BAC C R.C.I. session 89 (rempl)

EXERCICE I

(4 points)

Dans le plan $\mathbb{P}$, on donne un cercle $(\mathbb{C})$ de centre O et de rayon r ($r \in \mathbb{R}^{*+}$) et un point A extérieur au cercle $(\mathbb{C})$.
On note d la distance OA et on désigne par B et C les points d'intersection de la droite (OA) et du cercle $(\mathbb{C})$ tels que le point B soit élément du segment [OA].

1°) Soit M un point du cercle $(\mathbb{C})$ distinct des points B et C.

a) Vérifier que la parallèle à (CM) passant par O est sécante à la droite (AM). On note M' ce point d'intersection.

b) Déterminer et construire le lieu géométrique du point M' lorsque M décrit le cercle $(\mathbb{C})$ privé des points B et C.

c) Vérifier que la parallèle à (BM) passant par O est sécante à la droite (AM). On note M'' ce point d'intersection.

d) Déterminer et construire le lieu géométrique du point M'' lorsque M décrit le cercle $(\mathbb{C})$ privé des points B et C.

2°) Montrer que les droites (M'B) et (M''C) sont parallèles.
(On pourra utiliser la composée de deux homothéties).

EXERCICE II

(4 points)

Le plan complexe $(\mathbb{P})$ étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$), on note A, B et C les points de couples de coordonnées respectifs :

$(1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

On considère l'application T de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z tel que $Z = z^2 + 1$

1°) a) Déterminer les images par T des points O, B et C.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par T.

2°) a) Montrer que $AM' = OM^2$

b) On suppose que le point M est distinct de O et on appelle α une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{AM'}})$. Montrer que $\alpha \equiv 2 \arg z \quad [2\pi]$.

3°) Lorsque le point M n'appartient pas à la droite (OA), justifier que le programme de construction suivant permet d'obtenir le point M' :

- construire la demi-droite [At) de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que

$$\text{mes}(\widehat{\vec{e_1}, \vec{u}}) \equiv 2\,\text{mes}(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}) \quad [2\pi].$$

- placer le point P de coordonnées (2, 0).
- placer les points Q et R tels que AQ = OM et Q ∈ [AP), AR = OM et R ∈ [At).
- construire la parallèle (Δ) à (PR) passant par Q.

M' est le point d'intersection de la demi-droite [At) et de la droite (Δ).

PROBLEME

(12 points)

Partie A:

On considère la fonction numérique φ définie par :

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1°) a) Démontrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = 1 - [\varphi(x)]^2.$$

b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 < \varphi(x) < 1$.

2°) Démontrer que $\forall x \in [0, +\infty[, \ 0 \leq \varphi(x) \leq x$

puis que : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq x - \varphi(x) \leq \frac{x^3}{3}$

3°) Soit Ψ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, \ \Psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} \\ \Psi(0) = 1 \end{cases}$$

Démontrer que Ψ est continue sur $\mathbb{R}$..

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par:

$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \Psi(t)\,dt \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(On ne cherchera pas à exprimer f(x)).

1°) Vérifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

2°) a) Démontrer que $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$1 - f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x [1 - \Psi(t)]\,dt$$

b) Démontrer que $\forall x \in]0, 1[$,

$$0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{1}{9}x^2$$

c) Utiliser la question précédente pour démontrer que f est continue à droite en O.

d) Démontrer que f est dérivable à droite en 0 et préciser son nombre dérivé à droite en ce point.

3°) a) Démontrer que $\forall x \in [1, +\infty[$

$$0 \leq \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \leq \ln x$$

b) En utilisant la majoration précédente et la relation de Chasles, démontrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

4°) a) Vérifier que $\forall x \in]0, +\infty[$

$$x^2 f'(x) = \varphi(x) - \int_0^x \Psi(t)\,dt$$

b) Montrer que: $\forall x \in]0, +\infty[$

$$x^2 f'(x) = \int_0^x [\Psi(x) - \Psi(t)]\,dt$$

c) En admettant que la fonction Ψ est décroissante sur $]0, +\infty[$, montrer que:

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) \leq 0$$

En déduire les variations de f sur $[0, +\infty[$

5°) Donner l'allure de la courbe (C_f) représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan *(unité graphique 3 cm).*