ premiers entre eux $(a' \wedge b' = 1)$ tels que :
$a = 17a'$ $et$ $b = 17b'$

(1) : $a \times b = 1734 \Leftrightarrow 17a' \times 17b' = 1734 \Leftrightarrow 289a' \times b' = 1734 \Leftrightarrow a' \times b' = \frac{1734}{289} \Leftrightarrow a' \times b' = 6$
Puisque $a < b$, alors :

$$a' \times b' = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 6 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} a' = 2 \\ b' = 3 \end{cases}$$

$(a' ; b') = \{(1 ; 6) \quad ; \quad (2 ; 3)\}$

$\boldsymbol{(a ; b) = (17a' ; 17b') = \{(17 ; 102) \quad ; \quad (34 ; 51)\}}$ **1pt**

4) a) Résolvons, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $17x - 13y = 4$.

Par congruence :
$17x - 13y = 4 \Leftrightarrow 17x = 4 + 13y \Leftrightarrow 17x \equiv 4[13] \Leftrightarrow 4x \equiv 4[13] \Leftrightarrow x \equiv 1[13] \Leftrightarrow x = 1 + 13k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 17x - 13y = 4 &\Leftrightarrow 17(1 + 13k) - 13y = 4 \\ &\Leftrightarrow 13y = 13 + 13 \times 17k \\ &\Leftrightarrow y = 1 + 17k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{S = \{(1 + 13k \quad ; \quad 1 + 17k)\} \ avec \ k \in \mathbb{Z}}$ **1pt**

b) La division euclidienne d'un entier naturel $N$ par 13 donne pour reste 5. Le même entier divisé par 17 donne pour reste 1. Quel sera son reste dans la division euclidienne par 221 ?

$$\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = 5 + 13\alpha \\ N = 1 + 17\beta \end{cases} \ avec \ \alpha \in \mathbb{Z} \ et \ \beta \in \mathbb{Z}$$

$(1) = (2) \Leftrightarrow 5 + 13\alpha = 1 + 17\beta \Leftrightarrow 17\beta - 13\alpha = 4$
D'après a) $\beta = x = 1 + 13k$ $\quad et \quad$ $\alpha = y = 1 + 17k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} N = 5 + 13\alpha = 5 + 13(1 + 17k) = 18 + 221k \\ N = 1 + 17\beta = 1 + 17(1 + 13k) = 18 + 221k \end{cases} \Leftrightarrow N = 18 + 221k \Leftrightarrow N \equiv 18[221]$$

**$N \equiv 18[221]$. Alors 18 est reste dans la division euclidienne de $N$ par 221** **1pt**

## Exercice 2 :______________________________5pts

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On appelle $A, B$ $et$ $C$ les points d'affixes respectives : $z_A = -1 + 3i \quad ; \quad z_B = -2 \quad et \quad z_C = \frac{3-3i}{2}$.

Soit $f$ l'application du plan privé de $A$ dans le plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ distinct de $z_A$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par : $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$.

1) Résolvons, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 3iz - 2 = 0$.

$\Delta = (-3i)^2 - 4(1)(-2) = -9 + 4 = -1 = i^2$ $\boldsymbol{S = \{i \quad ; \quad 2i\}}$ **1pt**

$z_1 = \frac{3i-i}{2} = i$ $\ et \ $ $z_1 = \frac{3i+i}{2} = 2i$

2) Déterminons les affixes des points invariants par $f$.

$f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{z+2}{z+1-3i} \Leftrightarrow z(z + 1 - 3i) = z + 2 \Leftrightarrow z^2 + z - 3iz = z + 2 \Leftrightarrow z^2 - 3iz - 2 = 0$

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow z^2 - 3iz - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = i \quad ou \quad z = 2i \end{aligned}$$

**Les affixes des points invariants par $f$ sont $i$ $et$ $2i$.** **1pt**

3) Déterminons l'ensemble des points $M$ tels que $M'$ appartienne au cercle de centre $O$ et de rayon 1.

($M'$ appartient au cercle de centre $O$ et de rayon 1) $\Leftrightarrow$ $(x'^2 + y'^2 = 1 \quad ou \quad |OM'| = 1)$

$|OM'| = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+2}{z+1-3i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z+2|}{|z+1-3i|} \Leftrightarrow \frac{|z-(-2)|}{|z-(1+3i)|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-z_B|}{|z-z_A|} = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM = AM$

($M'$ appartient au cercle de centre $O$ et de rayon 1) $\Leftrightarrow$ $(BM = AM)$

**Alors, l'ensemble des points $M$ cherchés est la médiatrice du segment $[AB]$ où $A(-1\ ;\ 3)$ $et$ $B(-2\ ;\ 0)$.** **1pt**

4) En posant $z = x + iy$, déterminons $Im\,(z')$ en fonction de $x\ et\ y$.

$$z' = \frac{z+2}{z+1-3i} = \frac{x+yi+2}{x+yi+1-3i} = \frac{(x+2)+yi}{(x+1)+(y-3)i} = \frac{[(x+2)+yi][(x+1)-(y-3)i]}{(x+1)^2+(y-3)^2} = \frac{(x+2)(x+1)-(x+2)(y-3)i+y(x+1)i+y(y-3)}{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

$$= \frac{(x^2+x+2x+2+y^2-3y)+(-xy+3x-2y+6+yx+y)i}{(x+1)^2+(y-3)^2} = \frac{(x^2+y^2+3x-3y+2)+(3x-y+6)i}{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

Alors $\boldsymbol{Im\,(z') = \frac{3x-y+6}{(x+1)^2+(y-3)^2}}$ **0,5pt**

- Déduisons-en l'ensemble des points $M$ tels que $M'$ appartienne à l'axe des abscisses.

$z' \in (Ox)$ si et seulement si : $Im(z) = 0$.

$Im(z) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + 6 = 0$

**Alors, l'ensemble des points $M$ tels que $M'$ appartienne à l'axe des abscisses est la droite d'équation $3x - y + 6 = 0$ privée de $A(-1\ ;\ 3)$.** **0,5pt**

5) a) Montrons que pour tout $z \neq -1 + 3i$, on ait l'équivalence : $\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z + z_C)(\overline{z + z_C}) = \frac{5}{2}$.

$\forall\, z \neq -1 + 3i\ ;\ \frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow z' = -\overline{z'} \Leftrightarrow z'\,imagimaire\ pure \Leftrightarrow Re(z') = 0$

$;\ \boldsymbol{\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0}$ **(1)**

D'autre part :

$$(z - z_C)(\overline{z - z_C}) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(x + yi + \frac{3-3i}{2}\right)\left(\overline{x + yi + \frac{3-3i}{2}}\right) = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x + \frac{3}{2}\right) + \left(y - \frac{3}{2}\right)i\right]\left[\overline{\left(x + \frac{3}{2}\right) + \left(y - \frac{3}{2}\right)i}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x + \frac{3}{2}\right) + \left(y - \frac{3}{2}\right)i\right]\left[\left(x + \frac{3}{2}\right) - \left(y - \frac{3}{2}\right)i\right] = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 3y + \frac{9}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 3y + \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$$

$\boldsymbol{(z - z_C)(\overline{z - z_C}) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0}$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0} \\ \boldsymbol{(z - z_C)(\overline{z - z_C}) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0} \end{array}\right\} \text{Alors : } \boldsymbol{\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z - z_C)(\overline{z - z_C}) = \frac{5}{2}}$$ **0,5pt**

b) Déduisons-en l'ensemble des points $M$ tels que $M'$ ait une affixe imaginaire pure.

$z'$ est imaginaire pure si $z' = -\overline{z'}$ $ou$ $Re(z') = 0$

$z' = -\overline{z'} \Leftrightarrow \frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z - z_C)(\overline{z - z_C}) = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow |z - z_C|^2 = \frac{5}{2}$ $\quad Car\ z \times \overline{z} = x^2 + y^2\ ou\ z \times \overline{z} = |z|^2$

$\Leftrightarrow |z - z_C| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

**L'ensemble des points $M$ tels que $M'$ait une affixe imaginaire pure est le cercle de centre C d'affixe $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$** 0,5pt

## Problème:__________________________________________10pts

I. Soit la fonction $f$ définie sur $[0; \pi]$ par $f\ :\ x\ \mapsto\ f(x) = \frac{2+\cos x}{2-\cos x}$. On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

1) Étudions les variations de $f$.

- Domaine de définition :

$\boldsymbol{D_f = \{x/x \in \mathbb{R},\ 2 - \cos x \neq 0\}}$

$2 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 2\ \ impossible\ car\ \ 2 \notin [-1\ ;\ 1]$

$\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} = ]-\infty\ ;\ +\infty[$

- Parité et périodicité :

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ , -x \in \mathbb{R}\ ;\ f(-x) = \frac{2+\cos(-x)}{2-\cos(-x)} = \frac{2+\cos x}{2-\cos x} = f(x)$

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ \ , -\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ ;\ \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$, **Alors $f$ est paire. Donc sa courbe est symétrique par rapport l'axe des ordonnées**.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ , x + 2\pi \in \mathbb{R}\ ;\ f(x + 2\pi) = \frac{2+\cos(x+2\pi)}{2-\cos(x+2\pi)} = \frac{2+\cos x}{2-\cos x} = f(x)$

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ \ , \boldsymbol{x + 2\pi} \in \mathbb{R}\ ;\ \boldsymbol{f(x + 2\pi)}$. **Alors $f$ est périodique de période $2\pi$. Donc on peut étudier la fonction sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$ où sur l'intervalle $[0; \pi]$ car f paire**

- Dérivée :

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ ;\ \ f'(x) = \frac{-\sin x(2-\cos x) - \sin x(2+\cos x)}{(2-\cos x)^2} = \frac{-2\sin x + \sin x.\cos x - 2\sin x - \sin x.\cos x}{(2+\cos x)^2} = \frac{-4\sin x}{(2+\cos x)^2} = \frac{-4\sin x}{(2+\cos x)^2}$

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ \ ;\ \ \boldsymbol{f'(x) = \frac{-4\sin x}{(2+\cos x)^2}}$

- sens de variation :

$\forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0}\ ;\ \boldsymbol{\pi}]\ \ ;\ \ \boldsymbol{f'(x) = \frac{-4\sin x}{(2+\cos x)^2} \leq 0\ \ car\ \sin x \geq 0\ pour\ tout\ x \in [0\ ;\ \pi]}$. 0,5pt

$\forall\ \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0}\ ;\ \boldsymbol{\pi}]\ ; \boldsymbol{f'(x) \leq 0}$. **Alors $f$ est décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$.** 0,5pt

- Tableau de variation :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\pi$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $3 \searrow \frac{1}{3}$ |

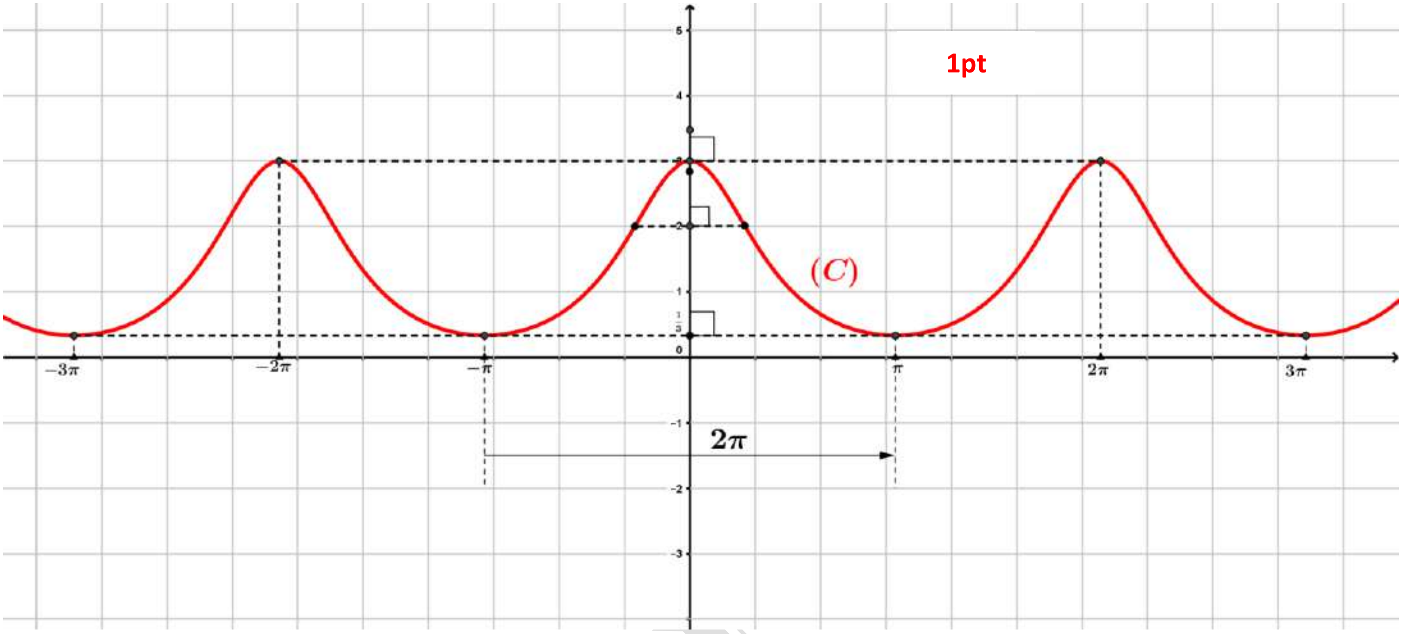
$f(0) = \frac{2+\cos 0}{2-\cos 0} = \frac{2+1}{2-1} = 3$

$f(\pi) = \frac{2+\cos\pi}{2-\cos\pi} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$

2) Démontrons que $f$ est une bijection de $[0;\ \pi]$ sur un sous-ensemble $E\ de\ \mathbb{R}$ que l'on précisera.

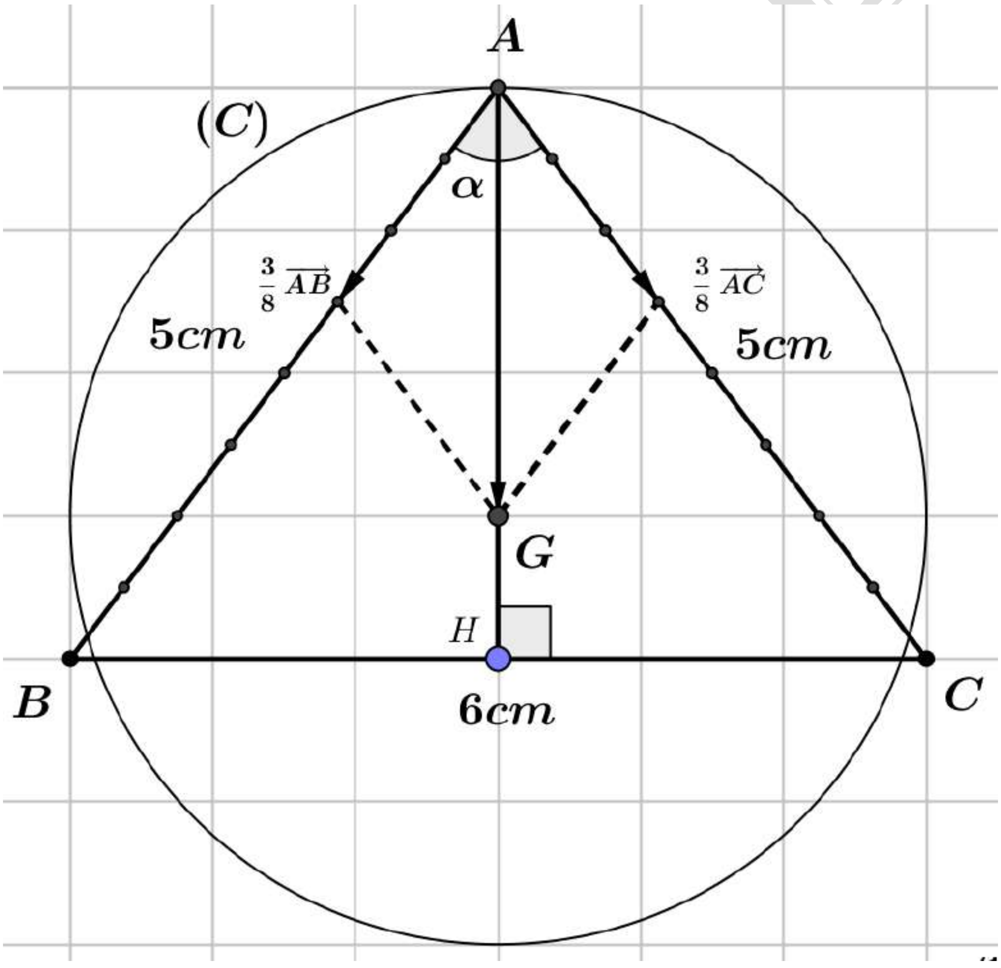
**$f$ est continue et décroissante sur l'intervalle $[0;\ \pi]$, alors $f$ réalise une bijection de $[0;\ \pi]$ vers l'intervalle $j = \left[\frac{1}{3}\ ;\ 3\right]$** 1pt

3) Construisons (C).




II) Soit $A, B, C$ trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que $AB = AC = 5\ unités,\ \ BC = 6\ unités$.

1) Construis le triangle $ABC$ puis calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.




2,25pt

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}}\right) = AB \times AC \times \cos(2\alpha)$

En considérant le triangle $ABH$ rectangle en $H$ :

$\sin\alpha = \frac{BH}{BA} = \frac{3}{5}$

$sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Leftrightarrow 1-\cos 2\alpha = 2sin^2\alpha \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 1-2sin^2\alpha = 1-2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1-\frac{18}{25} = \frac{7}{25}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\cos 2\alpha = \frac{7}{25}}$$

Ainsi :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(2\alpha)$

$\quad = 5 \times 5 \times \frac{7}{25} = 7$

D'où $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7}$ **1pt**

2) Construisons le barycentre $G$ des points pondérés $(A;\ 2), (B;\ 3)\ et\ (C;\ 3)$ puis calcule $GA$.

$G = Bary\{(A;\ 2), (B;\ 3)\ et\ (C;\ 3)\} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ Fixons A.

$2\overrightarrow{GA} + 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$8\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$-8\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}}$ **(Voir construction)**

- Calculons $GA$ :

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$AG^2 = \left[\frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right]^2 = \frac{9}{64}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{9}{64}(AB^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2) = \frac{9}{64}(5^2 + 2\times 7 + 5^2) = \frac{9\times 64}{64} = 9$

$AG^2 = 9 \Leftrightarrow \boldsymbol{AG = 3}$ **1pt**

3) Soit $h$ l'application de $\mathcal{P} \to \mathbb{R}$

$$M \longmapsto h(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}.$$

a) Exprimons $h(M)$ en fonction de $h(G)\ et\ MG$.

$\sum\alpha_i \neq 0$. Alors il existe $G$ barycentre des points $A,\ B\ et\ C$

$h(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ (Fixons)

$\quad = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$

$\quad = 2(MG^2 + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}) + (MG^2 + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}) + (MG^2 + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB})$

$\quad = 4MG^2 + (3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}) + (2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB})$

$\quad = 4MG^2 + \overrightarrow{MG}\left(\underbrace{2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\right) + \left(\underbrace{2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}}_{h(G)}\right)$

$\boldsymbol{h(M) = 4MG^2 + h(G)}$ **0,5pt**

b) Calculons $h(A)\ et\ h(G)$.

$h(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Pour $M = A$ on a :

$h(A) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}.\overrightarrow{AB}$

$\quad = 2\times 7 + 0 + 0$ Car $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

$\boldsymbol{h(A) = 14}$ **0,25pt**

$h(M) = 4MG^2 + h(G) \Leftrightarrow h(A) = 4AG^2 + h(G)$ En posant $M = A$

$\Leftrightarrow h(G) = h(A) - 4AG^2$

$\Leftrightarrow h(G) = 14 - 4(3)^2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{h(G) = -22}$ **0,25pt**

Ou encore :

$h(G) = 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$ Fixons A

$= 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC})\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB})$

$= 2(GA^2 + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) + (GA^2 + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AC}) + (GA^2 + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AB})$

$= 4GA^2 + 3\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= 4GA^2 + 3\overrightarrow{GA}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= 4GA^2 - 3\left[\frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right](\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{GA} = -\frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$= 4GA^2 - \frac{9}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= 4GA^2 - \frac{9}{8}(AB^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2) + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= 4(3)^2 - \frac{9}{8}(5^2 + 2 \times 7 + 5^2) + 2 \times 7$

$= 36 - \frac{9}{8}(64) + 14$

$\boldsymbol{h(G) = -22}$

c) Déterminons puis construis l'ensemble $(E)$ des points $M$ tels que $h(M) = h(A)$.

$h(M) = h(A) \Leftrightarrow 4MG^2 + h(G) = 14$

$\Leftrightarrow 4MG^2 - 22 = 14$

$\Leftrightarrow 4MG^2 = 36 \Leftrightarrow MG^2 = 9 \Leftrightarrow MG = 3$

**L'ensemble $(E)$ des points $M$ tels que $h(M) = h(A)$ est le cercle de centre $G$ et de rayon $r = 3$.** **0,25pt**

d) $E$ et $F$ sont deux points distincts du plan. Déterminons puis construisons l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ tel que : $\frac{ME}{MF} = \frac{3}{2}$.

$\frac{ME}{MF} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2ME = 3MF \Leftrightarrow (2ME)^2 = (3MF)^2 \Leftrightarrow (2ME)^2 - \left(\frac{3}{2}MF\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{ME} + 3\overrightarrow{MF})(2\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MF}) = 0$

Soit : et

$I = bary\{(E,\ 2)\ ;\ \ (F,\ 3)\} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IE} + 3\overrightarrow{IF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{EF}$

$j = bary\{(E,\ 2)\ ;\ \ (F, -3)\} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JE} - 3\overrightarrow{JF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EJ} = 3\overrightarrow{EF}$

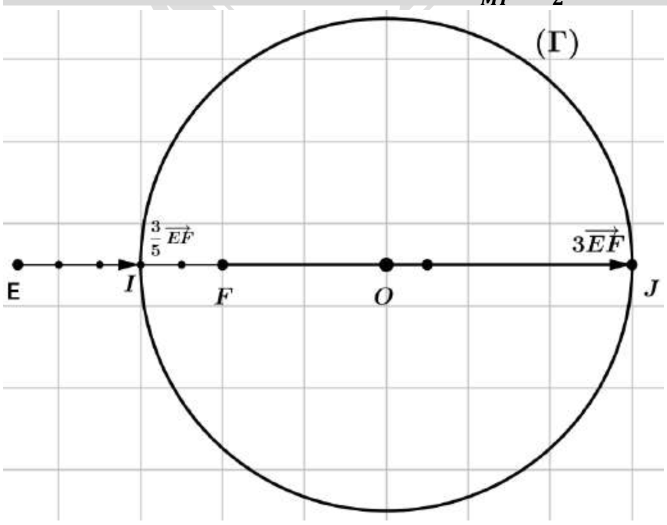
$(2\overrightarrow{ME} + 3\overrightarrow{MF})(2\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MF}) = 0 \Leftrightarrow [2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IE}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IF})][2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JE}) - 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JF})] = 0$

$\Leftrightarrow \left(5\overrightarrow{MI} + \underbrace{2\overrightarrow{IE} + 3\overrightarrow{IF}}_{\vec{0}}\right)\left(-\overrightarrow{MJ} + \underbrace{2\overrightarrow{JE} - 3\overrightarrow{JF}}_{\vec{0}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MI}(-\overrightarrow{MJ}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$

**L'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ tel que : $\frac{ME}{MF} = \frac{3}{2}$ est le cercle de diamètre $[IJ]$** **025pt**




**0,25pt**