MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA JEUNESSE, DES SPORTS
CHARGE DE LA CONDITION FEMININE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE
LYCEE D'ETAT DE PORT-GENTIL
B.P. 236 55.21.73

Série : D
Coeff. : 4
Durée : 4 h.

BAC BLANC 2 (2000)
Epreuve de Mathématiques

EXERCICE I (4,5 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ ayant comme unité graphique 3 cm.
Les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 que l'on va calculer dans cet exercice seront tous exprimés sous forme algébrique et sous forme exponentielle ($\rho e^{i\theta}$).

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \sqrt{3}\, z + 1 = 0$.
On pose $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$. Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle et placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le plan P.

2°) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Calculer l'affixe z_3 du point $M_3 = r(M_2)$.
Placer M_3 sur la figure précédente.

3°) Soit t la translation dont le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $\left(-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$. Calculer l'affixe du point $M_4 = t(M_2)$.
Placer le point M_4 sur la figure.

4°) Soient $z_5 = \dfrac{i}{2}(1 + i\sqrt{3})$ et $z_6 = \dfrac{2}{i - \sqrt{3}}$.
Exprimer z_5 et z_6 sous forme algébrique et sous forme exponentielle. Placer les points M_5 et M_6 d'affixes respectives z_5 et z_6 sur la figure.

5°) a) Calculer $(z_k)^6$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
b) Ecrire $z^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels. Justifier cette écriture.

EXERCICE II (3,5 points)

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents.
N.B. Dans toutes les questions, les résultats seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.

1°) On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité de chaque tirage.
a) Calculer la probabilité de l'événement A « tirer 2 chaussures de la même couleur ».
b) Calculer la probabilité de l'événement B « tirer un pied gauche et un pied droit ».
c) Montrer que la probabilité de l'événement C « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est $\dfrac{1}{19}$.

2°) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire, successivement et sans remise, une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.
a) Justifier que X prend les valeurs 2, 3 et 4.
b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $D = \mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$
On note (Γ) sa représentation graphique dans un repère orthonormal (O, I, J) ; (unité graphique 2 cm).

1°) a) Etudier les limites de f aux bornes de D. Préciser les asymptotes de la courbe (Γ).
b) Etudier les variations de f ; dresser son tableau de variation. Déterminer une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 0.
c) Construire avec soin (T) et la courbe (Γ).

2°) On se propose de montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur [0 ; 1] une solution unique.
a) Etudier les variations de la fonction f' sur [0 ; 1]. Démontrer que pour tout x de l'intervalle [0 ; 1], on a :
$\dfrac{1}{4} \leq f'(x) \leq \dfrac{2}{3}$
b) Etudier les variations de la fonction numérique g définie sur [0 ; 1] par $g(x) = f(x) - x$.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans [0 ; 1] une solution unique α. Vérifier que $\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{e}{3}$.

3°) On se propose de déterminer une valeur approchée de α.
Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
a) Démontrer par récurrence que :
pour tout n de IN, $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq \dfrac{e}{3}$.
b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :
pour tout n de IN, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$
En déduire que pour tout n de IN
$|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$
c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?
d) Déterminer un entier n_0 tel que :
si $n \geq n_0$, alors $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4°) Ne connaissant pas de primitive de la fonction f sur $[0 ; \frac{1}{2}]$ on se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$.
a) Justifiez l'existence de I et en donner une interprétation graphique.
b) On pose $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 - x)\, e^x\, dx$ et $K = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\, dx$.
Vérifier que $4I = J + K$.
c) Calculer J.
d) Quelle est l'image par f du segment $[0 ; \frac{1}{2}]$?
En déduire un encadrement de K par deux intégrales simples que l'on calculera.
e) A l'aide des questions précédentes, écrire un encadrement de l'intégrale I. En déduire un encadrement de I, d'amplitude 10^{-2} par des nombres décimaux

LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO PORT-GENTIL

BAC BLANC 2003

Série D **Durée : 4 H**
Coéf : 4 **Pages : 2**

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (5points)

1°) Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 4iz^2 - 16z + 64i$.

a) Calculer $P(4)$ et en déduire une factorisation de $P(z)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2°) Le plan complexe muni un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A d'affixe -4 ; B d'affixe 4 ; E d'affixe $4i$; C et D tels que les quadrilatères AOEC et BOED soient des carrés .

a) Placer les points précédents dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

b)Donner les affixes des points C et D .

3°) Soit f l'application du plan qui , à tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i)z + 4 + 4i$.

a) Déterminer la nature et les élément caractéristiques de f .

b) Préciser les points f(A) et f(O) .

c) Déterminer l'image par f de la droite (CA) et celle de la médiatrice du segment [AO] .

d) Exprimer , pour tout M d'affixe z , l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de z .
En déduire que MM' = MC et , pour M distinct de C , montrer qu'une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC})$ est $\frac{\pi}{2}$.

4°) Soit J le milieu du segment [EB] et I le milieu du segment [AO] .
Déterminer l'image de J par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (on justifiera la réponse)

EXERCICE 2 (4 points)

On dispose de deux trousses T_1 et T_2 contenant des stylos indiscernables au toucher .

T_1 contient 7 stylos bleus et 3 stylos rouges .

T_2 contient 2 stylos bleus et 1 stylo rouge .

On tire au hasard un stylo de T_1 et on le met dans T_2 , puis on tire au hasard un stylo de T_2 et on le met dans T_1 . L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve .

1°) On considère les événements :

A : « après l'épreuve , les trousses se retrouvent chacune avec leur configuration de départ » ;

B : « après l'épreuve , la trousse T_2 contient un seul stylo bleu » .

a) Vérifier que $P(A) = \frac{27}{40}$.

b) Calculer $P(B)$.

2°) Un joueur mise 200 F et effectue une épreuve . A l'issue de cette épreuve , on compte les stylos bleus contenus dans T_2 .

- si T_2 contient un seul stylo bleu , le joueur reçoit 600 F ;
- si T_2 contient deux stylos bleus , le joueur ne reçoit rien ;
- si T_2 contient trois stylos bleus , le joueur reçoit 200 F .

Soit X la variable aléatoire égale au gain **algébrique** du joueur .

a) Déterminer les valeurs prises par X .

b) Déterminer la loi de probabilité de X .

c) Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter le résultat obtenu .

3°) Jean joue cinq fois de suite ce jeu . Calculer , à 10^{-5} près par excès , la probabilité pour qu'il obtienne au plus quatre fois un gain strictement positif à l'issue des cinq épreuves .

PROBLEME **(11 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm .

Partie A

1°) Etude de la fonction f .

f est la fonction définie sur IR par : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{x}$

et on appelle (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Déterminer la fonction dérivée de f .

c) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation .

d) Déterminer le signe de f(x) en fonction de x .

e) Tracer la courbe (C) .

f) Calculer , en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\ln 2$.

2°) Etude de la bijection réciproque de f .

a) Montrer que f est une bijection de $[-\ln 4 ; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer .

b) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f . Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} .

c) Calculer le nombre dérivé de f^{-1} en 0 .

d) Soit la fonction h : $]-\infty ; \frac{1}{4}] \rightarrow [-\ln 4 ; +\infty[$

$$x \mapsto 2\ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x}\right)$$

Déterminer foh . Que représente alors h pour f .

Partie B

Dans cette partie on se propose d'étudier la fonction g définie sur IR* par : $g(x) = \ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^{x}\right|$.

On note (Γ) la courbe représentative de la fonction g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°) Etudier les limites de g en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0 .

2°) a) Démontrer que g est dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

b) Calculer g'(x) pour tout x de IR* .

c) Suivant les valeurs de x dans IR* , déterminer le signe de g'(x) en utilisant le signe de f '(x) et le signe de f(x) .

d) Dresser le tableau de variation de g .

3°) a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $g(x) - x = \ln\left(1 - e^{\frac{-x}{2}}\right)$.

b) En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (Γ) .

c) Etudier sur $]0 ; +\infty[$, la position de la courbe (Γ) par rapport à (D) .

4°) a) Démontrer que pour tout réel x strictement négatif : $g(x) - \frac{x}{2} = \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$

b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (Γ) .

c) Etudier sur $]-\infty ; 0[$, la position de la courbe (Γ) par rapport à (Δ) .

5°) Tracer avec soin (Γ) , (D) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

BAC BLANC "D" N°2 (Mai 2004)

Exercice 1

I/ $P(z) = z^3 + (-2+3i)z^2 - (1+4i)z + 2 + i$

1° Déterminons u et $v \in \mathbb{C}$ /

$P(z) = (z-1)(z^2 + uz + v)$

Par Hörner on a :

	1	$-2+3i$	$-1-4i$	$2+i$
1		1	$-1+3i$	$-2-i$
	1	$-1+3i$	$-2-i$	0

donc $u = -1+3i$ et $v = -2-i$

0,5 $\boxed{P(z) = (z-1)(z^2+(-1+3i)z - 2 - i)}$

2°) Résolution de $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \iff$

$z = 1$ ou $z^2 + (-1+3i)z - 2 - i = 0$

$\Delta = (-1+3i)^2 - 4(-2-i)$

$= -2i$ 0,25

On cherche $\delta = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ /

$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 2 & (1) \\ x^2-y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = -2 & (3) \end{cases}$

$(1)+(2) \Rightarrow x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$

$(1)-(2) \iff y = 1$ ou $y = -1$

$(3) \Rightarrow x$ et y sont de signes contraires, alors

0,25 $\delta_1 = -1+i$ ou $\delta_2 = 1-i$.

$z_1 = \frac{1-3i-1+i}{2} = -i$

$z_2 = \frac{1-3i+1-i}{2} = 1-2i$

d'où $\boxed{S = \{1 ; -i ; 1-2i\}}$ 0,5

II/ $T_m : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$M(z) \longmapsto M'(z')$ /

$z' = (m+i)z + m - 1 - i$

1°) m / T_m translation

Si T_m est une translation alors son écriture complexe est de la forme $z' = z + b$, $b \in \mathbb{C}$

donc $m + i = 1$ 0,25

$m = 1 - i \notin \mathbb{R}$ d'où il n'existe pas de réel m / T_m soit une translation

2°) m / T_m rotation

T_m rotation $\iff |m+i| = 1$

$\iff m^2 + 1 = 1 \iff m = 0$.

T_m rotation $\iff m = 0$ 0,25

$T_0 : z' = iz - 1 - i = e^{i\frac{\pi}{2}} z - 1 - i$

$z' = z \iff (1-i)z = -1-i \iff z = -i$ 0,25

D'où T_0 est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre B. 0,25

3°) $m = 1$; $T_1 : z' = (1+i)z - i$

a) Image par T_1 de A et B

$z_{A'} = (1+i)z_A - i = 1+i-i = 1 = z_A$

$\boxed{T_1(A) = A}$ 0,25

$z_{B'} = (1+i)z_B - i = (1+i)(-i) - i = 1-2i$

$= z_C$ d'où $\boxed{T_1(B) = C}$ 0,25

b) Nature et élts caract. de T_1

$z' = (1+i)z - i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} z - i$

d'où T_1 est la similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$; d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$ et de centre le point A. 0,5

c) Dmq $z' - z = i(z-1)$

$z' - z = (1+i)z - i - z = i(z-1)$ 0,25

$z' - z = i(z-1)$

Déduisons la nature AMM'

$M \neq A$ donc $z \neq 1$ alors

$\frac{z'-z}{z-1} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ d'où

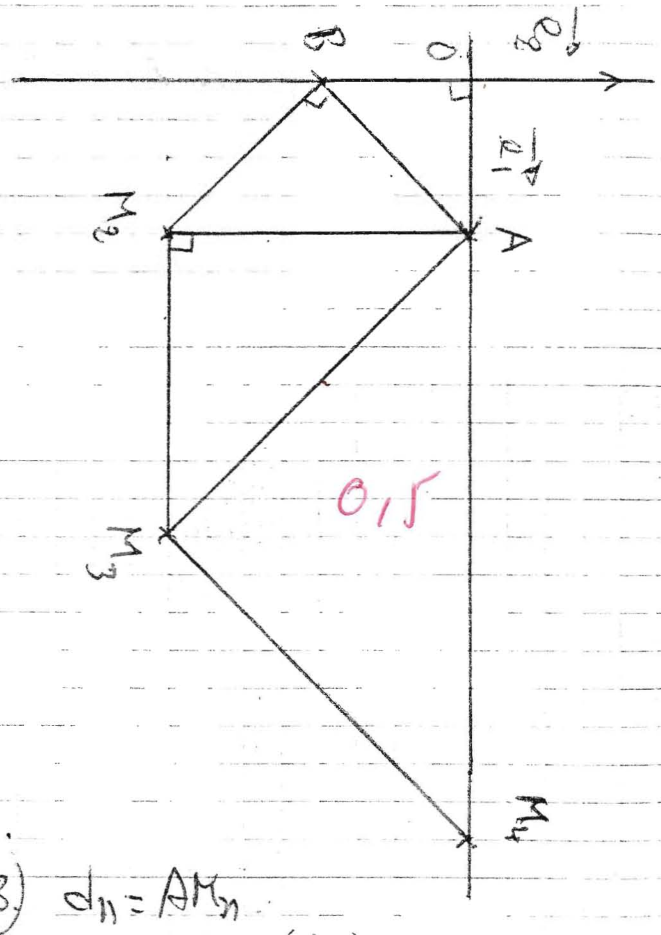
$\left|\frac{z'-z}{z-1}\right| = 1 \Leftrightarrow MM' = AM$ alors AMM' est un triangle isocèle en M. 0,25+0,25

$\arg\left(\frac{z'-z}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow mes(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ d'où le triangle AMM' est rectangle en M.

Conclusion : AMM' est un triangle rectangle et isocèle en M.

d) $M_0 = 0$; $M_n = T_1(M_{n-1})$; $n \geq 1$

α) Construction de M_i ; $1 \leq i \leq 4$



β) $d_n = AM_n$

* Nature de (d_n)

$d_{n+1} = AM_{n+1} = |z_{n+1} - z_A|$

$= |(1+i)z_n - i - 1|$ car $T(M_n) = M_{n+1}$

$= \sqrt{2}\,|z_n - 1| = \sqrt{2}\, AM_n$

$d_{n+1} = \sqrt{2}\, d_n$ d'où (d_n) est une suite géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et de premier terme $d_0 = AO = |1| = 1$. 0,5

* Convergence de (d_n)

(d_n) est une suite géométrique de raison $q = \sqrt{2} > 1$ donc (d_n) diverge. 0,25

γ) $l_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n$.

* Exprimons $l_n = f(n)$

l_n est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = \sqrt{2}$

donc

$$l_n = d_0 \times \frac{1 - \sqrt{2}^{\,n+1}}{1 - \sqrt{2}} \quad 0,25$$

$$l_n = (1+\sqrt{2})(\sqrt{2}^{\,n+1} - 1) \quad 0,25$$

Exercice 2

1. Calcul des probabilités

9 boules | 2 B, 3 N, 4 R.

Soit Ω l'univers des possibles

Ω est l'ensemble des combinaisons de trois boules choisies parmi 9 donc $\text{Card}\,\Omega = C_9^3 = 84$

0,25 $P(A) = \dfrac{C_2^1 \times C_3^1 \times C_4^1}{84} = \dfrac{2 \times 3 \times 4}{84}$ $\quad P(A) = \dfrac{2}{7}$

0,25 $P(B) = \dfrac{C_3^3 + C_4^3}{84} = \dfrac{5}{84}$ $\quad P(B) = \dfrac{5}{84}$

0,25 $P(C) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A) - P(B) = \dfrac{55}{84}$

ou $P(C) = \dfrac{C_2^2 \times C_7^1 + C_3^2 \times C_6^1 + C_4^2 \times C_5^1}{84} = \dfrac{55}{84}$

$P(D) = \dfrac{C_7^3 + C_2^1 \times C_7^2}{84} = \dfrac{77}{84}$ 0,25

$P(D) = \dfrac{C_5^3 + C_4^1 \times C_5^2}{84} = \dfrac{50}{84}$

2.

1. BB → 400F

1. B.N. → 100 F

1. B.R. → −200 F

a) Différentes valeurs de X.

0,25

ble R tirée	ble N tirée	ble B tirée	Valeurs de X
3	0	0	−600
2	1	0	−300
2	0	1	0
1	2	0	0
1	1	1	300
1	0	2	600
0	3	0	300
0	2	1	600
0	1	2	900

b) Loi de probabilité de X.

$P(X = -600) = \dfrac{C_4^3}{84} = \dfrac{4}{84}$

$P(X = -300) = \dfrac{C_4^2 \times C_3^1}{84} = \dfrac{18}{84}$

$P(X = 0) = \dfrac{C_4^2 \times C_2^1 + C_4^1 \times C_3^2}{84} = \dfrac{24}{84}$ 1,5

$P(X = 300) = \dfrac{24 + 1}{84} = \dfrac{25}{84}$

$P(X = 600) = \dfrac{C_4^1 \times C_2^2 + C_3^2 \times C_2^1}{84} = \dfrac{10}{84}$

$P(X = 900) = \dfrac{C_3^1 \times C_2^2}{84} = \dfrac{3}{84}$

La loi de probabilité est résumée

dans le tableau suivant :

x_i	-600	-300	0	300	600	900	Σ
p_i	$\frac{4}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{25}{84}$	$\frac{10}{84}$	$\frac{3}{84}$	1

c) Espérance mathématique

0,25 $E(X) = \sum x_i p_i = \frac{8400}{84}$ $\underline{E(X) = 100}$

d)

0,25 $p = P(X>0) = \frac{25+10+3}{84}$ $\boxed{p = \frac{19}{42}}$

3) $n \in \mathbb{N}^*$

a. Probabilité P_n

En jouant n fois de suite, on a un schéma de Bernoulli de paramètres $p = \frac{19}{42}$ et n alors la probabilité P_n pour qu'il ait au moins 1 gain strictement positif est :

0,25 $P_n = 1-(1-p)^n$ donc $\boxed{P_n = 1-\left(\frac{23}{42}\right)^n}$

b. Valeurs de n / $P_n \geq 0{,}999$

$1-\left(\frac{23}{42}\right)^n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow \left(\frac{23}{42}\right)^n \leq 10^{-3}$

0,25 $\Leftrightarrow n \geq \frac{-3\ln 10}{\ln(23/42)} \simeq 11{,}47$.

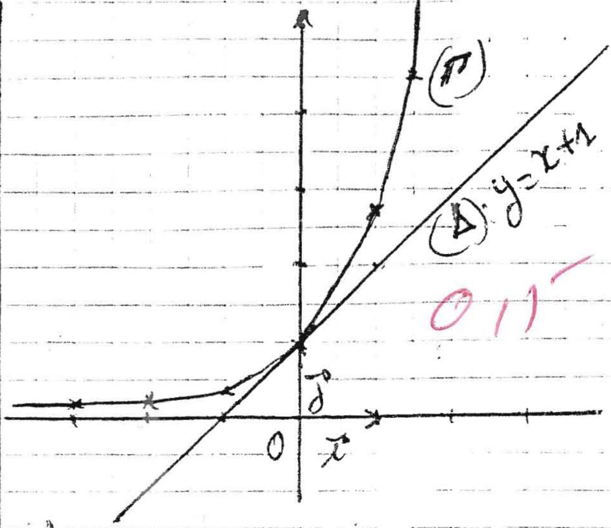
$\Leftrightarrow n \geq 12$ car $n \in \mathbb{N}$.

Problème

Partie A

1) (Δ) : $y = x+1$ (Γ) : $y = e^x$.

b) Représentation de (Γ) et (Δ)



0,5

a)

$y = e^x$ $y' = e^x$

$y'(0) = 1$ et $y(0) = 1$

alors la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 est $y = x+1$ d'où (Δ) est la tangente à (Γ) en $A(0;1)$. 0,5

2.a. $\varphi(t) = e^t - t - 1$.

Variation de φ.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = e^t - 1$ 0,25

$\varphi'(t) > 0 \Leftrightarrow e^t > 1 \Leftrightarrow t > 0$. Sig 0,25 Var 0,25

Alors sur $]-\infty; 0[$; $\varphi' < 0$ donc $\varphi \searrow$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0; +\infty[$, $\varphi' > 0$ donc $\varphi \nearrow$ sur $[0; +\infty[$

b) Démontrons que $e^t \geq t+1$ 0,25+0,25

d'après 2.a), $\varphi(0) = 0$ est le minimum de φ sur $\mathbb{R}$.

alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \geq 0$

$\Leftrightarrow e^{t} - t - 1 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{t} \geq t+1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Interprétation graphique.

0,25 $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{t} \geq t+1$ alors la courbe (Γ) est au-dessus de (Δ).

c) Déduisons $e^{-t}+t+1 \geq 2$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $-t \in \mathbb{R}$ d'après

0,25 A. 2.b°), $e^{-t} \geq -t+1$

$\Leftrightarrow e^{-t}+t+1 \geq 2, \ \forall t \in \mathbb{R}$

Déduisons que $\forall x>0$, $\frac{1}{x}+\ln x+1 \geq 2$

Soit $x \in]0;+\infty[$, $\ln x \in \mathbb{R}$, d'après ce qui précède, on a

0,25 $e^{-\ln x}+\ln x+1 \geq 2$

d'où $\frac{1}{x}+\ln x+1 \geq 2, \ \forall x>0$

Partie B

$g(x)=(x+1)\ln x \quad D_g =]0;+\infty[$.

1) a) Variation de g.

0,5 g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$, $g'(x)=\ln x+1+\frac{1}{x}$

0,5 et d'après A.2.c), $\forall x>0$ $g'(x) \geq 2 > 0$ d'où g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

0,25

b) limites

0,25 0,25

$\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2. a) Tangente (D) à (C) en B(1;0)

$g'(1)=2$; $g(1)=0$

$\boxed{(D): y = 2x-2}$ 0,5

b. $h(x)=g(x)-2x+2$.

Variation de

0,25 $h'(x)=g'(x)-2$ et d'après A.2.c) $\forall x>0$, $g'(x) \geq 2$ 0,25

$\Leftrightarrow g'(x)-2 \geq 0$ d'où h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. 0,25

Signe de h(x).

$g(1)=0$ donc $h(1)=0$.

Soit $x \in]0;1[\Leftrightarrow$

$0<x<1$

$h(x)<h(1)$ car h est croissante

$\Leftrightarrow h(x)<0$ car $h(1)=0$

De m̂ $\forall x \in]1;+\infty[$, $h(x)>0$. 0,5

Tableau de signe

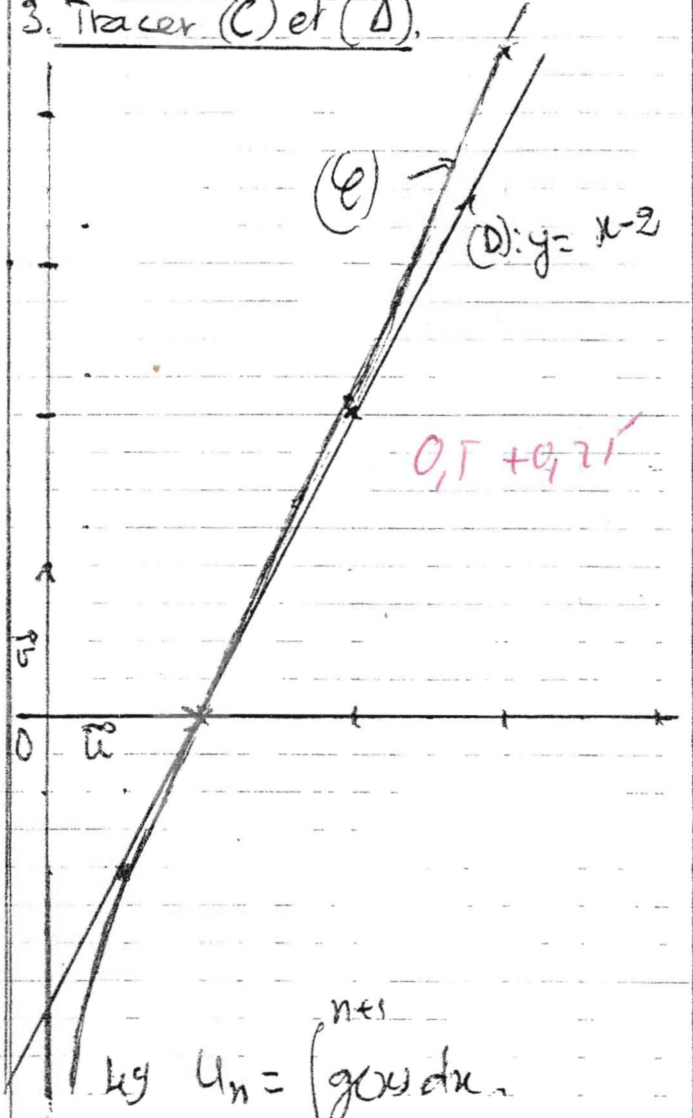
x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	||	$-$	0	$+$	

c. Position de (C) et (D)

Sur $]0;1[$ $h<0$ donc (C) est en dessous de (D).

0,25 Sur $]1;+\infty[$, $h(x)>0$ donc $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (D)
Pour $x=1$, $h(1)=0$ alors $(\mathcal{C})$ et (D) se coupent en $B(1;0)$.

3. Tracer (C) et (Δ).



0,5 +0,25

Soit $U_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$.

a) Interprétation géométrique

$n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$, soit $x \in [n, n+1]$, $g(x) \geq 0$ alors $U_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$ représente en u.a. l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'éq. $x=n$ et $x=n+1$. 0,25

b) Montrons que $g(n) \leq U_n \leq g(n+1)$

Soit $x \in [n, n+1]$

$\Rightarrow n \leq x \leq n+1$

$\Rightarrow g(n) \leq g(x) \leq g(n+1)$ car $g \nearrow$

$g(n) \leq g(x) \leq g(n+1)$ $\forall x \in [n, n+1]$

alors $\int_n^{n+1} g(n)dx \leq U_n \leq \int_n^{n+1} g(n+1)dx$ 0,25

d'où $g(n) \leq U_n \leq g(n+1)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) Variation de U_n

$g(n) \leq U_n \leq g(n+1)$

$g(n+1) \leq U_{n+1} \leq g(n+2)$ alors $U_n \leq U_{n+1}$ d'où la suite (U_n) est croissante. 0,25

d) Convergence de (U_n)

D'après B. 4. b) $U_n \geq g(n)$ et d'après B. 1. b) $\lim_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$ alors $\lim U_n = +\infty$ d'où la suite (U_n) est divergente. 0,25

Partie C $G(x) = \int_1^x g(t)dt$.

1. Signe de $G(x)$.

G est la primitive de g sur $]0;+\infty[$ donc $G'(x) = g(x)$

$G'(x) = (x+1)\ln x$, $G' > 0$

sur $]1;+\infty[$ alors G est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et $G'<0$ sur $]0;1[$ donc G est strictement décroissante sur $]0;1]$ alors $G(1)=0$ est le minimum de G sur $]0;+\infty[$ d'où $G(x)\geq 0$ $\forall x\in]0;+\infty[$.

0,5

2. <u>Calcul de $G(x)$</u> ; soit $x>0$

$G(x)=\int_1^x g(t)\,dt=\int_1^x (t+1)\ln t\,dt.$

$u(t)=\ln t \Rightarrow u'(t)=\frac{1}{t}$

$v'(t)=t+1 \quad v(t)=\frac{1}{2}t^2+t$

0,5

$G(x)=\left[\left(\frac{1}{2}t^2+t\right)\ln t\right]_1^x-\int_1^x\left(\frac{1}{2}t+1\right)dt$

$=\left(\frac{1}{2}x+1\right)x\ln x-\left[\frac{1}{4}t^2+t\right]_1^x$

$$\boxed{G(x)=\left(\frac{1}{2}x+1\right)x\ln x-\frac{1}{4}x^2-x+\frac{5}{4}}$$

3. <u>limites de G en 0 et en $+\infty$</u>

$\lim_{x\to 0} G(x)=$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} x\ln x=0\\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x+1=1\end{array}\right\}$ donc $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln x=0$

$\lim_{x\to 0}-\frac{1}{4}x^2-x+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$

Par somme $\boxed{\lim_{x\to 0} G(x)=\frac{5}{4}}$

0,25

$\lim_{x\to+\infty} G(x)=\lim x^2\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)\ln x-\frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{5}{4x^2}\right]$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{array}\right\}$ donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)\ln x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}=-\frac{1}{4}$

0,75

par somme

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)\ln x-\frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{5}{4x^2}=+\infty$

Par suite $\boxed{\lim_{x\to+\infty} G(x)=+\infty}$

BAC BLANC 2004 n°1

(Février 2004)

Série D

Durée : 4 H

Coéf : 4

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm .

On considère la transformation F du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1+i)z + 2$.

1°) Soit A le point d'affixe $a = -2 + 2i$.

Déterminer les affixes des points A' et B vérifiant respectivement : A' = F(A) et F(B) = A .

2°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de F .

3°) Soit C le point d'affixe c = 2i .

a) Etablir que , pour tout complexe z distinct de c , on a :

$$\frac{z'-z}{c-z} = -i$$

b) Soit M un point distinct de C . Comparer MM' et MC et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MM'})$.

c) En déduire une méthode de construction de M' à partir de M . Réaliser cette construction sur la figure .

4°) a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) des points du plan dont l'affixe z vérifie : $|z + 2 - 2i| = \sqrt{2}$

b) Vérifier que B est un point de (Γ) .

c) Démontrer que , pour tout z élément de ℂ , on a : $z' + 2 = (1+i)(z + 2 - 2i)$.

d) Démontrer que l'image par F de tout point de (Γ) appartient au cercle (Γ') de centre A' et de rayon 2 .

e) Placer A , B , C , A', (Γ) , (Γ') sur une même figure.

EXERCICE 2 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm .

On considère l'application f qui, à tout nombre complexe différent de 1 , associe le nombre complexe $f(z) = \frac{2-iz}{1-z}$.

Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et − 2i.

1°) On pose z = x + iy avec x et y réels .

a) Ecrire f(z) sous forme algébrique .

b) Déterminer l'ensemble (D) des points M d'affixes z tels que f(z) soit imaginaire pur .

c) Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixes z tels que f(z) soit réel .

d) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixes z tels que | f(z) | = 1 .

2°) On pose z ' = f(z)

a) Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f .

b) Exprimer, pour z' différent de i , z en fonction de z'.

c) Soit M , M ', C et D des points d'affixes respectives z ($z \neq 1$) , z' ($z' \neq i$) , 2 et i Montrer que $OM = \frac{M'C}{M'D}$.

d) Montrer que , lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A , son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira .

e) Montrer que si M est un point de l'axe réel , différent de O et de A , alors M' appartient à la droite (CD).

PROBLEME (11 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞[par :

$$\begin{cases} f(0) = \frac{3}{2} \\ f(x) = 2x\ln x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} \quad pour \quad x > 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative un repère orthonomal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm .

Partie A

Soit g la fonction définie sur] 0; + ∞[par :

g(x) = 2lnx − x + 1.

1°) Déterminer les limites en 0 et en + ∞ de g .

2°) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

3°) a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet sur]0 ; + ∞[deux solutions 1 et α et que $3,5 \leq \alpha \leq 3,6$.

b) Déterminer le signe de g(x) sur]0 ; + ∞[.

Partie B

1°) a) Etudier la continuité de f en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 . Préciser la tangente à (C) au point d'abscisse 0 .

2°) Calculer la limite de f en + ∞ .

3°) a) Calculer f '(x) et vérifier que pour tout x > 0 , f '(x) = g(x).

b) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation .

4°) a) Soit h la restriction de f à l'intervalle [α ; +∞[

Montrer que h est une bijection de [α ; + ∞[sur un intervalle J à préciser .

b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (C') sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

* Quel est l'ensemble de définition de h^{-1} ?

* Quel est l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} ?

Justifier la réponse .

5°) a) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet sur]0 ; + ∞[deux solutions 1 et β et que $5,1 \leq \beta \leq 5,2$.

b) Déterminer le signe de f(x) sur]0 ; + ∞[.

6°) Tracer avec soin dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (C) et (C') en précisant la tangente à (C') en son point d'abscisse f(α) . *(On expliquera la construction de (C')* .

7°) Soit la primitive F de f sur]0 ;+ ∞[qui s'annule en 1.

a) Sans expliciter F(x), étudier les variations de F.

b) Soit k la fonction définie sur]0 ; + ∞[par :

$$k(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4}$$

Montrer que k est une primitive de la fonction x → xlnx .

c) En déduire l'expression de F(x) .

d) Déterminer la limite de F en 0 .

En déduire que F admet un prolongement par continuité en 0 que l'on déterminera.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO
Tél : 55 21 73 FAX : 55 12 02 BP : 236 PORT-GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
UNION – TRAVAIL – JUSTICE

BAC BLANC n° 1 FEVRIER 2006
Epreuve de MATHEMATIQUES

Série : D
Durée : 4h
Coeff : 4

EXERCICE 1 (4,5 points)

Soit le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2cm.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives i et – 2i
Soit f l'application du plan $\mathcal{P}$ privé de A dans $\mathcal{P}$ qui, à tout pont M d'affixe z distinct de i associe le point M′ d'affixe z′ définie par : $z' = \dfrac{2z-i}{iz+1}$.

1°) Soit z un nombre complexe différent de i.

a) On désigne respectivement par r et θ le module et un argument de $z - i$.
Interpréter géométriquement r et θ à l'aide de A et M. **0,5**

b) Montrer que $(z' + 2i)(z - i) = 1$. **0,5**

c) On désigne respectivement par r′ et θ′ le module et un argument de $z' + 2i$.
Exprimer r′ et θ′ en fonction de r et θ. Interpréter géométriquement r′ et θ′ à l'aide de B et M′. **1**

2°) Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

a) Montrer que si M appartient à (C), son image M′ appartient à un cercle (C′) de centre B dont on donnera le rayon. **0,5**

b) Le cercle (C′) est-il l'image de (C) ? Justifier. 0,25 + 0,25 **0,5**

3°) Soit T le point d'affixe $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i$.

a) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AT}$; en déduire que T appartient au cercle (C). **0,5**

b) Déterminer une mesure en radians de $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AT}\right)$. Tracer (C) et placer le point T. 0,25 + 0,25 **0,75** 0,5

c) En utilisant les questions précédentes, construire l'image T′ du point T par f. 0,25 + 0,25 **0,25** 0,5

EXERCICE 2 (5points)

I) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + (1 - i)z - i = 0$. **0,5** + 0,25

II) Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$; unité graphique : 5cm.
A, B, C désignent les points d'affixes a, i et –1 (où $a \in \mathbb{C}$). I désigne le milieu du segment [BC].
On note g l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point g(M) d'affixe :

$$z' = \frac{a + z + iz}{3}.$$

A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M_1 d'affixe iz.
On note M′ l'isobarycentre des points A, M et M_1.

1°) a) Exprimer l'affixe de M′ en fonction de z et de a. **0,25**

b) Montrer que g(B) = O si, et seulement si, a = 1 – i et que, dans ces conditions, 0,25 + 0,5 0,75
les points O, A, I sont alignés.
Placer les points O, A, B, C, I. **0,5**

Dans toute la suite de l'exercice, on prend a = 1 – i.

0,25 × 3

2°) a) Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω, le rapport et l'angle. **0,75**

b) Prouver que les points A, B, Ω sont alignés. Placer Ω. 0,5 + 0,25 **0,75**

3°) a) Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$ **0,5**

En déduire que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI). **0,25**

b) Soit O′ l'image de O par g. Montrer que la droite (OO′) est l'image par g de la droite (BO). **0,25**

c) En déduire que les points I, O, O', A sont alignés. **0,25**

PROBLEME (10,5 points)

I) Soit f la fonction définie sur]0 ; + ∞[par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$

1°) a) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition. 0,25 + 0,25 **0,5**

b) Etudier le sens de variation de f . 0,25 + 0,25 + 0,25 **~~1~~** 0,75

2°) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans]0 ; + ∞[une solution unique α et que α ∈]1 ; 2[. 0,5 **~~0,75~~** 0,5

b) Etudier le signe de f(x) lorsque x décrit]0 ; + ∞[. 0,25 + 0,25 **0,5**

II) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle [1 ; 2] par : $\varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln x$.

1°) a) Etudier les variations de φ. 0,25 + 0,25 + 0,25 **0,5** + 0,25

b) Prouver que : ∀x∈[1 ; 2], g(x)∈[1 ; 2]. 0,25 + 0,25 **0,5**

c) Montrer que α est l'unique solution de φ(x) = x. 0,25 + 0,25 **0,5**

2°) a) Montrer que, pour tout x de [1 ; 2] on a : $|\varphi'(x)| \le \frac{1}{2}$. 0,25 + 0,25 **0,25** + 0,25

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout x de [1 ; 2], 0,25 + 0,25

$|\varphi(x) - \alpha| \le \frac{1}{2}|x - \alpha|$. **0,5**

III) Soit g la fonction définie sur [0 ; 1] par : $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x, \quad si \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$

On note (𝒞) la courbe représentative de g dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 10cm.

1°) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en O. **0,5**

b) Calculer g′(x) pour x ≠ 0, puis vérifier que pour tout x de]0 ; 1] : $g'(x) = x.f\left(\frac{1}{x}\right)$. 0,25 + 0,25 **~~0,75~~**

c) En déduire le signe de g′(x) lorsque x ∈ $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$ et lorsque x ∈ $\left[\frac{1}{\alpha};1\right]$ **0,5**

(*On pourra utiliser les résultats de la **partie I***)

d) En déduire les variations de g et dresser son tableau de variation. **0,5**

2°) a) Montrer qu'une équation de la tangente (D) à (𝒞) au point d'abscisse 0 est y = x. **0,25**

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (𝒞) et de la droite (D). **0,25** + 0,25

c) Etudier la position relative de (𝒞) et (D). **0,5**

3°) Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction h définie par : $h(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x$.

a) Montrer que la droite (D) est la tangente à la courbe (Γ) en son point d'abscisse 0. **0,5**

b) Etudier la position relative de (𝒞) et de (Γ). **0,5**

c) Tracer avec soin sur un même graphique, la droite (D) et les courbes (Γ) et (𝒞). **1,25**

I

I 1° a) $r = |z-i| = AM$; $\theta = \arg(z-i) = (\vec{u}, \vec{AM})$.

b) $(z'+2i)(z-i) = \left(\frac{2z-i}{iz+1}+2i\right)(z-i)$

$= \left(\frac{2z-i+2i-2z}{iz+1}\right)(z-i) = \frac{iz+1}{iz+1} = 1$

donc $(z'+2i)(z-i) = 1$

c) $(z'+2i)(z-i) = 1 \Rightarrow r'r = 1 \Rightarrow \boxed{r' = \frac{1}{r}}$

$\arg(z'+2i) + \arg(z-i) = \arg 1 \Rightarrow$

$\theta' + \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta' = -\theta\ [2\pi]}$

$r' = BM'$ et $\theta' = (\vec{u}, \vec{BM'})$

2° $(C) = \mathcal{C}(A;1)$

a) $M \in (C) \Leftrightarrow AM = 1 \Leftrightarrow r' = 1 \Leftrightarrow BM' = 1$

$\Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}(B;1) = (C')$.

b) si $M \in (C)$ alors $M' \in (C')$. Reciproque.

Soit $M'(z') \in (C')$, cherchons $M(z) \in (C)$ tq M' soit l'image de M par f.

$z' = \frac{2z-i}{iz+1} \Rightarrow z'(iz+1) - 2z = -i$

$\Rightarrow z(iz'-2) = -i-z' \Rightarrow z = \frac{z'+i}{2-iz'}$

de plus $|z-i| = \left|\frac{z'+i}{2-iz'} - i\right| = \left|\frac{z'+i-2i-z'}{2-iz'}\right|$

$= \left|\frac{-i}{2-iz'}\right| = \left|\frac{-i}{-i(z'+2i)}\right| = \left|\frac{1}{z'+2i}\right| = 1$

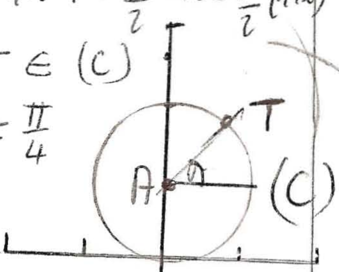
donc $M(z) \in (C)$ avec $z = \frac{z'+i}{2-iz'}$ et $f(M) = M'$

d'où $\boxed{f(C) = C'}$

3° a) $z_{\vec{AT}} = z_T - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} + i + i\frac{\sqrt{2}}{2} - i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

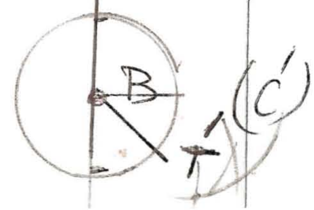
$AT = |z_{\vec{AT}}| = 1$ donc $T \in (C)$

b) $(\vec{u}, \vec{AT}) = \arg z_{\vec{AT}} = \frac{\pi}{4}$



$\theta' = (\vec{u}, \vec{BM'}) = -\theta = -\frac{\pi}{4}$

$T' \in (C')$ et $(\vec{u}, \vec{BM'})$



II 1° ① $z^2 + (1-i)z - i = 0$

$\Delta = (1-i)^2 + 4i = -2i + 4i = 2i = (1+i)^2$

$z_1 = \frac{-1+i-1-i}{2} = -1$

$z_2 = \frac{-1+i+1+i}{2} = i$ $\boxed{S = \{-1; i\}}$

② $A(a)$; $B(i)$ et $C(-1)$, $a \in \mathbb{C}$

1° a) $z_{M''} = \frac{z_A + z_M + z_{M_1}}{3} = \frac{a+z+iz}{3}$

donc $z_{M'} = g(M) = z' = \frac{a+z+iz}{3}$

b) $g(B) = 0 \Leftrightarrow z'_B = \frac{a+i-1}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{a = 1-i}$

or $z_I = \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{i-1}{2} = -\frac{1}{2}a$

Ainsi $\vec{OI} = -\frac{1}{2}\vec{OA}$ et O, A, I alignés.

2° a) $a = 1-i$ $z' = \frac{1-i+(1+i)z}{3}$

$z' = \frac{1}{3}(1+i)z + \frac{1}{3}(1-i)$

L'écriture complexe de g est $z' = az + b$

avec $a = \frac{1}{3}(1+i) \neq 0$ $|a| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\arg a = \frac{\pi}{4}$

donc g est 1 sim. directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre $\Omega\left(\frac{3-i}{5}\right)$.

b) $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = i - 1 + i = -1+2i$

$z_{\vec{A\Omega}} = z_\Omega - z_A = \frac{3-i}{5} - 1 + i = \frac{2}{5}(-1+2i)$

$z_{\vec{A\Omega}} = \frac{2}{5} z_{\vec{AB}} \Leftrightarrow \vec{A\Omega} = \frac{2}{5}\vec{AB}$ et A, B, Ω alignés.

3° a) $(\vec{OB}, \vec{OI}) = \arg\frac{z_I}{z_B} = \arg\left(\frac{-1+i}{2i}\right) =$

$= \arg(-1+i) - \arg 2i = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

g est 1 sim dir d'angle $\frac{\pi}{4}$ or $g(B) = 0$ et $(\vec{OB}, \vec{OI}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ donc l'image de (OB) par g est (OI).

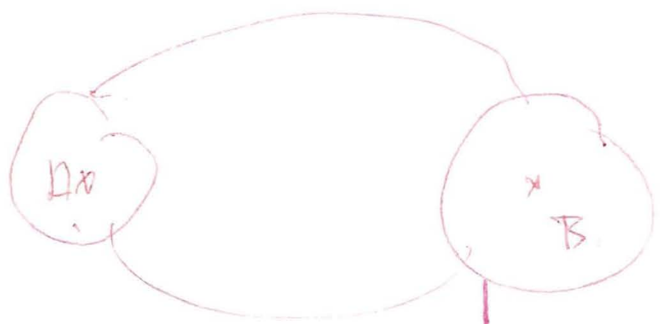
b) $g(B) = 0$ et si $g(O) = O'$ alors (OO') est l'image de (BO) par g.

c) $g(BO) = (OO')$ et $g(BO) = (OI)$ donc $O\ I\ O'$ alignés or d'après 1b O, A, I alignés donc $A \in (OI) = (OO')$ et I, O, O' et A alignés.

$\mathcal{P} - \{A\} \longrightarrow \mathcal{P} - \{B\}$

$\mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$

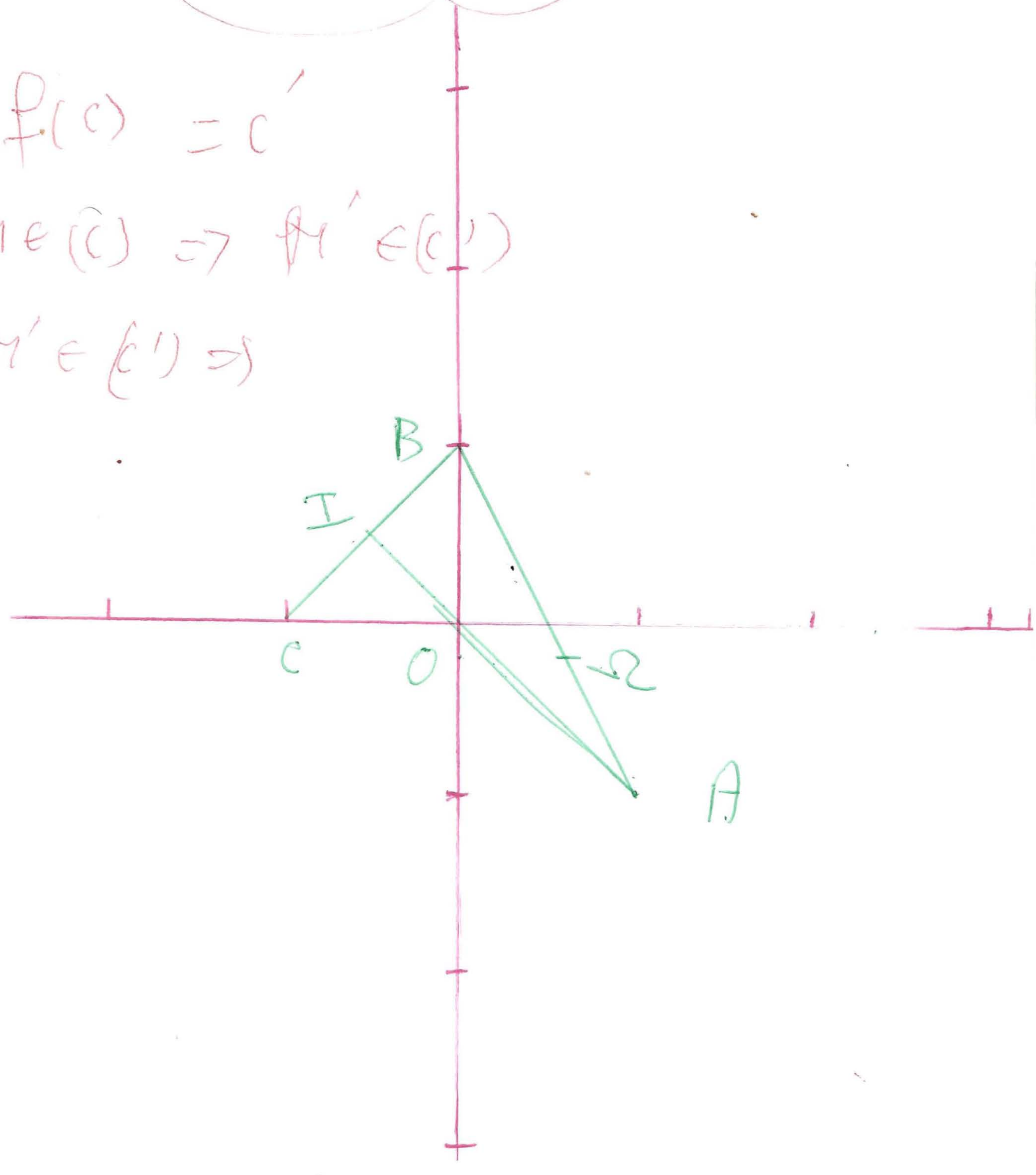
$]1;3[\longrightarrow]2 \ldots [$



$f(C) = C'$

$M \in (C) \Rightarrow M' \in (C')$

$M' \in (C') \Rightarrow$



Problème

I) $x>0$ $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$

1°a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

b) f est dériv sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=1+\frac{1}{2x}>0$

f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

2°a) f est cont et str $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$ donc f est 1 bij de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ or $0\in\mathbb{R}$ donc l'eq $f(x)=0$ admet 1 sol uniq α. de plus $]1;2[\subset]0;+\infty[$ $f(1)\simeq -1<0$ $f(2)\simeq\frac{1}{2}\ln 2>0$

donc $1<\alpha<2$.

b) f cont et str crois avec $f(\alpha)=0$ donc sur $]0;\alpha[$ $f<0$ et sur $]\alpha;+\infty[$ $f>0$

x	0		α		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

II) $\varphi(x)=2-\frac{1}{2}\ln x$ $[1;2]$.

1°a) φ est dériv et $\varphi'(x)=-\frac{1}{2x}<0$ et $\varphi\searrow$

b) φ continue et décroiss.

$1\le x\le 2 \Rightarrow \varphi(2)\le\varphi(x)\le\varphi(1)$ or

$\varphi(2)\simeq 2-\frac{\ln 2}{2}\simeq 1{,}65>1$ et $\varphi(1)\simeq 2$ donc

$\forall x\in[1;2]$ $\varphi(x)\in[1;2]$.

c) $f(x)=0 \Leftrightarrow x-2+\frac{1}{2}\ln x=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)$

or α est l'uniq solut° de $f(x)=0$ d'où α est l'unique solution de $\varphi(x)=x$.

2°)a) $1\le x\le 2 \Rightarrow -4\le -2x\le -2 \Rightarrow -\frac{1}{2}\le -\frac{1}{2x}\le -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2}\le\varphi'(x)\le\frac{1}{2}$ donc $\forall x\in[1;2]$ $|\varphi'(x)|\le\frac{1}{2}$

b) φ est déri sur $[1;2]$ et $|\varphi'|\le\frac{1}{2}$ donc d'IAF appliquée à x et α élts de $[1;2]$ on a :

$|\varphi(x)-\varphi(\alpha)|\le\frac{1}{2}|x-\alpha|$ or $\varphi(\alpha)=\alpha$ donc

$|\varphi(x)-\alpha|\le\frac{1}{2}|x-\alpha|$

III) $x\in[0;1]$ $\begin{cases} g(0)=0 \\ g(x)=-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x & 0<x\le 1\end{cases}$

1°a) $\lim\limits_{x\to 0^>} g(x)=0$ car $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{4}x^2\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{7}{8}x^2+x=0$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0=g(0)$ et g cont en 0.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0} -\frac{7}{8}x+1-\frac{1}{4}x\ln x=1$

car $\lim -\frac{7}{8}x+1=1$ et $\lim -\frac{1}{4}x\ln x=0$

g est dériv en 0 et $g'(0)=1$

b) $\forall x\in]0;1]$ $g'(x)=-2x+1-\frac{1}{2}x\ln x$

$g'(x)=x\left[-2+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{x}\right]=x\,f\!\left(\frac{1}{x}\right)$

donc $\forall x\in]0;1]$ $\boxed{g'(x)=x\,f\!\left(\frac{1}{x}\right)}$

c) $f\!\left(\frac{1}{x}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\in[\alpha;+\infty[\Leftrightarrow x\in\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$

$f\!\left(\frac{1}{x}\right)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{\alpha};1\right]$ avec $x>0$

$g'(x)$ est du signe de $f\!\left(\frac{1}{x}\right)$.

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

d) T.V de g

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\searrow$	$\frac{1}{8}$

$g\nearrow$ sur $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$

$g\searrow$ sur $\left[\frac{1}{\alpha};1\right]$

2°a) (D) $y=g'(0)(x-0)+g(0)=1(x-0)+0$

(D) $\boxed{y=x}$ $x\in]0;1]$

b) $g(x)=y \Leftrightarrow -\frac{7}{8}x^2-\frac{1}{4}x^2\ln x=0$

$\Leftrightarrow \frac{7}{8}+\frac{1}{4}\ln x=0$ $\frac{1}{4}\ln x=-\frac{7}{8}$

$\Leftrightarrow \ln x=-\frac{7}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{7}{2}}$

$(C)\cap(D)=\left\{(0;0);\left(e^{-\frac{7}{2}};e^{-\frac{7}{2}}\right)\right\}$

c)

x	0		$e^{-\frac{7}{2}}$		1
$g-y$		$+$	0	$-$	
		(Γ) au dessus		(Γ) au dessous	

3°a) $h(x)=-\frac{7}{8}x^2+x$ $h'(x)=-\frac{7}{4}x+1$

$h(0)=0$ et $h'(0)=1$ donc (D) est la tg. à (Γ) au pt d'abscisse 0.

b) $g(x)-h(x)=-\frac{1}{4}x^2\ln x>0$

(C) au dessus de (Γ) et

(C) coupe (Γ) en O $(0;0)$

et au point $\left(1;\frac{1}{8}\right)$.

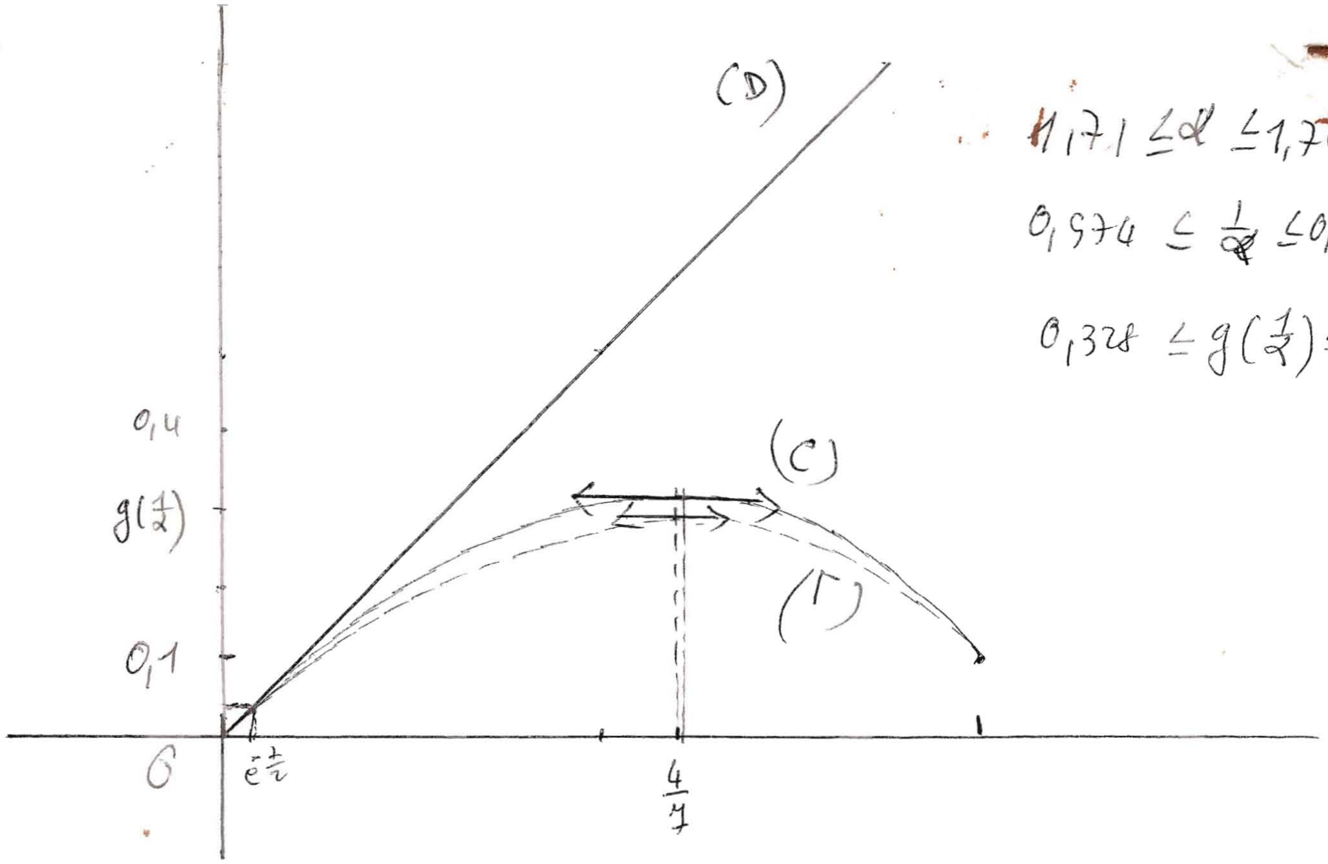
NB : La courbe (Γ) est portée par la parabole d'équation $y=-\frac{7}{8}x^2+x$

		$\frac{4}{7}$	
	$+$	0	$-$
	$\nearrow$	$\frac{2}{7}$	$\searrow$

$1{,}71 \leq \alpha \leq 1{,}74$

$0{,}574 \leq \frac{1}{\alpha} \leq 0{,}585$

$0{,}328 \leq g\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0{,}336$



MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION DÉLÉGUÉE D'ACADÉMIE
DE L'OGOOUÉ-MARITIME
PORT-GENTIL

<u>EXAMENS BLANCS-SESSION DE MAI 2006</u>
<u>BACCALAUREAT BLANC</u>

<u>Série</u> : D <u>Cœf</u> : 4
<u>Durée</u> : 4 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

<u>EXERCICE1.</u> (6 points)

Le plan est rapporté à un repère ortho normal $(o,\vec{u},\vec{v})$, unité graphique: 2cm.
Pour tout point M de coordonnées $(x;y)$, on désigne par $z = x + iy$ son affixe. On note A , B et C les points d'affixes respectives : i , -2i et $\frac{1}{2}i$.

On considère l'application f du plan P privé de A dans P qui , à tout point M d'affixe z distinct de i associe le point M' d'affixe z' définie par:

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

1°) Soit z un nombre complexe différent de i.

0,5 a) Résoudre dans C l'équation $f(z) = z$.(On pourra poser $z = x + iy$) $z' = z$

0,25 b) Que peut-on en déduire pour l'application f ?

2°) On désigne respectivement par φ et α le module et un argument de $\left(z - \frac{1}{2}i\right)$ et par r et θ le module et un argument de $(z - i)$.

a) Vérifier que :

$$0,25+0,25 \quad z' = -2i\left(\frac{z - \frac{1}{2}i}{z - i}\right).$$

0,75 b) Interpréter géométriquement φ et α à l'aide des points C et M , puis r et θ à l'aide des points A et M . En déduire une interprétation géométrique du module et d'un argument de z'.

c) Utiliser les résultats précédents pour déterminer:

0,5 * l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que z' soit réel. 0,5

0,5 * l'ensemble (Δ) des points M d'affixes z tels que $|z'| = 2$.

0,5 3°)a) Démontrer que , pour tout nombre complexe différent de i, $(z'+2i)(z - i) = 1$.

0,5 b) On désigne respectivement par r' et θ' le module et un argument de z'+2i . Exprimer r' et θ' en fonction de r et θ. Interpréter géométriquement r' et θ' à l'aide des points B et M' .

4°) Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1 .

0,25 a) Démontrer que si M appartient à (C), son image M' appartient à un cercle (C') de centre B dont on donnera le rayon .

0,25 b) Le cercle (C') est-il image par f du cercle (C) ? Pourquoi ?

5°) Soit T le point d'affixe : $\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$.

0,5 a) Calculer l'affixe de $\overrightarrow{AT}$. En déduire que T appartient au cercle (C).

0,5 b) Déterminer une mesure en radians, de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{AT})$. Tracer le cercle (C) et placer le point T (unité graphique: 2cm).

0,5 c) En utilisant les questions précédentes, construire l'image T' du point T par f .

EXERCICE 2. **(4 points)**

Le chargement d'un camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contiennent un produit non déclaré aux services de la douane. Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douane.
A chacun de ces barrages, le contrôle obligatoire consiste à examiner le contenu de 5 sacs choisis au hasard (les contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants).

1°) Le camionneur arrive à un barrage donné.
(On donnera l'arrondi d'ordre 1, de chacun des résultats obtenus).

0,5 a) Calculer la probabilité pour qu'exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré.

1 b) Démontrer que la probabilité pour que l'un au moins des 5 sacs contrôlés contienne le produit non déclaré. ~~0,5~~ 0,6

2°) Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une taxe forfaitaire de 10 000 francs (dix mille francs) à ce barrage pour être autorisé à continuer son chemin avec tout son chargement. Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire, tout son chargement est saisi.

a) On suppose que le camionneur paie la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert. On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur ~~ne~~ peut ainsi dépenser sur l'ensemble de son trajet.

1,5 i) Déterminer la loi de probabilité de X.

0,5 ii) Calculer l'espérance mathématique de X

b) On suppose que le camionneur n'a pas d'argent pour payer une éventuelle taxe.

0,5 Calculer la probabilité pour que son chargement soit saisi.

PROBLEME. **(10 points)**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par: $f(x) = 3x + 1 - x\,e^x$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère ortho normal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, son tracé n'est pas demandé.

A- Etude de f. 4,5 4,75

1°) a) Déterminer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f. 0,25 + 0,25

b) Préciser la limite de f' en $+\infty$ et dresser son tableau de variation. 0,25 + 0,25 + 0,25

c) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique notée α. Vérifier que $0,6 < \alpha < 0,7$ et déterminer le signe de f' sur $[0;+\infty[$. 0,75

d) Préciser la limite de f en $+\infty$ et dresser son tableau de variation. 0,25 + 0,25 + 0,25

2°) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée β. Vérifier que β est compris entre 1 et $\frac{3}{2}$. 0,75 b) Construire (C).

3°) a) Soit t un réel strictement positif.

0,75 Calculer $\int_0^t x\,e^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties. En déduire , en fonction de t, l'expression de $I(t) = \int_0^t f(x)dx$. 0,5

b) Quelle est l'interprétation géométrique de $I(\beta)$? 0,25

B - On se propose de déterminer une valeur approchée de β défini au **A**-2°). 5,25

1°) a) Démontrer que sur l'intervalle $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\ln\left(3+\frac{1}{x}\right) = x$. 0,5

On introduit alors la fonction h définie sur l'intervalle $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ par $h(x) = \ln\left(3+\frac{1}{x}\right)$. La dérivée de h est notée h'. $h' \to 0,25$

b) Démontrer que l'image par h de l'intervalle $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ est incluse dans $\left[1; \frac{3}{2}\right]$. 0,5

c) Démontrer que , pour tout x de l'intervalle $\left[1; \frac{3}{2}\right]$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{4}$. 0,75

En déduire que , pour tout x de $\left[1; \frac{3}{2}\right]$, $|h(x) - \beta| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$. 0,5

2°) Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $U_{n+1} = h(U_n)$ et $U_0 = 1$.

a) Démontrer par récurrence que , pour tout n entier naturel , $U_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$. 0,25 + 0,25 + 0,25

b) Démontrer que , pour tout entier naturel n : $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|U_n - \beta|$. 0,25 + 0,25 +

En déduire que , pour tout entier naturel n : $|U_n - \beta| \leq \frac{1}{2^{2n+1}}$. 0,5 + lim U_n

c) Déterminer un entier p tel que U_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de β et , à l'aide d'une calculatrice , proposer une approximation décimale de U_p à 10^{-6} près .Que peut-on en déduire pour β? ./.

0,5 + 0,25 + 0,25

$z \neq i$

a) $f(M) = M \iff z' = z \iff \frac{2z-i}{iz+1} = z$

$\iff 2z - i = z(iz+1) = iz^2 + z \iff$

$iz^2 + z - 2z + i = 0 \iff iz^2 - z + i = 0$

$\Delta = 1 - 4i^2 = 1 + 4 = 5 > 0$

$z_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2i} = \frac{(1-\sqrt{5})i}{-2} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}i$

$z_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2i} = \frac{(1+\sqrt{5})i}{-2} = -\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}i$

b) f admet deux points invariants d'affixes z_1 et z_2.

2° a) $-2i\left(\frac{z-\frac{1}{2}i}{z-i}\right) = \frac{-2iz-1}{z-i}$

$= \frac{-i(2z-i)}{z-i} = \frac{-i^2(2z-i)}{iz+1}$

$= \frac{2z-i}{iz+1}$ donc $z' = -2i\left(\frac{z-\frac{1}{2}i}{z-i}\right)$

b) $\rho = |z - \frac{1}{2}i| = CM$

$\alpha = \arg(z - \frac{1}{2}i) = (\vec{u}, \vec{CM})$

$r = |z-i| = AM$ et $\theta = (\vec{u}, \vec{AM})$.

$|z'| = 2\frac{CM}{AM}$ et, $\arg z' = (\vec{AM}, \vec{CM}) - \frac{\pi}{2}$

c) $M \in (\Gamma) \iff z'$ réel $\iff z' = 0$ ou

$\arg z' = k\pi \iff z = c$ ou

$\arg -2i\left(\frac{z-\frac{1}{2}i}{z-i}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$M = C$ ou $\arg\left(\frac{z-\frac{1}{2}i}{z-i}\right) - \frac{\pi}{2} = k\pi$

$M = C$ ou $(\vec{AM}, \vec{CM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$M = C$ ou $(\vec{MA}, \vec{MC}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

(Γ) est le cercle de diamètre [AC] privé de A.

d) $M \in (\Delta) \iff |z'| = 2 \iff 2\frac{CM}{AM} = 2$

$\iff CM = AM \iff (\Delta)$ est la médiatrice de [AC].

3° a) $(z'+2i)(z-i) = \left(\frac{2z-i}{iz+1} + 2i\right)(z-i)$

$\frac{(2z - i - 2z + 2i)(z-i)}{iz+1} = \frac{i(z-i)}{iz+1}$

$= \frac{iz+1}{iz+1} = 1$ donc $\boxed{(z'+2i)(z-i) = 1}$

b) $r' = |z'+2i|$ donc $rr' = 1$ et $r' = \frac{1}{r}$

$\theta + \theta' = 0\ [2\pi]$ donc $\theta' = -\theta\ [2\pi]$

$r' = |z'+2i| = BM'$

$\theta' = \arg(z'+2i) = (\vec{u}, \vec{BM'})$.

4° a) $M \in (C) = \mathcal{C}(A, 1) \iff AM = 1$

$\iff r = 1 \iff r' = \frac{1}{r} = 1$

$\iff BM' = 1 \iff M' \in \mathcal{C}(B, 1) = (C')$

b) Montrons que $f(C) = C'$

d'après a) $f(C) \subset C'$ et il reste à montrer que $C' \subset f(C)$.

$f(M) = M' \iff z' = \frac{2z-i}{iz+1} \iff$

$z'(iz+1) = 2z - i \iff z(-iz'+2) = i + z' \iff$

$z = \frac{i+z'}{2-iz'}$, pour $z' \neq -2i$ ainsi

$\forall M' \in (C') = \mathcal{C}(B; 1)$ on a $M' \neq B$ et

$M' = f(M)$ avec M d'affixe $z = \frac{i+z'}{2-iz'}$

de plus $r' = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{r'} = 1 = AM$ et $M \in (C)$

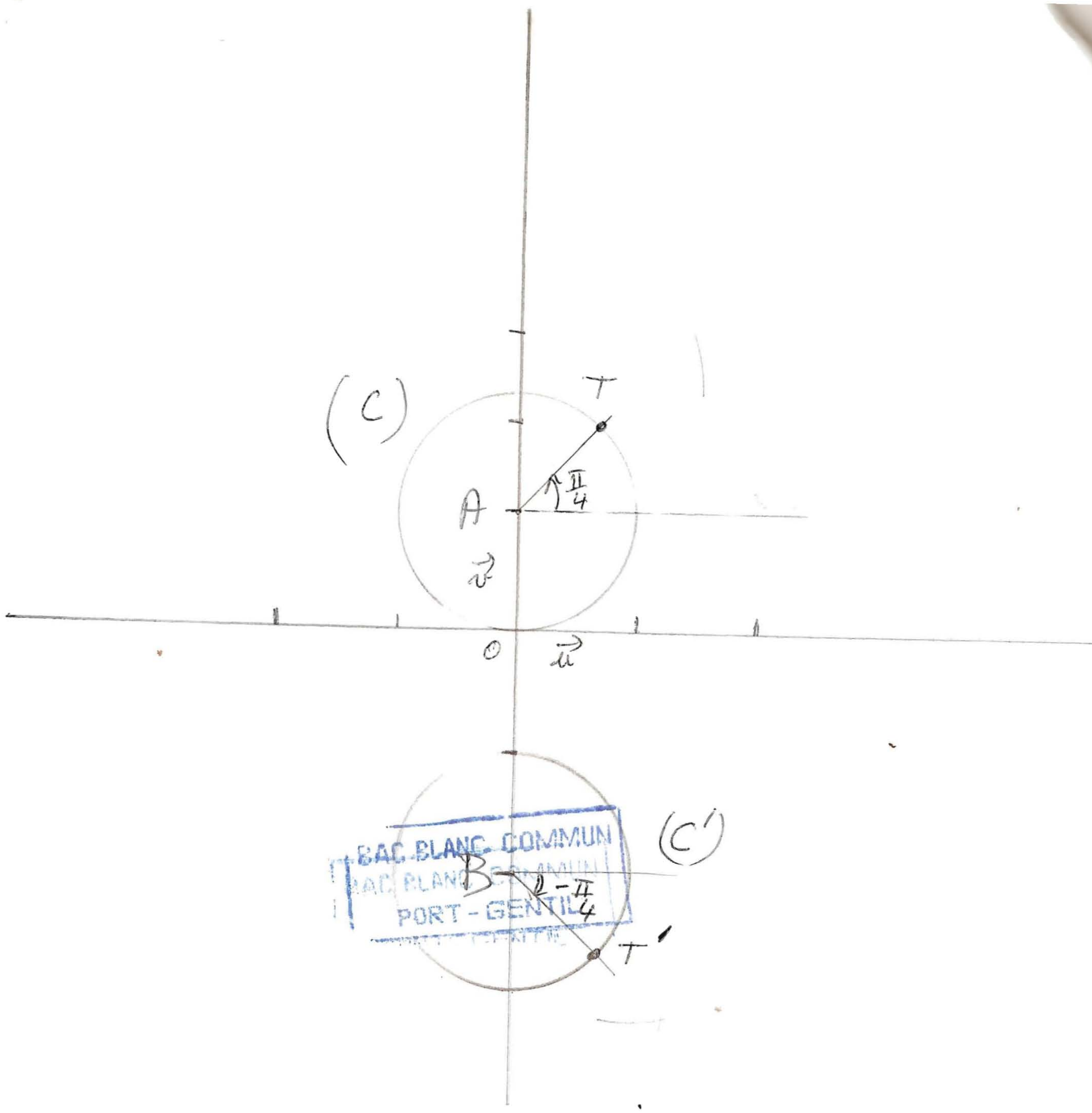
d'où $\boxed{(C') = f(C)}$

5° a) $z_{\vec{AT}} = z_T - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$AT = 1$ et $T \in (C)$.

b) $(\vec{u}, \vec{AT}) = \arg z_{\vec{AT}} = \frac{\pi}{4}$

c) $(\vec{u}, \vec{BT'}) = -\frac{\pi}{4}$ car $\theta' = -\theta$


(C)
T
$\frac{\pi}{4}$
A
$\vec{v}$
O
$\vec{u}$
(C')
B
$-\frac{\pi}{4}$
T'
BAC BLANC COMMUN
PORT - GENTIL

II

1° 10 non décl et 50 décl

a) on prend simultanément 5 sacs parmi 60 donc card $\Omega = C_{60}^{5} = 5461512$

Sous l'hyp. d'équiprob.

$$P(A) = \frac{C_{10}^{2} \times C_{50}^{3}}{C_{60}^{5}} = 0{,}2$$

b) $P(B) = 1 - \dfrac{C_{50}^{5}}{C_{60}^{5}} = 1 - \dfrac{2118760}{5461512}$

$P(B) = 0{,}61 \simeq \boxed{0{,}6}$

2° a) $X(\Omega) = \{0;\ 10.000;\ 20.000;\ 30.000\}$

Epreuve de Bernoulli répétée 3 fois avec $P(S) = P(B) = 0{,}6$ et $P(\bar{S}) = 0{,}4$

$P_k = C_3^k\, 0{,}6^k\, 0{,}4^{3-k}$

x_i	0	10.000	20.000	30.000
p_i	$0{,}4^3$ 0,064	$C_3^1\, 0{,}6 \times 0{,}4^2$ 0,432	$C_3^2\, 0{,}6^2 \times 0{,}4$ 0,288	$0{,}6^3$ 0,216

$\boxed{E(X) = 1~~8800~~}$ 17 000

b) $\boxed{P(X>0) = 0{,}936}$

PROBLEME

(A) $f(x) = 3x + 1 - x e^{x}$ $x \geq 0$

1) a) f est indef. déri sur $[0; +\infty[$ et

$f'(x) = 3 - (1+x)e^{x}$; $f''(x) = -(2+x)e^{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3 - (1+x)e^{x} = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} -(1+x)e^{x} = -\infty$

$x \geq 0$ $2 + x > 0$ et $-(2+x)e^{x} < 0$

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

c) f' est continue et strict. décr sur $[0; +\infty[$

donc f' est 1 bij de $[0; +\infty[$ sur $]-\infty; 2]$

or $0 \in]-\infty; 2]$ donc l'éq $f'(x) = 0$

admet 1 sol uniq $\alpha \in [0; +\infty[$,

de plus $f'(0{,}6) \simeq 0{,}08 > 0$

$f'(0{,}7) \simeq -0{,}4 < 0$

ainsi $\boxed{0{,}6 < \alpha < 0{,}7}$

f' est cont et str décr avec $f'(\alpha) = 0$

donc $f' > 0$ sur $[0; \alpha[$ et $f' < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(3 + \frac{1}{x} - e^{x}\right) = -\infty$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

on a $f(\alpha) > 0$

NB $f'(\alpha) = 0 \iff 3 - (1+\alpha)e^{\alpha} = 0 \iff e^{\alpha} = \dfrac{3}{1+\alpha}$

$f(\alpha) = 3\alpha + 1 - \dfrac{3\alpha}{1+\alpha} = \dfrac{3\alpha^2 + \alpha + 1}{1+\alpha} > 0$

2°) • f cont et st crois sur $[0; \alpha]$ et

$f[0; \alpha] = [1; f(\alpha)]$ or $0 \notin [1; f(\alpha)]$

et f ne s'annule pas sur $[0; \alpha]$

• f cont et str décr sur $[\alpha; +\infty[$ donc

f est 1 bij de $[\alpha; +\infty[$ dans $]-\infty; f(\alpha)]$

or $0 \in]-\infty; f(\alpha)]$, ainsi l'éq $f(x) = 0$

admet une seule sol $\beta \in [\alpha; +\infty[$.

De plus $[1; \frac{3}{2}] \subset [\alpha; +\infty[$ et

$f(1) \simeq\ > 0$ et $f(1{,}5) \simeq\ < 0$

donc $\boxed{1 < \beta < 3/2}$

3° a) $t > 0$

$$\int_0^t x e^{x}\,dx = [x e^{x}]_0^t - \int_0^t e^{x}\,dx = [x e^{x}]_0^t - [e^{x}]_0^t$$

$$= [(x-1)e^{x}]_0^t = (t-1)e^{t} + 1$$

$$I(t) = \int_0^t f(x)\,dx = \frac{3}{2}t^2 + t - 1 - (t-1)e^{t}$$

...est continue et positive sur $[0, \beta]$ donc $I(\beta)$ est l'aire en u.a. du domaine ... $M(x, y)$ tq $\begin{cases} 0 \le x \le \beta \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$.

B

1°a) $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in [1; \frac{3}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow 3x+1-xe^{x}=0 \Leftrightarrow 3+\frac{1}{x}=e^{x}$

$\Leftrightarrow \ln(3+\frac{1}{x}) = x$

d'où $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(3+\frac{1}{x}) = x$

Soit $h(x) = \ln(3+\frac{1}{x})$ $x \in [1; \frac{3}{2}]$

$x \mapsto 3+\frac{1}{x}$ deriv et str (+) sur $[1; \frac{3}{2}]$ donc h est derivable sur $[1; \frac{3}{2}]$ et $h'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}} < 0$

h est strict decr. sur $[1; \frac{3}{2}]$.

b) $\begin{cases} 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ h \searrow \end{cases} \Rightarrow h(\frac{3}{2}) \le h(x) \le h(1)$ or $h(\frac{3}{2}) \simeq \quad > 1$ et $h(1) \simeq \quad < \frac{3}{2}$

donc $h([1; \frac{3}{2}]) \subset [1; \frac{3}{2}]$.

c) $|h'(x)| = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}}$ $\quad 1 \le x \le \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \le x^2 \le \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{9} \le \frac{1}{x^2} \le 1$.

$1 \le x \le \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} \le \frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow \frac{11}{3} \le 3+\frac{1}{x} \le 4$

$\begin{cases} \frac{4}{9} \le \frac{1}{x^2} \le 1 \\ \frac{1}{4} \le \frac{1}{3+\frac{1}{x}} \le \frac{3}{11} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{9} \le \dfrac{\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}} \le \frac{3}{11} < \frac{1}{4}$

donc $\boxed{\forall x \in [1; \frac{3}{2}] \quad |h'(x)| \le \frac{1}{4}}$

h deriv sur $[1; \frac{3}{2}]$ et $|h'| \le \frac{1}{4}$ sur $[1; \frac{3}{2}]$

d'après l'IAF appliquée à x et $\beta \in [1; \frac{3}{2}]$

on a $|h(x) - h(\beta)| \le \frac{1}{4}|x-\beta|$ ainsi

avec $h(\beta) = \beta$ on a : $\boxed{|h(x) - \beta| \le \frac{1}{4}|x-\beta| \quad \forall x \in [1; \frac{3}{2}]}$.

2°/a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

notons P_n : $u_n \in [1; \frac{3}{2}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

• Si $n=0$ $u_0 = 1 \in [1; \frac{3}{2}]$ et P_0 vrai.

• Si $u_n \in [1; \frac{3}{2}]$ on a $u_{n+1} = h(u_n) \in [1; \frac{3}{2}]$ car $\forall x \in [1; \frac{3}{2}]$, $h(x) \in [1; \frac{3}{2}]$ donc P_{n+1} vrai.

d'où $u_n \in [1; \frac{3}{2}]$ $\forall n$.

b) avec $u_n \in [1; \frac{3}{2}]$ $\forall n$ on a

$|h(u_n) - \beta| \le \frac{1}{4}|u_n - \beta|$ or

$h(u_n) = u_{n+1}$ donc

$|u_{n+1} - \beta| \le \frac{1}{4}|u_n - \beta|$ $\forall n$

$|u_1 - \beta| \le \frac{1}{4}|u_0 - \beta|$

$|u_2 - \beta| \le \frac{1}{4}|u_1 - \beta|$

$\vdots$

$|u_n - \beta| \le \frac{1}{4}|u_{n-1} - \beta|$

tous les termes etant (+) par produit membre à membre et après simpl. on a :

$|u_n - \beta| \le (\frac{1}{4})^n |u_0 - \beta|$

$1 \le \beta \le \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \le -\beta \le -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le u_0 - \beta \le 0 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |u_0 - \beta| \le \frac{1}{2}$ et $|u_n - \beta| \le \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \beta| \le \frac{1}{2^{2n+1}}$

c) Il suffit que $\frac{1}{2^{2n+1}} \le 10^{-6} \Leftrightarrow (\frac{1}{2})^{2n+1} \le 10^{-6}$

$\Rightarrow (2n+1)\ln 0{,}5 \le \ln 10^{-6} \Rightarrow 2n+1 \ge \dfrac{\ln 10^{-6}}{\ln 0{,}5}$

$\Rightarrow n \ge -1 + \dfrac{\ln 10^{-6}}{2\ln 0{,}5}$ $\quad n \simeq 9$

on peut prendre $p = 9$ et u_9 est 1 val app de β à 10^{-6} près.

$u_9 \simeq 1{,}32325$

Ministère de l'EDUCATION NATIONALE
Province de l'OGOOUE MARITIME
PORT- GENTIL

BACCALAUREAT BLANC COMMUNAL

AVRIL 2007
Epreuve de MATHEMATIQUES
Série : D
Durée: 4 heures
Coef : 4

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère ortho normal $(o; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique: 2cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - i$ et $c = 1+i$.

1.a) Placer les points A, B et C sur une figure. 0,25

b) Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. 0,5

En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle. 0,25

2.a) On appelle r la rotation de centre A telle que r (B) = C. Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point D = r (C). 0,25 0,5

b) Soit Γ le cercle de diamètre [BC]. Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r. 0,25 + 0,25

3. Soit M un point de Γ d'affixe z distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.

a) Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};2\pi\right[$ tel que : $z = 1+e^{i\theta}$ 0,5

b) Exprimer z' en fonction de θ. 0,5

c) Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés. 0,25 + 0,25

d) Placer sur la figure le point M d'affixe $1+e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r. 0,25 + 0,25

Exercice 2 (5 points)

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante:

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.

Les trente cases , blanches(B), jaunes (J), vertes (V) ou rouges (R), ont toutes la même probabilité d'être atteintes.

2 Si la fléchette atteint une case rouge , le joueur gagne 8oofrancs.

4 Si la fléchette atteint une case verte , le joueur gagne 5oofrancs.

Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien .

Si la fléchette atteint une case blanche , le joueur perd a francs, la lettre a désigne un nombre réel positif .

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a) Donner la loi de probabilité de X. 0,5 + 1

b) Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance E(X) soit nulle. 0,75 + 0,25

7

2. Le joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a) Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne? 0,5

b) Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois? Exactement 5 fois? 0,75 + 0,75

c) Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite précédemment où le joueur joue 5 parties consécutives indépendantes? 0,5

Problème (10 points)

Partie A - Etude d'une fonction g

1,75

On considère la fonction g définie sur IR par: $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Déterminer la fonction dérivée de g. 0,25
2. Résoudre $g'(x) > 0$ 0,25
3. En déduire le tableau de variations de g (l'étude des limites n'est pas demandée). 0,5
4. Après avoir calculé g(0), donner le signe de g pour $x \in IR$. 0,25 + 0,25 + 0,25

Partie B - Etude de la fonction f

6

On considère la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = x + \frac{x+2}{e^x}$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,25 + 0,25

2.a. On appelle f ' la fonction dérivée de f, calculer f '(x) et vérifier que pour tout x:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}.$$ 0,5 + 0,25

b. Dresser le tableau de variations de f. 0,25 + 0,25

3.a. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à (C) au point d'abscisse 0. 0,5

b. On pose u(x) = f(x) - x . Déterminer la limite de u(x) en $+\infty$ et interpréter 0,25 + 0,25
soit Δ : y = x
graphiquement le résultat obtenu.

c. Calculer les coordonnées du point d'intersection de Δ et (C). 0,25

d. Montrer qu'il existe un point A et un seul de (C) en lequel la tangente T_2 à (C) est parallèle à Δ. (On précisera les coordonnées de A). 0,75

4. a. Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet dans l'intervalle [-2; -1] une solution et une seule α. 0,75

b. Montrer que $-1{,}69 \leq \alpha \leq -1{,}68$. 0,25

Construire dans le repère les tangentes T_1, T_2, la droite Δ et la courbe (C).
0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,5

PARTIE C - Calcul d'aire

2,25

1.a. Soit la fonction H définie sur IR par $H(x) = -(x+1)e^{-x}$.

Montrer que H est une primitive sur IR de la fonction h, définie par $h(x) = xe^{-x}$. 0,25 + 0,25

b. En déduire une primitive de f. 0,5

2.a. Calculer, en unités d'aire, en fonction de α, l'aire de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $x = \alpha$, la droite d'équation $x = 0$, l'axe des abscisses et la courbe (C). 0,25 + 0,25

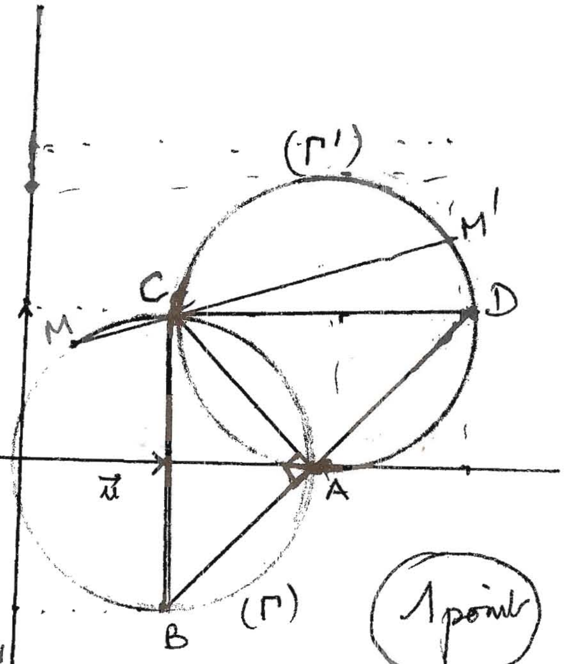
b. En déduire une valeur approchée, à 10^{-1} près, de l'aire, en cm^2, de cette partie du plan. (On prendra - 1,69 comme valeur approchée de α)./. 0,25

1ère frimi

CORRIGE DU BAC BLANC COMMUNAL - AVRIL 2007

Exercice 1

1°) a) Placement des points A, B, C sur la figure.



1 point

b) Calcul de $\dfrac{c-a}{b-a}$

On a : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{1+i-2}{1-i-2} = \dfrac{-1+i}{-1-i} = \dfrac{(-1+i)^2}{(-1-i)(-1+i)}$

$= \dfrac{1-2i-1}{2} = -\dfrac{2i}{2} = -i$

$\boxed{\dfrac{c-a}{b-a} = -i}$ (0,5)

Déduisons que ABC est un triangle rectangle isocèle

* $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = |-i| = 1$ or $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB}$

On déduit que $AC = AB$: ABC est isocèle en A

* $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

or $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \operatorname{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $[2\pi]$. Donc $\operatorname{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ d'où le triangle ABC est rectangle en A.

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} AC = AB \\ \operatorname{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{array} : \text{ABC est un triangle rectangle et isocèle en A}}$

(1)

2°) a) r = rotation de centre A et d'angle telle que $r(B) = C$.

Déterminons l'angle de r et calcul de l'affixe d du point $D = r(C)$

D'après la question 2. b) :

$AB = AC$ et $\operatorname{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$: Alors la rotation de centre A telle que $r(B) = C$ est une rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.. (0,25)

$D = r(C)$ donc : $d - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-a)$

$d - 2 = -i(1+i-2)$

$d = 1 + i + 2 = 3+i$

d'où $\boxed{\text{l'affixe de D est } d = 3+i}$ (0,5)

2°) b) Γ est un cercle de diamètre $[BC]$. Déterminons
l'image Γ' de Γ par r

• Si Γ' est l'image du Cercle Γ de diamètre $[BC]$, alors
0,25 d'après la question précédente : $r(B)=C$ et $r(C)=D$:
l'image de Γ par la rotation r est le Cercle de diamètre $[CD]$.
(Voir Construction sur la figure).

3°) ~~a)~~ $M'(z')$ image de $M(z)$ par r.

a) Montrons qu'il existe un réel $\theta \in [0;\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};2\pi[$ tel que $z=1+e^{i\theta}$.

Γ est le Cercle de diamètre $[BC]$. Son centre est un point E d'affixe e, milieu de $[BC]$ et son rayon $R=\frac{1}{2}BC$.

On a : $e=\frac{b+c}{2}=\frac{1+i+1-i}{2}=1$

$R=\frac{1}{2}BC=\frac{|c-b|}{2}=\frac{|1+i-1+i|}{2}=\frac{|2i|}{2}=1$

alors $M\in\Gamma$ si et seulement si $EM=1$

soit $|z-e|=1$

soit $|z-1|=1$.

Or tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous
0,5 la forme : $e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0;2\pi[$. or $M\neq C$ $z-1\neq i$ soit $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ et on conclut que si $M(z)\neq C$ est un point de Γ, alors il existe un réel $\theta\in[0;\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};2\pi[$ tel que $z=1+e^{i\theta}$

b) expression de z' en fonction de θ.

M' est image de M par r d'où :

$$z'-a=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-a)$$

$$z'-2=-i(1+e^{i\theta}-2)$$

0,5 $$\boxed{z'=2+i-ie^{i\theta}}$$

c) Montrons que $\frac{z'-c}{z-c}$ est un réel :

$$\frac{z'-c}{z-c}=\frac{2+i-ie^{i\theta}-1-i}{1+e^{i\theta}-1-i}=\frac{1-ie^{i\theta}}{e^{i\theta}-i}=\frac{(1-ie^{i\theta})\overline{(e^{i\theta}-i)}}{(e^{i\theta}-i)\overline{(e^{i\theta}-i)}}=\frac{(1-ie^{i\theta})(e^{-i\theta}+i)}{|e^{i\theta}-i|^2}$$

0,5 $$=\frac{e^{-i\theta}+i-i+e^{i\theta}}{|e^{i\theta}-i|^2}=\frac{e^{-i\theta}+e^{i\theta}}{|e^{i\theta}-i|^2}=\frac{2\cos\theta}{|e^{i\theta}-i|^2}\in\mathbb{R}.$$

2 feuille

CORRECTION BAC BLANC 2007

Exercice 1 suite :

3°/ c) $\frac{z'-c}{z-c} = \frac{2\cos\theta}{|e^{i\theta}-i|} \in \mathbb{R}$ d'où $\arg\left(\frac{z'-c}{z-c}\right) = 0\ [\pi]$

0,5

or $\arg\left(\frac{z'-c}{z-c}\right) = \text{mes}(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'})$ d'où

$\boxed{\text{mes}(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}) = 0\ [\pi]}$ donc ; C, M et M' sont alignés.

d) Construction sur la figure.

Exercice 2 :

1) a. Les valeurs prises par la variable aléatoire sont.

$-a$; 0 ; 500 ; 800

Loi de probabilité de X.

x_i	$-a$	0	500	800
$P(X=x_i)$	$\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$	$\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$	$\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$	$\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$

1,5

* $P(X=-a)$: Probabilité d'atteindre une case blanche. Or il y a 18 cases blanches sur 30 cases au total. Donc

$$P(X=-a) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

* $P(X=0)$: atteindre une case jaune : Il y a 6 cases jaunes.

$$P(X=0) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

* $P(X=500)$: atteindre une case verte : 4 cases sont vertes.

$$P(X=500) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

* $P(X=800)$: atteindre une case rouge : 2 cases sont rouges.

$$P(X=800) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

On a bien : $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{15}{15} = 1$

b) Espérance mathématique de X

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i = -a\times\frac{3}{5} + 0\times\frac{1}{5} + 500\times\frac{2}{15} + 800\times\frac{1}{15}$$

$$= -\frac{3a}{5} + \frac{1000}{15} + \frac{800}{15} = \frac{-9a+1800}{15} = \frac{-3a+600}{5}$$

1

$E(X) = 0 \iff \frac{-3a+600}{5} = 0 \to \boxed{a = 200}$

2°) a). La probabilité p pour qu'un joueur gagne est:

$$p = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \boxed{\frac{1}{5} = p}$$ (0,5)

b) Le joueur joue 5 parties consécutives indépendants:
On reconnait un schéma de Bernouilli avec $n=5$ et $p=\frac{1}{5}$

* La probabilité qu'un joueur gagne exactement 2 fois est:

$$P = C_5^2 \times p^2(1-p)^3 = \frac{5!}{2!\,3!} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{25} \times \frac{64}{125}$$

$$P = \frac{128}{625} \simeq 0,2048. \quad \boxed{P \simeq 0,2048}$$ (0,75)

* La probabilité qu'un joueur gagne exactement 5 fois est:

$$P' = C_5^5 P^5 = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{3125} \simeq 3,2.10^{-4}$$

$$\boxed{P' = 3,2.10^{-4}}$$ (0,75)

c) Nombre moyen de parties gagnants:

Le nombre moyen de parties gagnantes est l'espérance de la loi binomiale: $E(X) = np$

$$= 5 \times \frac{1}{5}$$
$$= 1$$ (0,5)

Un joueur, en jouant 5 fois gagne donc en moyenne une partie

PROBLEME:

PARTIE A: Etude d'une fonction g.

$g(x) = e^x - x - 1$

1°) fonction dérivée de g.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivable:

$$\boxed{g'(x) = e^x - 1}$$ (0,25)

2°) Résoudre $g'(x) > 0$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

3e feuille

CORRECTION BAC COMMUNAL 2007

Problème suite

2°) $g'(x) > 0$ a pour solution $S =]0\,; +\infty[$ (0,5)

3°) Tableau de variation de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$		$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(0,5)

4°) $g(0) = 0$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$
le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est 0 donc : $\boxed{g(x) \geq 0}$ (0,5)

PARTIE B

$$f(x) = x + \frac{x+2}{e^x}$$

1°) limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{x+2}{e^x}\right)$$

(0,25)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+2}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(x+2) = -\infty \end{array}\right\} \text{Donc } \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

(0,25)

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{e^x} = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2°) a) Calcul de f'.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 + \left(\frac{1\times e^x - e^x(x+2)}{e^{2x}}\right) = 1 + \frac{e^x(1-x-2)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x - xe^x - 2e^x}{e^{2x}} = \frac{-xe^x - e^x + e^{2x}}{e^{2x}} = \frac{e^x(e^x - x - 1)}{e^{2x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x - x - 1}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}}$$ (0,5)

b) Tableau de variation de f.

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $e^x > 0$ d'où $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

0,25

0,5

3°) a/ Equation de la tangente T_1 à (C) en 0

$$y = f(0) + f'(0)x$$

$$f(0) = 2 \; ; \; f'(0) = 0$$

d'où : $\boxed{T_1 : y = 2}$ 0,5

b/ $u(x) = f(x) - x = \dfrac{x+2}{e^x}$

0,75 on a $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}\right) = 0$: On déduit que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

c) Coordonnées du point d'intersection de Δ et (C)

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff \frac{x+2}{e^x} = 0 \Rightarrow x+2 = 0$$

$$x = -2$$

Le point d'intersection K de Δ et (C) a pour coordonnés

0,5 $\boxed{K(-2 ; -2)}$

d) Un point A où la tangente T_2 à (C) est parallèle à Δ.

T_2 et Δ sont parallèles lorsqu'elles ont même coefficient directeur : $f'(x_0) = 1 \iff \dfrac{e^{x_0} - x_0 - 1}{e^{x_0}} = 1 \iff e^{x_0} - x_0 - 1 = e^{x_0}$

$\iff -x_0 - 1 = 0 \iff -x_0 = 1 \iff x_0 = -1$: $f(-1) = -1 + \dfrac{-1+2}{e^{-1}}$

$= -1 + e$

Il existe donc un seul point A où $T_2 // \Delta$.

0,5 $\boxed{A(-1 ; -1+e)}$

4°) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-2 ; -1]$

4ème feuille

CORRECTION BAC COMMUNAL 2007

dont ou deni stricto.

4. a) f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc croissante sur $[-2;-1]$: On a : $f(-2) = -2 < 0$

$$f(-1) = -1 + \frac{-1+2}{e^{-1}} = -1 + \frac{1}{e^{-1}} = -1 + e > 0$$

(0,5)

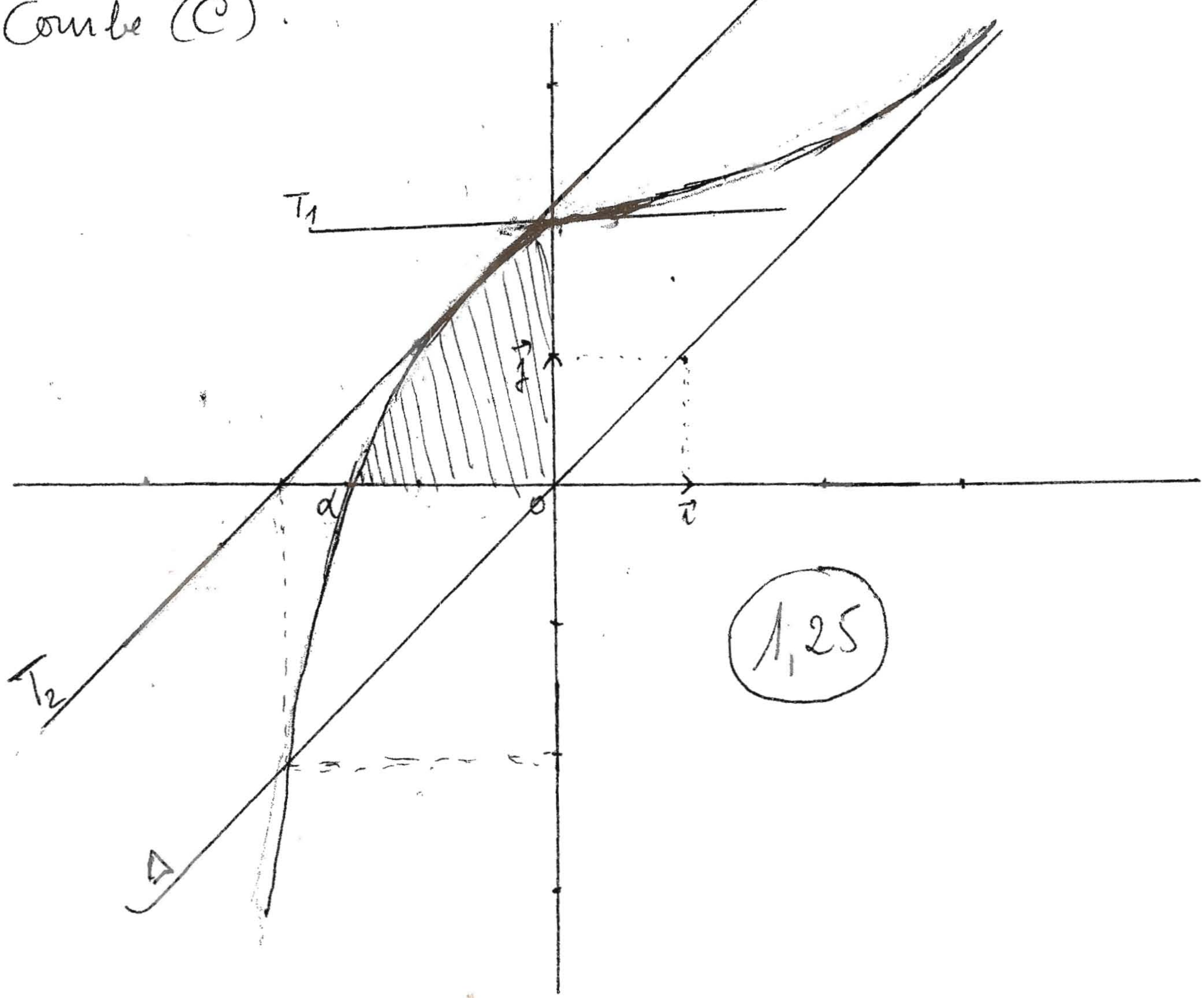
on a donc : $\left.\begin{array}{l} f(-2) = -2 < 0 \\ f(-1) = -1+e > 0 \end{array}\right\}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $\alpha \in [-2;-1]$ tel que $f(\alpha)=0$

b) Montrons que $-1{,}69 \leq \alpha \leq -1{,}68$

(0,5)

on a : $\left.\begin{array}{l} f(-1{,}69) \simeq -0{,}009 < 0 \\ f(-1{,}68) \approx 0{,}037 > 0 \end{array}\right\}$ Donc : $-1{,}69 \leq \alpha \leq -1{,}68$

Courbe (C).



(1,25)

PARTIE C

1°. a. H est la fonction / $H(x) = -(x+1)e^{-x}$

Montrons que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $h / h(x) = xe^{-x}$.

Ceci est vrai si $H'(x) = h(x)$

$$H'(x) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x}$$
$$= e^{-x}(-1+x+1)$$
$$= e^{-x}x$$

0,25

$H'(x) = xe^{-x} = h(x)$ d'où H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

b) Primitive de f.

$$f(x) = x + \frac{x+2}{e^x} = x + (x+2)e^{-x} = x + xe^{-x} + 2e^{-x}$$

la primitive de f est la fonction F définie par:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - (x+1)e^{-x} - 2e^{-x}$$
$$= \frac{x^2}{2} - xe^{-x} - e^{-x} - 2e^{-x}$$
$$= \frac{x^2}{2} - xe^{-x} - 3e^{-x}$$

0,5

$$\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} - (x+3)e^{-x}}$$

2°) a) Calcul d'aire

Cette aire est $\mathcal{A} = \int_\alpha^0 f(x)\,dx \text{ U.A.} = \left[\frac{x^2}{2} - (x+3)e^{-x}\right]_\alpha^0$

1

$$\boxed{\mathcal{A} = \left(-3 - \frac{\alpha^2}{2} + (\alpha+3)e^{-\alpha}\right) \times 4\text{ cm}^2}$$

b)

$$\boxed{\mathcal{A} \approx 10,7\text{ cm}^2}$$

0,5

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION DELEGUEE D'ACADEMIE
DE L'OGOOUE MARITIME

REPUBLIQUE GABONAISE
****
Union -- Travail – Justice

CRW / DELTA / LJAA / LTB
DE PORT - GENTIL

BAC BLANC COMMUNAL
Avril 2008

Epreuve de **MATHEMATIQUES**
Série : **D**
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

EXERCICE 1 (4 points)

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher,2 boules blanches et 6 boules rouges.
Un joueur tire simultanément 2 boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ? 0,25
2. On considère les événements suivants :
   A « obtenir 2 boules blanches » et B « n'obtenir aucune boule blanche » 1,5
   Calculer, sous forme de fraction irréductible, les probabilités p(A) et p(B) des événements A et B.
   En déduire la probabilité de l'événement : C « obtenir une seule boule blanche »
3. Lors d'un tel tirage :
   Si le joueur tire 2 boules blanches, il gagne 1000F ;
   S'il ne tire aucune boule blanche, il perd 200F ;
   S'il tire une seule boule blanche, il garde celle-ci, remet l'autre dans l'urne et reprend alors au hasard une seule boule dans l'urne ; si cette dernière est blanche, il gagne 500F, sinon il perd 100F
   a) Déterminer les valeurs possibles du gain. 0,25
   b) Montrer que la probabilité d'avoir un gain de 500F est $\frac{3}{49}$. 0,75
   c) Donner la loi de probabilité associée aux valeurs du gain. 0,5
   d) En déduire l'espérance mathématique de cette loi arrondie au centième. Interpréter celle-ci. 0,75

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 5cm.
Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1.$$

1 1. Justifier que f est une similitude directe plane dont on précisera le centre Ω, le rapport k et l'angle θ

2. On note A_0 le point O et pour tout entier naturel n, on pose : $A_{n+1} = f(A_n)$.
   1,25 a) Déterminer les affixes des points A_1, A_2 et A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.
   b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite
   0,75 géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
   0,25 c) A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?
3. a) Quelle est la nature du triangle ΩA_0A_1 ?
   0,75 En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle ΩA_nA_{n+1}.
   b) Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 . . . A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + . . . A_{n-1}A_n$.
   1 Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

PROBLEME (11 points)

Soit f la fonction f définie sur l'intervalle [0 ;+∞[par $f(x) = x^2 - 3 + 3e^{\frac{-1}{3}x}$.

On note (***C***) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, I, J) ; unité graphique : 2cm.

Partie A **:** ***Etude de la fonction*** f **.**

1. a) Calculer la dérivée f' de f. 0,5

   b) Etudier le sens de variation de f' et calculer la limite de f' en +∞. 0,5+0,25

   c) Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $f'(\alpha) = 0$ et montrer que $0,4 \leq \alpha \leq 0,5$. 0,5+0,25

   d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ;+∞[. 0,25

2. a) Déterminer la limite de f en +∞. 0,25

   b) Déterminer le signe de $[f(x) - (x^2 - 3)]$ et sa limite en +∞. 0,25+0,25
   Interpréter graphiquement ce résultat. On note (P) la courbe d'équation $y = x^2 - 3$. 0,25

3. a) Dresser le tableau de variation de f. 0,25

   b) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution non nulle β et une seule appartenant à l'intervalle [α ;+∞[et montrer que $0,8 \leq \beta \leq 0,9$. 0,5 +0,25

   c) Etudier le signe de $f(x)$ sur [0 ;+∞[. 0,5

4. Tracer dans le repère (O, I, J) les courbes (P) et (***C***). 0,5 +0,75
   On précisera la tangente à (***C***) au point d'abscisse 0.

Partie B : **Approximation de la solution β de $f(x) = 0$.**

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I = [0,8 ; 0,9] par : $g(x) = x - f(x)$

1. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$. 0,25

   b) Calculer $g'(x)$. Etudier le sens de variation de g'. 0,25 + 0,75

   c) En déduire qu'il existe un nombre a et un seul de l'intervalle I tel que g'(a) = 0. 0,25

   d) Montrer que pour tout $x \in$ [a ; 0,9], $|g'(x)| \leq 6 \times 10^{-2}$, puis que pour tout $x \in$ I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{5}$,.
   0,25 0,25

2. a) Etudier les variations de g sur I. 0,5

   b) Calculer g (0,8) et g (0,9). 0,25

   En utilisant l'inégalité des accroissements finis prouver que : $|g(0,9) - g(a)| \leq 6 \times 10^{-3}$. 0,25

   En déduire que g(a) ∈ I. 0,25

   c) Prouver que pour tout $x \in$ I, $g(x)$ appartient aussi à I. 0,5

   d) Montrer que pour tout $x \in$ I, $|g(x) - \beta| \leq \frac{1}{5}|x - \beta|$. 0,25

3. Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_0 = 0,8$.

   a) Montrer que pour tout n ∈ IN, $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{5}|u_n - \beta|$. 0,25

   b) Montrer que pour tout n ∈ IN, $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{5^n}$. 0,5

   c) En déduire la limite de la suite (u_n). 0,25

Corrigé Bac Blanc 2008 Serie D

I

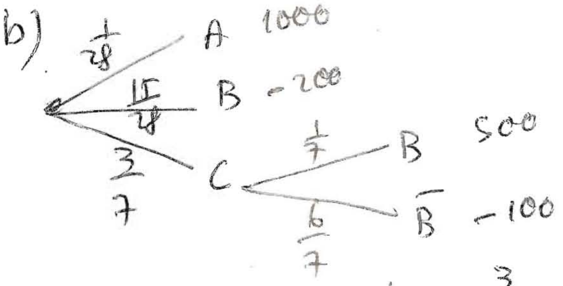
1° On prend simultanément 2 boules parmi 8 donc $\text{card}\,\Omega = C_8^2 = 28$

2° $P(A) = \frac{C_2^2}{28} = \frac{1}{28}$ $\quad P(B) = \frac{C_6^2}{28} = \frac{15}{28}$

$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{16}{28} = \frac{3}{7}$

3° a) $X(\Omega) = \{-200\,;\,-100\,;\,500\,;\,1000\}$

b)



$P(X=500) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{49}$

c)

x_i	-200	-100	500	1000	T
P_i	$\frac{15}{28}$	$\frac{18}{49}$	$\frac{3}{49}$	$\frac{1}{28}$	1

d) $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i = -\frac{3800}{49} \simeq -77{,}55$ à 10^{-2} près.

Le joueur perd en moy 77,55 F par partie.

II

$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$
$M \mapsto M'$ tq $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$

1° L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \neq 0$.

donc f est la similitude directe du plan de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe

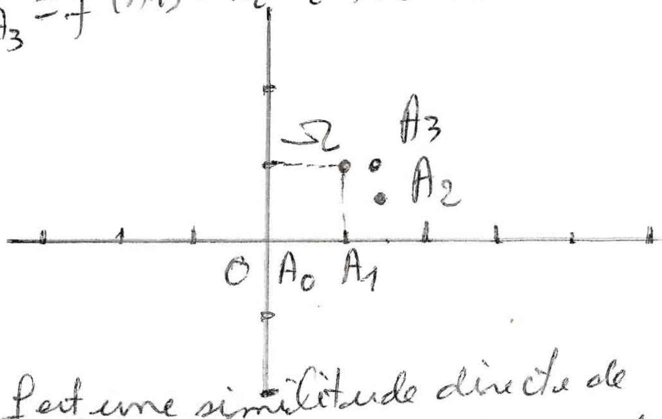
$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} = 1+i$.

2° $A_{n+1} = f(A_n)$

a) $z_{A_0}' = f(0) = 1$ donc $z_{A_1} = 1$

$z_{A_2} = f(A_1) = f(1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_{A_3} = f(A_1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 1 = \frac{3}{2} + i$



b) f est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui transforme le segment $[\Omega A_n]$ en $[\Omega A_{n+1}]$ donc

$\Omega A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\Omega A_n \iff u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_n$

ainsi la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $u_0 = \Omega A_0 = \Omega O = |-\omega| = |\omega| = |1+i| = \sqrt{2}$

d'où $u_n = u_0 q^n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ou encore $\boxed{u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$ $A_n \in \mathcal{D}(\Omega, 0{,}1) \iff \Omega A_n \leq 0{,}1 \iff \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0{,}1 \iff \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \frac{0{,}1}{\sqrt{2}} \iff n \ln\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \ln\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{2}}\right)$

$\iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{2}}\right)}{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}} \simeq 7{,}6$ donc $n_0 = 8$ et $\forall n \geq 8$ $A_n \in \mathcal{D}($

3° a) $\frac{z_\Omega - z_{A_1}}{z_{A_0} - z_{A_1}} = \frac{1+i-1}{-1} = -i$ et alors

$\begin{cases} A_1A_0 = A_1\Omega \\ (\overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{A_1\Omega}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ donc le triangle $\Omega A_0 A_1$ est isocèle et rectangle en A_1.

de m̂ le $\Delta\ \Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle et rectangle en A_{n+1}.

b) avec $d_n = A_nA_{n+1}$ on a $d_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} d_n$

comme (U_n) la suite (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $d_0 = A_0A_1 = OA_1 = 1$

$\ell_n = d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}$

$= d_0 \dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$\boxed{\ell_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)}$$

$0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ $\quad \lim \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2+\sqrt{2}}$$

Problème

$x \in [0, +\infty[$ $\quad f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-\frac{1}{3}x}$

Partie A

1° a) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geq 0$ $f'(x) = 2x - e^{-\frac{1}{3}x}$

b) f' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geq 0$ $f''(x) = 2 + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} > 0$ et f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{3}x} = 0$

Tableau de variation de f'

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	-1	↗	$+\infty$

c) f' est continue et strict. croiss sur $[0, +\infty[$ donc f' est 1 bij de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$, or $0 \in [-1, +\infty[$ donc l'éq. $f'(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0, +\infty[$.

de plus $f'(0,4) \simeq -0,07 < 0$ donc
$f'(0,5) \simeq 0,19 > 0$

$$\boxed{0,4 < \alpha < 0,5}$$

d) f' est stri ↗ et $f'(\alpha) = 0$ donc sur $[0, \alpha[$ $f' < 0$ et sur $]\alpha, +\infty[$ $f' > 0$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

2 a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} x^2 - 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} 3e^{-\frac{1}{3}x} = 0$

b) $f(x) - (x^2 - 3) = 3e^{-\frac{1}{3}x} > 0$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) - (x^2-3) = \lim\limits_{+\infty} 3e^{-\frac{1}{3}x} = 0$

donc (P) est 1 courbe asymptote à (C).

3 a)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

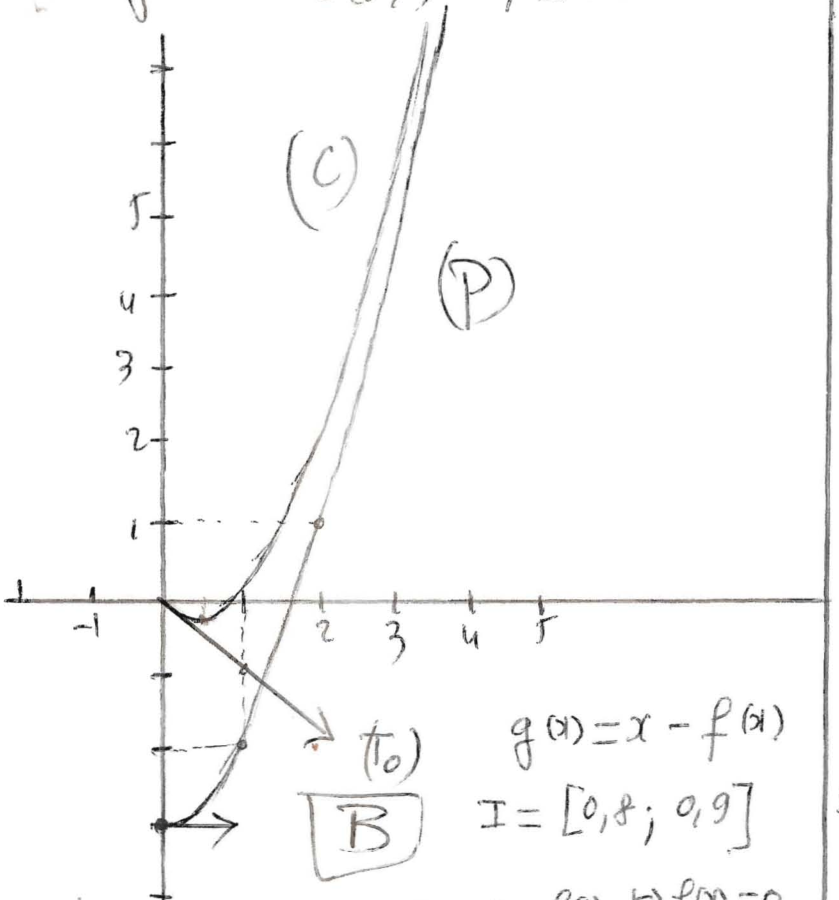
b) f est dérivable et strict croissante sur $[\alpha, +\infty[$ donc f est une bij de $[\alpha, +\infty[$ sur $[f(\alpha); +\infty[$ or $0 \in [f(\alpha); +\infty[$ car $f(\alpha) < 0$ donc l'eq $f(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in [\alpha, +\infty[$, de plus $\beta > 0$ car $\alpha > 0$.

De plus $f(0,8) \simeq -0,062 < 0$ et $0,8 < \beta < 0,9$
$f(0,9) \simeq 0,032 > 0$

c) Signe de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$.

- Sur $[0, \alpha]$ $f(x) \leq 0$ car $f(\alpha) < 0$
- f est croissante sur $[\alpha, +\infty[$ et $f(\beta) = 0$ donc sur $[\alpha, \beta]$ $f(x) \leq 0$ et sur $[\beta, +\infty[$ $f(x) \geq 0$ donc sur $[0, \beta]$ $f \leq 0$
sur $[\beta, +\infty[$ $f \geq 0$.

Tangente en $O(0;0)$ $y = -x$



$g(x) = x - f(x)$

$\boxed{B}$ $I = [0,8 ; 0,9]$

1°) a) $g(x) = x \iff x = x - f(x) \iff f(x) = 0$

b) g est dérivable sur I et $g'(x) = 1 - f'(x)$

g' est dérivable sur I et $g''(x) = -f''(x) < 0$ car $f''(x) > 0$ donc g' est strictement décrois.

x	0,8		0,9
g''		$-$	
g'	0,165	$\searrow$	$-0,055$

c) g' est dérivable et strict décrois sur I ~~et~~ $g'(0,8) \times g'(0,9) < 0$ donc l'équation $g'(x) = 0$ admet dans I une seule solution a.

d) g' continue et décroissante sur I donc sur $[a ; 0,9] \subset I$ et

$a \leq x \leq 0,9 \Rightarrow g'(0,9) \leq g'(x) \leq g'(a)$

$-0,055 \leq g'(x) \leq 0 \Rightarrow -0,06 \leq g'(x) \leq 0,06$

et alors $|g'(x)| \leq 6 \times 10^{-2}$ $\forall x \in [a ; 0,9]$.

g' décroissante sur $I = [0,8 ; 0,9]$

$0,8 \leq x \leq 0,9 \Rightarrow g'(0,9) \leq g'(x) \leq g'(0,8)$

$\Rightarrow -0,055 \leq g'(x) \leq 0,165 \leq 0,2$

$\Rightarrow -0,2 \leq -0,055 \leq g'(x) \leq 0,2$.

$\Rightarrow -0,2 \leq g'(x) \leq 0,2$ donc $|g'(x)| \leq 0,2$

avec $0,2 = \frac{1}{5}$ on a : $\forall x \in I$ $|g'(x)| \leq \frac{1}{5}$

2a) Variation de g sur I.

g' décroissante sur I avec $g'(a) = 0$ donc sur $[0,8 ; a]$ $g' > 0$ et sur $[a ; 0,9]$ $g' < 0$. Ainsi g est croissante sur $[0,8 ; a]$ et g décroissante sur $[a ; 0,9]$.

b) $g(0,8) \simeq 0,862$ et $g(0,9) \simeq 0,868$

g est dérivable sur $[a ; 0,9]$ et $\forall x \in [a ; 0,9]$ $|g'(x)| \leq 6 \times 10^{-2}$ d'après l'IAF appliquée à g sur $[a ; 0,9]$ on a :

$|g(0,9) - g(a)| \leq 6 \times 10^{-2} |0,9 - a|$

$\leq 6 \times 10^{-2} |0,9 - 0,8|$

$\leq 6 \times 10^{-2} \times 10^{-1}$ donc

$|g(0,9) - g(a)| \leq 6 \times 10^{-3}$

on a aussi $|g(a) - g(0,9)| \leq 6 \times 10^{-3}$ donc.

$-0,006 \leq g(a) - g(0,9) \leq 0,006$

$-0,006 + g(0,9) \leq g(a) \leq 0,006 + g(0,9)$

$-0,006 + 0,868 \leq g(a) \leq 0,006 + 0,868$

$0,862 \leq g(a) \leq 0,874$.

$g(a) \in [0,862 ; 0,874] \subset I$ donc

$\boxed{g(a) \in I}$

c) g continue et croissante sur $[0,8 ; a]$ et $g([0,8 ; a]) \subset I$

• g continue et décroissante sur $[a ; 0,9]$ et $g[a ; 0,9] \subset I$

donc $g(I) \subset I$ et $\forall x \in I$ on a $g(x) \in I$.

d) g est dérivable sur I et $|g'| \leq \frac{1}{5}$ sur I, d'après l'IAF appliquée à x et β éléments de I

on a : $|g(x) - g(\beta)| \leq \frac{1}{5}|x-\beta|$

avec $g(\beta) = \beta$ on a :

$|g(x) - \beta| \leq \frac{1}{5}|x-\beta| \quad \forall x \in I$

3°a) avec $u_n \in I$ on a.

$|g(u_n) - \beta| \leq \frac{1}{5}|u_n - \beta|$

or $g(u_n) = u_{n+1}$ donc

$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{5}|u_n - \beta|$.

b) au rang 0 $\quad |u_1 - \beta| \leq \frac{1}{5}|u_0 - \beta|$

au rang 1 $\quad |u_2 - \beta| \leq \frac{1}{5}|u_1 - \beta|$

$\vdots$

au rang n $\quad |u_n - \beta| \leq \frac{1}{5}|u_{n-1} - \beta|$

tous les termes étant positifs par produit membre à membre et après simplification on a :

$|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n |u_0 - \beta|$

$0,8 \leq \beta \leq 0,9 \Rightarrow$

$-0,9 \leq -\beta \leq -0,8$

$-0,1 \leq u_0 - \beta \leq 0 \leq 0,1.$

$|u_0 - \beta| \leq \frac{1}{10}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^n |u_0 - \beta| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

d'où $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \forall n$

c) $0 < \frac{1}{5} < 1 \quad \lim \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

et $\lim u_n = \beta$.

BAC BLANC n° 1 Avril 2009
Epreuve de MATHEMATIQUES

Série : D
Durée : 4h
Coeff : 4

EXERCICE 1 **(4 points)**

Un lapin met au monde une portée de 9 lapereaux comportant :2 lapereaux noirs, 3 lapereaux blancs et 4 lapereaux tachetés

I) Six lapereaux s'échappent ensemble.
On suppose que chaque lapereau a la même envie et la même probabilité de prendre la clef des champs.
1°) De combien de façons un groupe de 6 lapereaux peut-il s'échapper ?
2°) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « Aucun lapereau blanc ne fait partie du groupe des échappés »
B : « Un seul lapereau blanc s'est échappé »
C : « Deux lapereaux blancs exactement se sont échappés »
D : « Trois lapereaux blancs exactement font partie du groupe des échappés »
E : « Tous les tachetés et exactement un noir font partie du groupe des échappés »

II) Les six lapereaux s'échappent l'un après l'autre sans qu'aucun ne soit retrouvé.
Calculer la probabilité de l'événement F : « Au moins un lapereau blanc fait partie du groupe des échappés »

III) Dans le contexte I), on définit la variable aléatoire X qui, à chaque groupe de six lapereaux échappés, associe le nombre de lapereaux blancs qui en font partie.
1°) Déterminer la loi de probabilité de X.
2°) Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat.

EXERCICE 2 **(5 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ d'unité graphique 2cm.

1°) (E) est l'équation $z \in \mathbb{C}$, $z^3-(7+5i)z^2+(4+25i)z+12-30i=0$.
a) Montrer que (E) admet une solution réelle α et une solution imaginaire pure $i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.
b) Déterminer la troisième solution de (E).

2°) A, B et C désignent les points d'affixes respectives : 2, $3i$ et $5+2i$;
r est la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{-\pi}{2}$; t est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe -2 ;
F est la transformation plane d'écriture complexe : $z'=\left(\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\right)z+2i$, où $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.
a) Faire une figure et placer les points A, B, C.
b) Donner l'écriture complexe de r.
c) Montrer que r(B) = C.
d) Déterminer la nature exacte du triangle ABC.

3°) a) Montrer que l'écriture complexe de tor est $z'=-iz+2i$.
b) Montrer que $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}=-i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. En déduire le module et l'argument principal de $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.
c) Quelle est alors la nature de F ? Préciser ses éléments caractéristiques.

On suppose maintenant et dans la suite que : $\theta=\frac{\pi}{2}$.

4°) a) Vérifier alors que F = tor et caractériser F.
b) Déterminer l'affixe du point E = t(C). Compléter tor(A) = . . . et tor(B) = . . .

5°) a) Déterminer et construire l'image (Γ′) par F du cercle (Γ) de diamètre [AB].
b) Déterminer une équation de l'image $(\mathscr{C}')$ par F de la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y=e^x$.

PROBLEME (11 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2cm et (Γ) désigne la représentation graphique dans ce repère, de la fonction numérique f définie sur IR par :
$$\begin{cases} f(x) = (2x+1)e^{\frac{-1}{x}}, & si \quad x \neq 0. \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Partie A :

1°) a) *Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$.

*f est-elle continue en 0 ? à gauche en 0 ? à droite en 0 ?

b) f est-elle dérivable à gauche en 0 ? Justifier la réponse.

c) Vérifier que pour tout x de IR* : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{2}{e^{\frac{1}{x}}} + \dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$. En déduire que f est dérivable à droite en 0.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2°) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x-1$ est une asymptote à (Γ).

3°) Etudier le sens de variation de f et en donner le tableau de variation.

4°) Construire avec soin (D) et (Γ) en précisant la demi tangente à droite au point O à (Γ).

Partie B :

k désigne la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$: par $k(x) = f(x) - x$.

1°) a) Calculer $k'(x)$ puis $k''(x)$ et vérifier que pour tout $x > 0$, $k''(x) = \dfrac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^4}$.

b) Etudier les variations de k'.

c) En déduire que l'équation $k'(x) = 0$ admet une solution unique β dans $\left]0;\frac{3}{4}\right[$.

d) En déduire le signe de k'.

2°) a) En déduire les variations de k.

b) Calculer les limites de k en 0 et en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de k.

c) En déduire que l'équation $x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $\left]\frac{3}{4};1\right[$.

3°) Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f(x) = x$ équivaut à $\dfrac{1}{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)} = x$.

4°) Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{1}{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}$.

a) Déterminer $h'(x)$ et montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{[h(x)]^2}{x(2x+1)}$.

b) En déduire le sens de variation de h sur $]0\,;+\infty[$.

c) Montrer que pour tout x de $I = \left[\frac{3}{4};1\right]$, on a $h(x) \in I$.

d) Montrer que pour tout x de I, $\dfrac{1}{3\left[\ln\left(\frac{10}{3}\right)\right]^2} \le h'(x) \le \dfrac{8}{15(\ln 3)^2}$.

e) En déduire que pour tout x de I, $|h'(x)| \le 0{,}45$.

f) Montrer que pour tout x de I, $|h(x)-\alpha| \le 0{,}45|x-\alpha|$.

Inspection Déléguée d' Académie
De l'Ogooué Maritime

Département de Mathématiques

République Gabonaise
Union - Travail - Justice

BAC BLANC

SESSION DE Mai 2009

Epreuve de Mathématiques

Série D Durée :4h Coefficient: 4

EXERCICE 1 (6 points)

Cet exercice comporte deux parties indépendantes

I) On donne le polynôme P définie par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$, puis démontrer qu'il existe un polynôme du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que pour tout z de C on ait $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$
2. Résoudre dans C, $P(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté à un repère ortho normal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$; $z_D = \bar{z}_C$

Puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Puis déterminer la nature du triangle BEC

II) Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe –i.
Soit f la fonction définie sur $C - \{i\}$ par : $f(z) = \dfrac{1 - iz}{z - i}$

1. Vérifier que pour tout z de $C - \{i\}$, $f(z) = -i + \dfrac{2}{z - i}$
2. **a)** Démontrer que –i n'a pas d'antécédent par f.
   b) Déterminer les antécédents de 0 et de i par f.
3. A tout point M différent de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z)$
   a) Démontrer que pour tout point M différent de A, le produit des longueurs AM et BM' est égal à 2 (AM.BM'=2).
   b) Démontrer que lorsque M décrit le cercle C de centre A et de rayon 4, M' se déplace sur un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.
   c) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que f(z) soit imaginaire pur non nul

EXERCICE 2 (4 points)

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

...s une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club de théâtre. Le club photo est composé de ...membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

...n note $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A et $p(A/B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant ...e B est réalisé.

1. On interroge un élève de la classe au hasard.

On appelle F l'évènement « l'élève fait partie du club photo » et T « l'élève fait partie du club théâtre ».

Montrer que les évènements F et T sont indépendants.

. Lors d'une séance de photo, les 10 membres sont tous présents.

...n premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a) On appelle T_1 l'évènement « le premier élève appartient au club de théâtre ».

Calculer $p(T_1)$

b) On appelle T_2 l'évènement « l'élève pris en photo appartient au club théâtre »

Calculer $p(T_2/T_1)$ puis $p(T_2/\overline{T_1})$. En déduire $p(T_2 \cap T_1)$ et $p(T_2 \cap \overline{T_1})$. (on pourra éventuellement utiliser un arbre.)

c) Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club de théâtre est 0,2

3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

...lculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

PROBLEME (10 points)

Le but de ce problème est l'étude et la représentation graphique de la fonction f définie sur IR par :

si $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$ et $f(0) = 0$.

Partie A

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$

1. a. Déterminer les limites de h en 0 et en $+\infty$.

b. Dresser le tableau de variation de h

2. En remarquant que $h(2) \succ e$; montrer que qu'il existe dans $]0,1[$ un unique réel α tel que $h(\alpha) = h(2)$

Vérifier que $0,40 \prec \alpha \prec 0.41$.

Partie B :

On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = (2-x)e^x - 2$

1. **a.** Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Dresser le tableau de variation de g en indiquant en particulier $g(0)$.
2. En déduire l'existence d'un unique réel β non nul tel que $g(\beta) = 0$
3. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x
4. **a.** Montrer que $1 \prec \beta \prec 2$
   b. Montrer que $h(2-\beta) = h(2)$; où h est la fonction définie dans la **partie A**
   c. En déduire que $\beta = 2-\alpha$ et donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}

Partie C

On note (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère ortho normal $(O;\vec{i},\vec{j})$
Unité graphique 2cm.

1. Montre que la fonction f est dérivable en 0 et préciser la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Vérifier que, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-x}}$ En déduire la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation géométrique du résultat.
3. Pour tout $x \neq 0$, montrer que $f'(x) = \dfrac{x}{\left(e^x - 1\right)^2} g(x)$, g est la fonction de la **partie B**
   Dresser alors le tableau de variation de f.
5. Dans ce qui suit, on note (D) la courbe représentative de la fonction définie sur IR qui chaque x associe $-x^2$
   a) Calculer $f(x) + x^2$
   b) En déduire la position de (C) et de (D)
   c) Montrer que la limite $f(x) + x^2$ lorsque x tend vers $-\infty$ est 0 et donner une interprétation géométrique du résultat.
6. Tracer sur le même graphique les courbes (C), (D) et la droite (T) tangente à (C) au point d'abscisse 0.

Serie D

(1)

Exercice 1

I 1° $P(i\sqrt{3}) = 0 \quad P(-i\sqrt{3}) = 0$

$P(z) = (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3})(z^2 - 6z + 21)$

$P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$

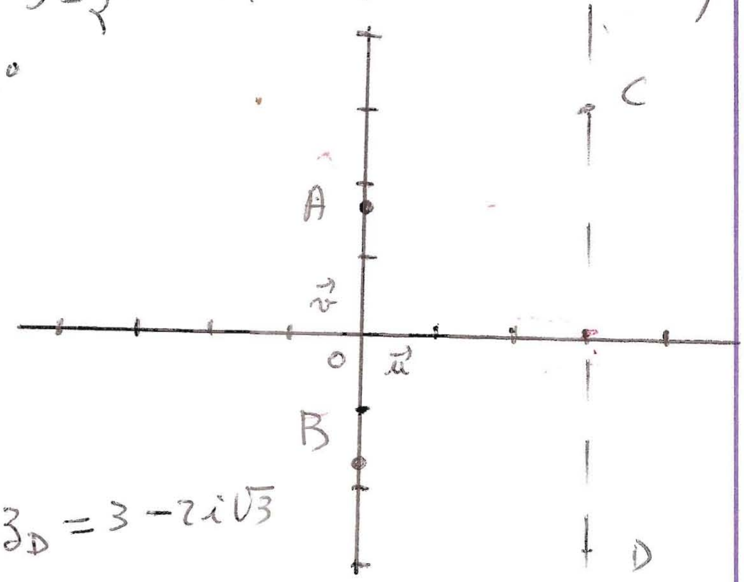
2° $z^2 - 6z + 21 = 0 \quad \Delta = -48 = (4i\sqrt{3})^2$

$z = 3 + 2i\sqrt{3} \quad z = 3 - 2i\sqrt{3}$

$P(z) = 0$ on a

$S = \{-i\sqrt{3}; i\sqrt{3}; 3 + 2i\sqrt{3}; 3 - 2i\sqrt{3}\}$

3°



$z_D = 3 - 2i\sqrt{3}$

4

$|z_A - 3| = |z_B - 3| = |z_C - 3| = |z_D - 3| = 2\sqrt{3}$

donc A, B, C et D $\in \mathcal{C}(\Omega(3); 2\sqrt{3})$.

4° $E = S_O(D)$ on a $z_E = -3 + 2i\sqrt{3}$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}} = \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{2i\frac{\pi}{3}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

donc $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}) = -\frac{\pi}{3}$ et $BC = BE$ donc

BEC est 1 triangle equilatéral.

II $z \neq i$

$$f(z) = \frac{1 - iz}{z - i} = \frac{-i(z + i)}{z - i} = \frac{-i(z - i)}{z - i} + \frac{-i(2i)}{z - i} = -i + \frac{2}{z - i}$$

donc $f(z) = -i + \frac{2}{z - i}$

2° a) $f(z) = -i \Leftrightarrow -i + \frac{2}{z - i} = -i \Leftrightarrow \frac{2}{z - i} = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$ absurde donc $-i$ n'a pas d'antécédent.

b) $f(z) = 0 \Leftrightarrow i - iz = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = -i}$

$-i$ est l'antéc. de 0 par f.

$f(z) = i \Leftrightarrow -i + \frac{2}{z - i} = i \Leftrightarrow z - i = -i$

$\Leftrightarrow \boxed{z = 0}$ 0 est l'antécé de i par f.

3° a) $M(z)$, $M'(z')$ $z' = -i + \frac{2}{z - i}$

$z' + i = \frac{2}{z - i} \Leftrightarrow |z' + i| = \frac{2}{|z - i|} \Leftrightarrow$

$|z' + i||z - i| = 2 \Leftrightarrow BM' \times AM = 2$

b) $M \in (C) = \mathcal{C}(A, 4) \Leftrightarrow AM = 4$

$\Leftrightarrow BM' \times 4 = 2 \Leftrightarrow BM' = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}(B; \frac{1}{2})$

c) $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1 - iz}{z - i} = -\frac{1 + i\bar{z}}{\bar{z} + i}$

$\Leftrightarrow (1 - iz)(\bar{z} + i) = -(z - i)(1 + i\bar{z})$

$\Leftrightarrow \bar{z} + i - iz\bar{z} + z = -z + iz\bar{z} + i - \bar{z}$

$\Leftrightarrow \bar{z} + z = -(z + \bar{z})$

$\Leftrightarrow 4x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ M $\in$ l'axe des adonnés

III

1° $P(F) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ $\quad P(T) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

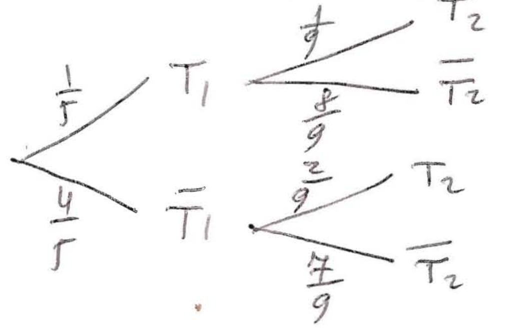
$P(F \cap T) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

$P(F) \times P(T) = P(F \cap T)$ donc

F et T sont indépendants.

2 a) $P(T_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

b)



$P(T_2/T_1) = \frac{1}{9}$ $\quad P(T_2/\overline{T_1}) = \frac{2}{9}$

$P(T_2 \cap T_1) = P(T_1) \times P(T_2/T_1)$
$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$

$P(T_2 \cap \overline{T_1}) = P(\overline{T_1}) \times P(T_2/\overline{T_1})$
$= (1 - \frac{1}{5}) \times \frac{2}{9} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$

c) $P(T_2) = P(T_2 \cap T_1) + P(T_2 \cap \overline{T_1})$
$= \frac{1}{45} + \frac{8}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$

$P(T_2) = 0,2$

3° soit P_0 " au bout des 4 sem. aucun membre du club Th ".

$P_0 = (1 - 0,2)^4 = 0,8^4$

$\boxed{P_0 = 0,4096}$

Problème (2)

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

$\boxed{A}$ $x \in]0; +\infty[$ $\quad h(x) = \frac{e^x}{x}$

1° a - $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{0} e^x = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

b - $h'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = (x-1)\dfrac{e^x}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

sur $]0; 1[$ $\quad h \searrow$

$]1; +\infty[$ $\quad h \nearrow$.

$\forall x > 1$. $\quad h(x) > h(1) \Rightarrow h(x) > e$.

avec $2 > 1$ on a $h(2) > e$.

2° h est dériv et str $\searrow$ sur $]0;1[$

h réalise une bijectᵒ de $]0;1[$ sur $]e; +\infty[$. or $h(2) \in]e; +\infty[$

donc il existe un réel α uniq tq $h(\alpha) = h(2)$ $\cdot h(2) \simeq 3,69$

$h(0,40) \simeq 3,72 > h(2)$

$h(0,41) \simeq 3,67 < h(2)$

$0,4 < \alpha < 0,41$.

Partie B

③

$g(x) = (2-x)e^{x} - 2$

1°a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{-\infty} (2-x)e^{x} - 2 =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x} - xe^{x} - 2 = -2$ car $e^{x} \to 0$, $xe^{x} \to 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ car $2-x \to -\infty$, $e^{x} \to +\infty$

b) $g'(x) = -e^{x} + (2-x)e^{x} = (1-x)e^{x}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
g'		$+$			0	$-$	
g	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	$-\infty$

• g est déri et stri $\nearrow$ sur $]-\infty;1[$ et $g(0)=0$ donc 0 est l'uniq sol. de l'éq $g(x)=0$ sur $]-\infty;1]$.

• g est déri et stri $\searrow$ sur $[1;+\infty[$ donc g réal. 1 bij de $[1;+\infty[$ sur $]-\infty; e-2]$, or $0 \in]-\infty; e-2]$ d'où l'éq $g(x)=0$ admet 1 sol. uniq β non nul sur $[1;+\infty[$ car $0 \notin [1;+\infty[$.

En conclusion l'éq $g(x)=0$ admet 1 seule sol. non nul dans $\mathbb{R}$.

$g \nearrow$ sur $]-\infty;1]$ et $g(0)=0$ donc sur $]-\infty;0[$ $g<0$ et sur $]0;1[$ $g>0$.

$g \searrow$ sur $[1;+\infty[$ et $g(\beta)=0$ donc sur $[1;\beta]$ $g>0$ et sur $[\beta;+\infty[$ $g<0$.

x	$-\infty$		0		β		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	0	$-$	

4a) $g(1) = e-2>0$ $\quad g(2) = -2<0$

donc $\boxed{1 < \beta < 2}$

b) $h(2-\beta) = \dfrac{e^{2-\beta}}{2-\beta} = \dfrac{e^{2}}{(2-\beta)e^{2}}$

or $(2-\beta)e^{\beta} = 2$ car $g(\beta)=0$

donc $\dfrac{e^{2}}{(2-\beta)e^{\beta}} = \dfrac{e^{2}}{2} = h(2)$

et $\boxed{h(2-\beta) = h(2)}$

c) $1<\beta<2 \Rightarrow -2<-\beta<-1$

$0<2-\beta<1$ et $h(2-\beta)=h(2)$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2-\beta}$ car α est l'uniq sol. de l'éq $h(x)=h(2)$ sur $]0;1[$ d'où $\boxed{\beta = 2-\alpha}$

or $0{,}4 < \alpha < 0{,}41$

$-0{,}41 < -\alpha < -0{,}4$

$2-0{,}41 < 2-\alpha < 2-0{,}4$

$1{,}59 < \beta < 1{,}6$

Partie C

(4)

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1° $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$.

f est dériv en 0 et $f'(0) = 1$ et

(C) admet au point d'abs. 0

la droite (T) $y = x$ comme tang.

2 a - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $e^x - 1 \to -1$
$x^2 \to +\infty$.

b - $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} = \dfrac{x^2}{e^x(1 - \frac{1}{e^x})} = \dfrac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

donc $f(x) = \dfrac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim_{+\infty} x^2 e^{-x} = 0 \\ \lim_{+\infty} -e^{-x} = 0 \end{cases}$

L'axe des absc est ASY à (C) en $+\infty$.

3° $f'(x) = \dfrac{x(2-x)e^x - 2x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{x\left[(2-x)e^x - 2\right]}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{x\, g(x)}{(e^x - 1)^2}$

	$-\infty$	0		β	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$+V$ de f

x	$-\infty$	0		β	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	0	↗	$f(\beta)$	↘ 0

5° a) (D) $y = -x^2$

a) $f(x) + x^2 = \dfrac{x^2 e^x}{e^x - 1}$.

b)

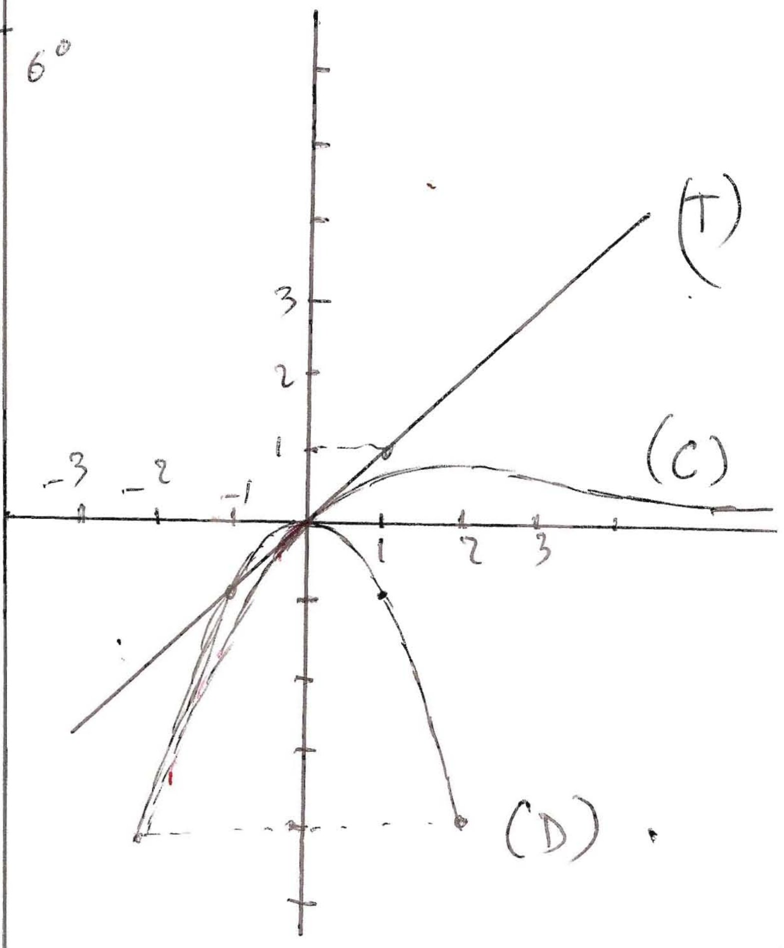
x		0	
$e^x - 1$	$-$	0	$+$

sur $]-\infty ; 0]$ (C) au dessous de (D)

sur $[0 ; +\infty[$ (C) au dessus de (D).

c) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 e^x}{e^x - 1} = 0$ donc (D) est un courb asy à (C).

6°



MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION DELEGUEE D'ACADEMIE
DE L'OGOOUE MARITIME
PORT - GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
****
Union – Travail – Justice

BAC BLANC COMMUNAL Avril 2010
Epreuve de **MATHEMATIQUES**

Série : **D**
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

EXERCICE I (4 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 10.
On tire simultanément 4 boules de l'urne.

1- Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2- Soit X la variable aléatoire : ''nombre de boules portant un numéro impair parmi les 4 boules tirées''. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart-type.
3- On considère la variable Y égale au plus grand numéro obtenu en effectuant le tirage simultané de 4 boules.
   a- Déterminer la loi de probabilité de Y
   b- En déduire que : $C_3^3+C_4^3+C_5^3+C_6^3+C_7^3+C_8^3+C_9^3=C_{10}^4$
4- Soit A l'évènement « le plus grand numéro obtenu est supérieur ou égal à 7 »
   a- Calculer $P(A)$
   b- Un joueur tire n fois les 4 boules, quelle est la probabilité P_n pour que l'évènement A se réalise au moins une fois.
   c- Déterminer les valeurs de n pour lesqelles $P_n > 0,99$.

EXERCICE II (4 points)

1- Montrer que l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe $z=x+iy$ (ou x et y sont des réels) vérifie que la relation : $(2+3i)z+(-2+3i)\overline{z}-12i=0$ (1) est une droite (D) que l'on déterminera par une équation cartésienne et aussi par un point et un vecteur directeur. Représenter cette droite dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, l'unité graphique étant 1 cm.
2- Montrer qu'il existe un seul réel z_0 et un seul imaginaire pur z_1 qui vérifie la relation (1). Calculer z_0 et z_1.
3- Soit E et F les points du plan complexe d'affixes respectives $-\frac{4}{3}i$ et $4+\frac{4}{3}i$.
   Montrer que la droite (D) est médiatrice du segment du segment [EF].
4- Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation $\left|-\frac{4}{3}i-z\right|=\left|4+\frac{4}{3}i-z\right|$
5- Déterminer et représenter sur le graphique précédent l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $\arg\left(\frac{-4i-3z}{12+4i-3z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

PROBLEME (12 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x^2-3\left(1-e^{\frac{-x}{3}}\right)$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A : Etude de la fonction f

1°) Sens de variation de la fonction f'

a) Calculer f' et f''

b) Etudier le sens de variation de f' et calculer la limite de f' quand x tend vers $+\infty$.

c) Déduire de ce précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $f'(\alpha) = 0$ et montrer que $0,4 \leq \alpha \leq 0,5$.

d) Etudier le signe de f' sur $[0 ; +\infty[$

2°) <u>Comportement asymptotique de f en $+\infty$</u>

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) On note (P) la courbe d'équation $y = x^2 - 3$.

Déterminer le signe de $[f(x) - (x^2 - 3)]$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3°) <u>Signe de f</u>

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique non nulle **a** appartenant à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$ et montrer que $0,8 \leq \mathbf{a} \leq 0,9$.

c) Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

4°) <u>Tracé de la courbe (C)</u>

Tracer les courbes (C) et (P) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Préciser la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

<u>Partie B</u> : Approximation de la solution a de l'équation $f(x) = 0$ par une suite

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $I = [0,8 ; 0,9]$ par : $g(x) = x + 3 - x^2 - 3e^{\frac{-x}{3}}$.

Ainsi, la solution **a** de l'équation $f(x) = 0$ est aussi l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

1°) <u>Etude de la fonction g'</u>

a) Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$. Etudier le sens de variation de g' sur I.

b) Calculer $g'(0,8)$ et $g'(0,9)$. En déduire qu'il existe un nombre β et un seul de l'intervalle I tel que $g'(\beta) = 0$.

Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[\beta ; 0,9]$, $|g'(x)| \leq 6\times10^{-3}$, puis que pour tout x de I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{5}$.

2°) <u>Etude de la fonction g</u>

a) Etudier les variations de g sur I.

b) Calculer $g(0,8)$ et $g(0,9)$. Prouver que $|g(0,9) - g(\beta)| \leq 6\times10^{-3}$ et en déduire que $g(\beta) \in I$.

c) Prouver que, pour tout x de I, $g(x)$ appartient aussi à I.

d) Montrer que, pour tout x de I, $|g(x) - a| \leq \frac{1}{5}|x - a|$.

3°) <u>Etude d'une suite d'approximation de a.</u>

Soit (u_n) la suite d'éléments de I, définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_0 = 0,8 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{5}|u_n - a|$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

d) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de **a** à 10^{-3} près.

Calculer u_p.

BACCALAUREAT BLANC – FEVRIER 2011

MATHEMATIQUES

SERIE: D

DUREE: 4heures

COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 4pts

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules blanches. Un jour a le choix entre les deux jeux suivants

Jeu numéro 1 : le joueur tire simultanément 2 boules de l'urne ;

Jeu numéro 2 : le jour tire successivement avec remise 2 boules de l'urne

Les deux jeux obéissent à la règle suivante :

- si les deux boules sont rouges, il perd 300 francs.
- si les deux boules sont blanches, il perd 100 francs.
- Si les deux boules sont de couleurs différentes, le joueur gagne 400 francs.

On appelle **X** et **Y** respectivement les variables aléatoires donnant le gain algébrique du joueur pour le **jeu numéro 1** et le **jeu numéro 2**.

1°) Donner les lois de probabilité de **X** et de **Y** et déterminer leur espérance mathématique 1,25 × 2 0,5 × 2

2°) Quel est le jeu le plus avantageux économiquement pour le joueur ? 0,5

EXERCICE2 5pts

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique $1cm$.

1°) On considère les points A,B,C et D d'affixes respectives $z_A = 4+i$, $z_B = 1+i$, $z_C = 5i$ et $z_D = -3-i$

Placer ces points dans le repère. 0,25 × 4

2°) Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1+2i)z - 2 - 4i$.

a) Préciser les images des points A et B par f. 0,25 × 2

b) Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω. 0,5

c) Donner la nature de f. 0,25+0,25

3°) a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a : $z'-z=-2i(2-i-z)$. 0,5

b) En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MM'})$. 0,5 0,5

c) Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$? 0,25

d) Soit E le point d'affixe $z_E=-1-i\sqrt{3}$. Ecrire z_E sous forme exponentielle, puis placer le point E' associé au point E. 0,5 0,5

PROBLEME 11pts 9

On considère la fonction f de IR vers IR définie par $f(x)=-\ln\left|e^{x}-1\right|$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité graphique $1cm$.

Partie A 5,25

1°) Justifier que l'ensemble de définition de f est : $E=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$. 0,25

2°) Calculer les limites aux bornes de E. 0,25×4

3°) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. Df f' Sens TV 0,25+0,25+0,5+0,25

4°) a) Démontrer que la droite (D) d'équation : $y=-x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$. 0,5

b) Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D) sur $\left]0;+\infty\right[$. 0,5

c) Achever l'étude des branches infinies de $(\mathscr{C})$. 0,25×2

d) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D). 0,75+0,25

Partie B 3,75

Soit h la restriction la restriction de f à l'intervalle $K=\left]0;+\infty\right[$.

5°) Démontrer que h est une bijection. 0,5

6°) On désigne par g la bijection réciproque de h et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative.

a) Tracer $(\mathscr{C}')$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$. ~~0,75~~

6°) On désigne par g la bijection réciproque de h et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative.

a) Tracer $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$. 0,5+0,25

b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité E' de g. 0,5

c) Etablir que pour tout x appartenant à E' : $g'(x) = \dfrac{-1}{1+e^{x}}$. 0,5

d) Démontrer que, pour tout x élément de $]0;+\infty[$ $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$. 0,5

e) En déduire que, pour tous éléments a et b de $]0;+\infty[$ on a : $|g(a)-g(b)| \leq \dfrac{1}{2}|a-b|$. 0,5

Partie C 2,5

On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \in IN$ par : $\begin{cases} U_0 = \ln 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$.

7°) Démontrer que pour tout n de IN, $U_n > 0$. 0,5

8°) On pose : $\alpha = \ln(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$. Démontrer que $g(\alpha) = \alpha$. 0,5

9°) Démontrer que pour tout n appartenant à IN :

a) $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$ 0,5

b) $|U_n - \alpha| \leq (\dfrac{1}{2})^n |U_0 - \alpha|$. 0,5

10°) En déduire que la suite (U_n) converge vers α. 0,5

Bac blanc LJAA Serie D 2017

I 1°

0,25 x_i	-300	-100	400
1 P_i	$\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{10}{28}$	$\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$	$\frac{C_5^1\times C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$

0,25 y_i	-300	-100	400
1 P_i	$\frac{5^2}{8^2}$	$\frac{3^2}{8^2}$	$\frac{2(5\times 3)}{8^2}$

0,5 $E(X)=\frac{-3000}{28}-\frac{300}{28}+\frac{6000}{28}=\frac{2700}{28}=\frac{675}{7}$

0,5 $E(Y)=\frac{-7500}{64}-\frac{900}{64}+\frac{12000}{64}=\frac{3600}{64}=\frac{450}{8}=\frac{225}{4}$

2°) le gain moyen de X est $E(X)\simeq 96,42$
le gain moyen de Y est $E(Y)\simeq 56,25$
0,5 $E(X)>E(Y)$ donc le jeu n°1 est plus avantageux.

II 1° Voir figure 1

2° f : $z'=(1+2i)z-2-4i$

a) $z'_A=(1+2i)z_A-2-4i=5i=z_C$ 0,25

$z'_B=(1+2i)z_B-2-4i=-3-i=z_D$ 0,25 D·

donc $f(A)=C$ et $f(B)=D$

b) $f(M)=M \Leftrightarrow z'=z \Leftrightarrow (1+2i)z-2-4i=z$

$\Leftrightarrow (1+2i)z-z=2+4i \Leftrightarrow 2iz=2+4i$

$\Leftrightarrow z=\frac{1+2i}{i}=2-i$ solut uniq

f admet un unique point invariant Ω d'affixe $2-i$. 0,5

c) L'écriture complexe de f est de la forme $z'=az+b$ avec $a=1+2i\neq 0$ donc f est une similitude directe du plan. 0,25

3° a)

$z'-z=(1+2i)z-2-4i-z=2iz-2-4i$

donc $\boxed{z'-z=-2i(2-i-z)}$ 0,5

b) $|z'-z|=2|2-i-z|$

$MM'=2\Omega M$ et $\frac{MM'}{\Omega M}=2$ 0,5

de plus avec

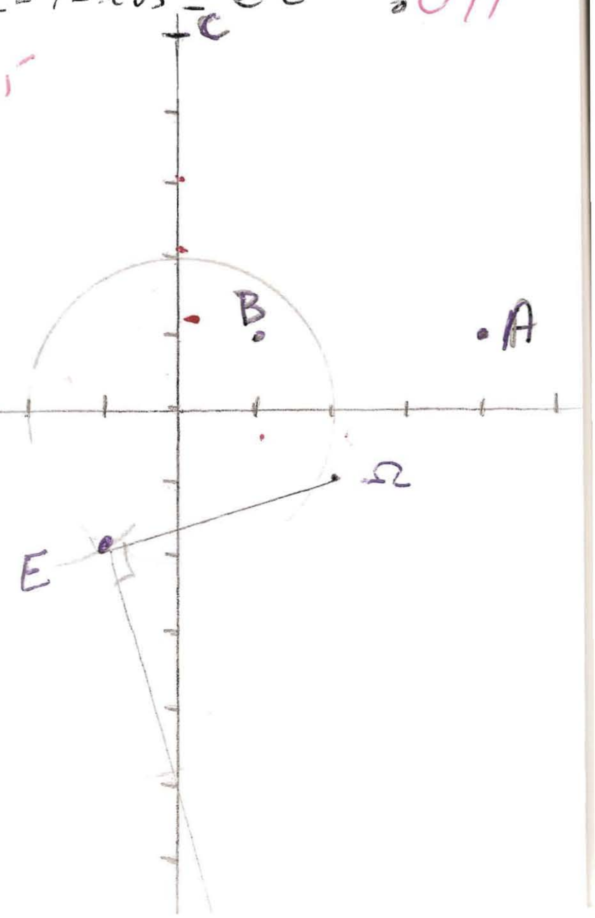
$\frac{z'-z}{2-i-z}=-2i$ on a $\arg\left(\frac{z'-z}{2-i-z}\right)=-\frac{\pi}{2}$ 0,5

donc $(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MM'})=-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

c) $\overrightarrow{M\Omega}\perp\overrightarrow{MM'}$ et le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M. 0,25

d) $z_E=-1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. 0,5

E: 0,25



Problème

$f(x) = -\ln|e^{x}-1|$ 0,5

1°) $x \in D_f$ ssi $e^{x}-1 \neq 0 \Leftrightarrow e^{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

donc $D_f = \mathbb{R}-\{0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

2° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ 0,75 car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ 0,5 car $\begin{cases} \lim\limits_{0} |e^{x}-1| = 0 \ (+) \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ 0,75 car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty \end{cases}$

3° la fonction $x \mapsto e^{x}-1$ derivable et 0,75 non nulle sur D_f donc f est derivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}$ 0,75

$e^{x}>0$ $f'(x)$ est de signe de $-(e^{x}-1) = 1-e^{x}$

$1-e^{x} \geq 0 \Leftrightarrow -e^{x} \geq -1 \Leftrightarrow e^{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

$-\infty$	0	$+\infty$
$+$	$\|$	$-$

0,75

f est croissant sur $]-\infty;0[$ f est decroissant sur $]0;+\infty[$ 0,75

Tableau de variat. de f 0,5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \ \| \ +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4° a) (D) $y=-x$ $f(x)-y = x-\ln|e^{x}-1|$

$f(x)-y = x-\ln e^{x}|1-e^{-x}| = x-x-\ln|1-e^{-x}|$

$f(x)-y = -\ln|1-e^{-x}|$ et $\lim\limits_{+\infty} -\ln|1-e^{-x}| = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-x} = 1$ donc (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$. 0,5

b) Position de (C) par rapport à (D) sur $]0;+\infty[$

$f(x)-y = -\ln|1-e^{-x}| \geq 0 \Leftrightarrow \ln|1-e^{-x}| \leq 0$

$\Leftrightarrow |1-e^{-x}| \leq 1 \Leftrightarrow |e^{-x}-1| \leq 1 \Leftrightarrow$

$-1 \leq e^{-x}-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq e^{-x} \leq 2$

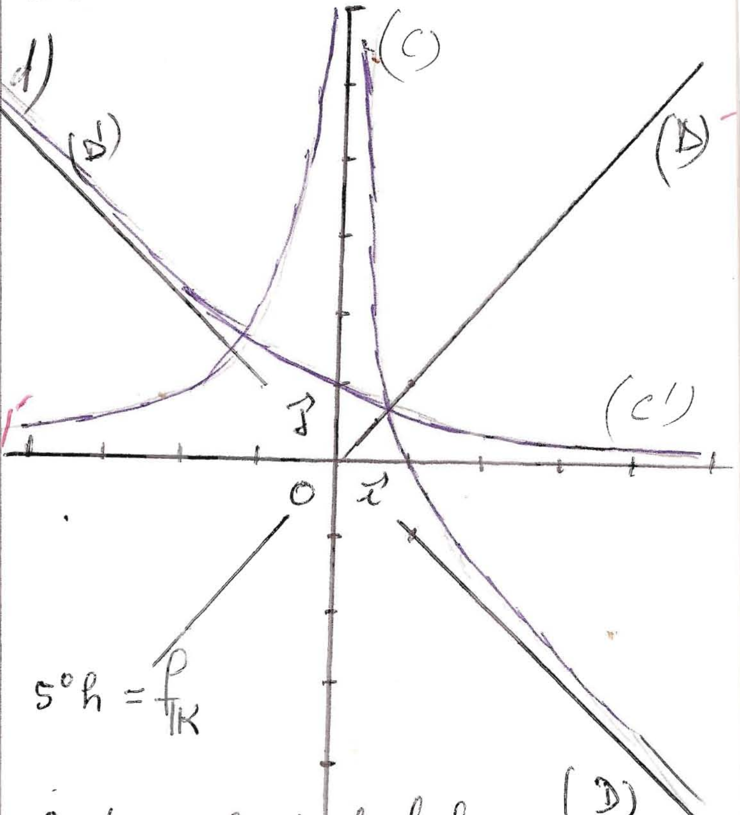
$\Rightarrow e^{-x} \leq 2 \Leftrightarrow -x \leq \ln 2 \Rightarrow x \geq -\ln 2$

d'où $\forall x \geq -\ln 2$ $f(x)-y \geq 0$

Ainsi sur $]0;+\infty[$ $f(x)-y > 0$ et (C) au dessus de (D). 0,5

c) La droite $x=0$ et la droite $y=0$ sont asymptote car 0,75 $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

d)



5° $h = f_{|\mathbb{R}}$

5° D'après le TV de f h est derivable et strictement decr. sur $]0;+\infty[$ et $h(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$ donc h est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

6° $g = h^{-1}$

a) Voir (C') sur fig. symetriq de (C) par rapport à (D) $y=x$

b) $D_g = \mathbb{R}$ comme $\forall x > 0$ $f'(x) \neq 0$ on a $\forall x > 0$ $h'(x) \neq 0$ donc $E' = D_{g'} = \mathbb{R}$

c) sur $]0, +\infty[$ $e^x - 1 > 0$ et $h(x) = -\ln(e^x - 1)$

$y \in \mathbb{R}$ et $x > 0$ $y = h(x) \Leftrightarrow$

$y = -\ln(e^x - 1) \Leftrightarrow -y = \ln(e^x - 1) \Leftrightarrow$

$e^{-y} = e^x - 1 \Leftrightarrow 1 + e^{-y} = e^x \Leftrightarrow x = \ln(1 + e^{-y})$

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a $g(x) = h^{-1}(x) = \ln(1 + e^{-x})$

et $\forall x \in E' = D_{g'}$ $g'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

en multipliant les 2 termes par e^x

on a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -\dfrac{1}{1 + e^x}}$

Rq $g'(x) = \dfrac{1}{f' o h^{-1}(x)} = \dfrac{1}{h'(y)} = \dfrac{e^y - 1}{-e^y}$ or $e^y = e^{-x} + 1$

et $g'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} = -\dfrac{1}{e^x + 1}$.

d) $x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x + 1 > 2 \Rightarrow$

$0 < \dfrac{1}{e^x + 1} < \dfrac{1}{2}$ $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{e^x + 1} < \dfrac{1}{2}$ et

$|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ $\forall x > 0$.

e) g est déri sur $]0, +\infty[$ et $|g'| \leq \dfrac{1}{2}$

d'après l'iaf. pour $a, b > 0$ on a

$|g(a) - g(b)| \leq \dfrac{1}{2} |a - b|$.

C

7° $\begin{cases} u_0 = \ln 2 \\ u_{n+1} = g(u_n). \end{cases}$

• pour $n = 0$ on a $u_0 = \ln 2 > 0$ et P_0 V

• soit n un entier naturel

supposons $u_n > 0$ et Mq $u_{n+1} > 0$

$\forall x > 0$ $g(x) > 0$ car $g(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

si $u_n > 0$ on a $g(u_n) = u_{n+1} > 0$ et P_{n+1} vrai

d'où $u_n > 0$ $\forall n$.

8°) $\alpha = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ Mq $g(\alpha) = \alpha$

$h(\alpha) = -\ln\left(e^{\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - 1\right) = -\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\right)$

$h(\alpha) = -\ln\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = -\ln\left(\dfrac{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)}{2(\sqrt{5} + 1)}\right)$

$h(\alpha) = -\ln\left(\dfrac{2}{1 + \sqrt{5}}\right) = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \alpha$

$h(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$.

9° a) avec $u_n > 0$ et $\alpha > 0$ $g(\alpha) = \alpha$ $g(u_n) = u_{n+1}$

on a $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2} |u_n - \alpha|$

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2} |u_n - \alpha|$ $\forall n$

b) $|u_1 - \alpha| \leq \dfrac{1}{2} |u_0 - \alpha|$

$\vdots$

$|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$

Tous les n termes étant (+) par produit membre à membre et après simplif on a :

$|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ d'où

$\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

10°) $0 < \dfrac{1}{2} < 0$ $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

donc $\lim u_n = \alpha$ et

u_n CV vers α.

MINISTERE DE L'EDUCATIONATIONALE
DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SCOLAIRE ET NORMAL
DIRECTION D'ACADEMIE PROVINCIALE DE L'OGOOUE MARITIME
PORT- GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
****
Union-Travail-Justice

BAC BLANC COMMUNAL Avril 2011
Epreuve de MATHEMATIQUES
Série : D Coef : 4. Durée : 4h

EXERCICE 1 .(5points)

Dans une usine, à la fin d'une chaine de fabrication, on effectue deux tests de qualité T_1 et T_2 à chaque pièce usinée. Les statistiques du service de contrôle indiquent les données suivantes : **95%** des pièces fabriquées réussissent le test T_1. Parmi les pièces ayant réussi le test T_1, **99%** réussissent le test T_2, et parmi les pièces ayant échoué au test T_1, **98%** réussissent au test T_2 Les résultats des différents calculs seront donnés à 10^{-4} près.

1. On choisit une pièce au hasard et on désigne par : T_1 l'évènement : « la pièce a réussi le test T_1 », T_2 l'évènement : « la pièce a réussi le test T_2 ».

0,98 ; 0,95 ; 0,05
0,99 ; 0,9895

a. Préciser les probabilités des évènements : T_1, $\overline{T_1}$, (T_2/T_1) et $(T_2/\overline{T_1})$
b. Calculer la probabilité que la pièce réussisse le test T_2.
c. On choisit une pièce ayant réussi le test T_2.Qu'elle est la probabilité que cette pièce ait réussi le test T_1 ?

2. Les pièces ayant réussi les deux tests sont commercialisées au prix de **5000 FCFA**, celles n'ayant réussi qu'un seul des deux tests sont vendues à **2000FCFA**, et les autres sont détruites. Pour une pièce donnée, on note **X**, la variable aléatoire correspondant à son prix de vente.
a. Déterminer la loi de probabilité de **X.**
b. Calculer l'espérance mathématique de **X**. Interpréter le résultat.

3. On dispose d'un lot de **10** pièces dont on ignore la qualité. On note **Y** la variable aléatoire égale au nombre de pièces de ce lot qui ont réussi les deux tests.
a. Calculer la probabilité qu'exactement **7** pièces parmi elles, aient réussi les deux tests.
b. Calculer la probabilité qu'au moins une parmi elles, ait réussi les deux tests.

4. On dispose d'un autre lot de **10** pièces dont exactement **7** pièces ont réussi les deux tests et **3** n'ont réussi aucun des deux tests. On choisit au hasard **5** pièces de ce lot.
a. Calculer la probabilité que parmi les **5** choisies, trois exactement aient réussi les deux tests
b. Calculer la probabilité qu'au moins une pièce parmi les **5** n'ait pas réussi les deux tests.

EXERCICE 2 (4points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overline{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1 et A_2 d'affixes respectives **z_0=5-4i, z_1=-1-4i et z_2=-4-i.**

1. a. Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que : $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.

a. Etablir que l'expression complexe de ***S*** est **:** $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$. Préciser son rapport, son angle, l'affixe ω de son centre **Ω**.

b. On considère un point ***M***, d'affixe ***z*** avec $z \neq 0$, et son image ***M'=S(M)*** d'affixe ***z'*** Vérifier la relation $\omega - z' = i(z - z')$. En déduire la nature du triangle **ΩMM'**.

2. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1} est défini par $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose $u_n = \|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\|$.

a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3 et A_4

b. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$v_n = u_0 + u_2 + u_3 + \cdots u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$

a. Exprimer v_n en fonction de **n**. La suite (v_n) est-elle convergente ?

b. Calculer en fonction de **n** la distance ΩA_n, notée r_n.

c. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que r_n **<0,06**. Interpréter géométriquement ce résultat.

<u>**Problème :**</u> (11 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-\frac{1}{3}x}$.

On note *(C)* la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité : 2cm.

<u>**Partie**</u> **A :** ***<u>Etude de la fonction</u>*** f.

1. ***Sens de variation de la fonction dérivée*** f' ***de la fonction*** f

a. Calculer la dérivée f' de la fonction f.

b. Etudier le sens de variation de f' et calculer la limite de f' lorsque x tend vers $+\infty$.

c. Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel positif α tel que $f'(x) = 0$ et montrer que $0.4 \leq \alpha \leq 0.5$

d. Etudier le signe de f' sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. ***Comportement asymptotique de*** f ***en*** $+\infty$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. On note (P) la courbe d'équation $y = x^2 - 3$.

Déterminer le signe de $[f(x) - (x^2 - 3)]$ et sa limite en $+\infty$.

Interpréter graphiquement les résultats.

3. ***Signe de*** f.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique non nulle x_0 appartenant à l'intervalle $[\alpha;+\infty[$ et montrer que $0.8 \leq x_0 \leq 0.9$.

4. ***Tracé de la courbe (C) et calcul d'aire.***

a. Tracer les courbes *(C)* et *(P)* dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Préciser la tangente à *(C)* au point d'abscisse 0.

b. Calculer l'intégrale $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} [f(x) - (x^2 - 3)]dx$ où λ désigne un réel strictement positif.

c. Interpréter graphiquement le résultat.

d. Déterminer le limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$

__Partie__ **B :** ***Approximation de la solution de l'équation $f(x)=0$ par une suite.***

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I=[0,8;0,9]$ par $g(x)=x+3-x^2-3e^{-\frac{1}{3}x}$.
Ainsi la solution x_0 de l'équation $f(x)=o$ est aussi une solution de l'équation $g(x)=x$.

1. *Etude de la fonction g'*

a. Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$ Etudier le signe de $g''(x)$ sur l'intervalle $[0,8; 0,9]$ et en déduire les variations de g' sur I.

b. Calculer $g'(0,8)$ et $g'(0,9)$.puis montrer que pour tout x de **I**, $|g'(x)|\leq\frac{1}{5}$.

2. ***Etude de la fonction g.***

a. Etudier les variations de g sur **I** prouver que, pour tout x de **I**, $g(x)$ appartient aussi à I.

b. Montrer que, pour tout x de **I**, $|g(x)-x_0|\leq\frac{1}{5}|x-x_0|$

3. ***Etude d'une suite d'approximation de g***

Soit (u_n) la suite d'éléments de **I** définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_0=0{,}8 \\ u_{n+1}=g(u_n) \end{cases}$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-x_0|\leq\frac{1}{5}|u_n-x_0|$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $|u_n-x_0|\leq\frac{1}{10}(\frac{1}{5})^n$.

c. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de x_0 à 10^{-3} près.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
Direction d'Académie Provinciale de l'Ogooué-Maritime
Lycée Joseph AMBOUROUE AVARO

REPUBLIQUE GABONAISE
Union-Travail-Justice

BACCALAUREAT BLANC
Session de : MARS 2012

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

Série :D

Durée : 4h

Coef. : 4

EXERCICE1 5points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique : $1cm$). On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : (E) $z^3-(8+5i)z^2+(17+25i)z-40i=0$.

1°) On pose pour tout élément z de $\mathbb{C}$: $p(z)=z^3-(8+5i)z^2+(17+25i)z-40i$.

a) Calculer $p(4+4i)$.

b) Déterminer deux nombres complexes α et β tels que pour tout nombre complexe z,
$p(z)=(z-4-4i)(z^2+\alpha z+\beta)$.

c) Résoudre l'équation (E).

2°) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a=4+4i$; $b=1+2i$ et $c=3-i$. On pose $Z=\dfrac{a-b}{c-b}$.

Ecrire z sous forme exponentielle et en déduire la nature du triangle ABC.

3°) A tout point M d'affixe z distincte de $3-i$ on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\dfrac{z-1-2i}{z-3+i}$.

On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

a) Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

b) Interpréter géométriquement un argument de z'.

c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

d) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M tels que z' soit un réel strictement négatif.

e) Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M tels que $|z'| = 1$.

EXERCICE2 4points

L'espace (ξ) est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1,2,3)$; $B(2,1,2)$; $C(5,7,2)$; $D(5;0;9)$ et la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 7+4t \\ y = -1-2t \\ z = 12+6t \end{cases}$; $(t \in IR)$.

1°) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C déterminent un plan (P) dont on donnera une équation cartésienne.

2°) a) Démontrer que $(\Delta) = (AD)$.

b) Démontrer que la droite (Δ) et le plan (P) sont perpendiculaires.

c) En déduire $(\Delta) \cap (P)$.

d) Calculer la distance du point B à la droite (Δ).

e) Calculer le volume du tétraèdre $DABC$.

3°) On pose $\vec{e_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{AB}$; $\vec{e_2} = \frac{\sqrt{42}}{42}\overrightarrow{AC}$; $\vec{e_3} = \frac{\sqrt{14}}{28}\overrightarrow{AD}$.

Démontrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

PROBLEME 11points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x\ln x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} & pour \quad x > 0 \\ f(0) = \frac{3}{2} & \end{cases}$ et

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(0;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $2cm$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2\ln x - x + 1$.

1°) Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g.

2°) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation .

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

Direction d'Académie Provinciale

de L'Ogooué - Maritime

Service des Examens et Concours

REPUBLIQUE GABONAISE

Union - Travail - Justice

BAC BLANC PROVINCIAL

Session de : Avril - Mai 2012

Epreuve de Mathématiques

Série : D Durée : 4h Coef : 4

EXERCICE I : (5points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ d'unité le centimètre.

On donne les points $A(3\,;2\,;4)$, $B(0\,;3\,;5)$, $C(0\,;2\,;1)$et $D(3\,;1\,;0)$

1. Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ et tracer le quadrilatère ABCD.
2. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.
3. Déterminer l'équation du plan (ABC) et vérifier qu'il contient le point D
4. Soit E un point défini par : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ et (Q) le plan d'équation :$-2x + y + 2z - 4 = 0$
   a. Calculer les coordonnées du point E et placer E dans $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.
   b. Montrer que les plans (ABC) et (Q) sont sécants et donner un équation paramétrique de leur droite (L) d'intersection.
5. Calculer l'aire du parallélogramme ABCD
6. Calculer le volume du prisme droit de base ABCD et de hauteur AE.

EXERCICE II (5points)

On dispose de deux trousses T_1 et T_2 contenant des stylos indiscernables au toucher. T_1 contient 7 stylos bleus et 3 stylos rouges ; T_2 contient 2 stylos bleus et 1 stylo rouge.

On tire au hasard un stylo de T_1 et on le met dans T_2, puis on tire au hasard un stylo de T_2 et on le met dans T_1. L'ensemble de ces opérations constituent une épreuve.

1. On considère les évènements suivants :
   A : « après l'épreuve, les trousses se retrouvent chacune dans sa configuration de départ » ;
   B : « après l'épreuve, la trouve T_2 contient un seul stylo bleu ».
   Vérifier que : $p(A) = \frac{27}{40}$ et calculer $p(B)$.
2. Un joueur mise 200F Cfa et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte le nombre de stylos bleus contenus dans T_2.
   - Si T_2 contient un seul stylo bleu, le joueur reçoit 600F Cfa ;
   - Si T_2 contient deux stylos bleus, le joueur ne reçoit rien ;
   - Si T_2 contient trois stylos bleus, le joueur reçoit 200F Cfa.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a. Déterminer les valeurs prises par X.
b. Déterminer la loi de probabilité de X.
c. Montrer que l'espérance mathématique $E(X) = -75$ puis calculer la variance et l'écart-type de la variable X.

3. MBA-DINGA joue cinq fois de suite ce jeu. Calculer, à 10^{-3} près par excès, la probabilité qu'il obtienne au plus quatre fois un gain strictement positif à l'issue des cinq épreuves.

PROBLEME (10points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation complet sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Partie B : Etude de la fonction f.

Soit f la fonction définie sur $[0\,; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$

1. a. La fonction f est-elle dérivable en $x_0 = 0$? Déduire l'ensemble de dérivabilité de f.
   b. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f et en déduire les variations de f.
2. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b. Dresser le tableau de variation complet de f.
3. a. Déterminer les équations respectives des tangentes (D) et (L) aux points d'abscisses respectives $x = 0$ et $x = 1$.
   b. Construire la courbe (C_f) et les droites (D) et (L) dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité :2cm)

Partie C : Etude d'une suite.

1. a. Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $[0\,; +\infty[$.
   b. Quelle est la solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0\,; +\infty[$?
2. Montrer que pour tout x de $\left[\frac{1}{2}\,; 1\right]$, $f(x)$ appartient à $\left[\frac{1}{2}\,; 1\right]$.
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

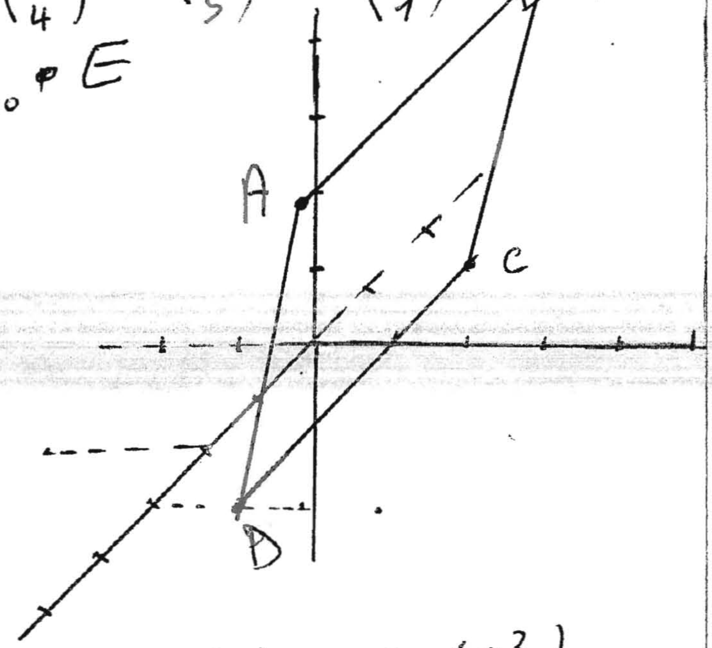
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
4. Montrer que pour tout x de $\left[\frac{1}{2}\,; 1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
5. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
6. a. Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$.
   b. Quelle est la limite de la suite (u_n).

Bac blanc Déc 2012
Maths Série D

Exercice 1

$A\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

1° E



2° $\vec{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{DC}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \vec{DC}$ donc ABCD est un #.

3° $\vec{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\wedge\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}$

$(ABC)\quad -3x-12y+3z+d=0$

$A\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\in(ABC)$ et $d=21$

et $(ABC)\quad -3x-12y+3z+21=0$

ou

$$\boxed{(ABC)\quad -x-4y+z+7=0}$$

$D(3;1;0)$ et $-3-4+7=0$

donc $D\in(ABC)$.

4° a) $\vec{AB}\wedge\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}$ et

$\frac{1}{3}\vec{AB}\wedge\vec{AD}\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$

$\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB}\wedge\vec{AD}$ on trouve

$$\boxed{E(2;-2;5)}$$

b) méthode 1

Résolvons le système

$\begin{cases}-x-4y+z+7=0\\-2x+y+2z-4=0\end{cases}$ on a

$\begin{cases}9y-18=0\\-x+z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\x=z-1\end{cases}$

en posant $z=t$ on a

$\begin{cases}x=t-1\\y=2\\z=t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

Les plans (ABC) et (P) sont sécants suivants la droite (L) de représentation paramétrique

$\begin{cases}x=-1+t\\y=2\\z=t\end{cases}$

$\underline{Rq}$ (L) est la droite passant par le point $F\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

<u>methode 2</u>

$\vec{n}_1\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux de (ABC) et Q. De plus

$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2\begin{pmatrix}-9\\0\\-9\end{pmatrix}$

$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \neq \vec{0}$ donc (ABC) et (Q) sont secants suivants une droite dirigée par $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2\begin{pmatrix}-9\\0\\-9\end{pmatrix}$ ou $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

avec $z=0$ le système $\begin{cases}-x-4y=7\\-2x+y=4\end{cases}$

admet le couple $(-1;2)$ pour unique solution et point $F\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \in (ABC)\cap(Q)$

Ainsi la droite d'intersection (L) de $(ABC)\cap(Q)$ a pour représentation paramétrique le système

$$\begin{cases}x=-1+t\\y=2\\z=t\end{cases}$$

2

5°/ $\mathcal{A}(ABCD) = \|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$

$\mathcal{A}(ABCD) = \sqrt{9+144+9} =$

$\mathcal{A}(ABCD) = \sqrt{182}$ u.a.

6°/ $V = \mathcal{A}(ABCD) \times AE$

avec $\vec{AE}(-1;-4;1)$

$V = \sqrt{182}\times\sqrt{18}$

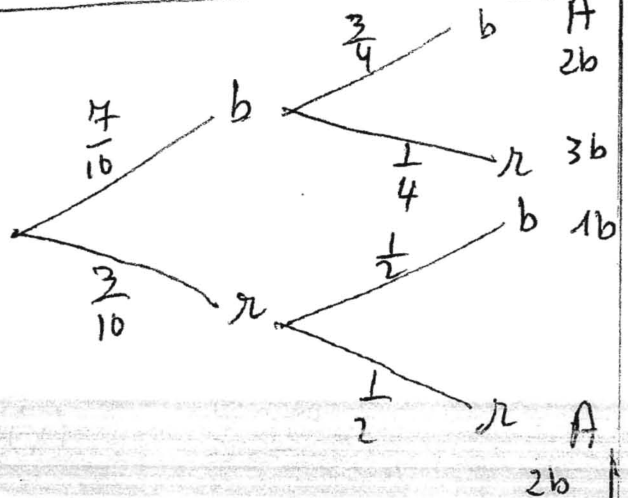
$V = 6\sqrt{91}$ u.v

Exercice 2 (3)

1°

7b et 3r   3b et 1r

T1	T2	T1



$P(A) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2}$

$\boxed{P(A) = \frac{21}{40} + \frac{3}{20} = \frac{27}{40}}$

$\boxed{P(B) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20}}$

2°) a)

$\boxed{X(\Omega) = \{-200 ; 0 ; 400\}}$

b) Loi de Probabilité

x_i	-200	0	400
P_i	$\frac{27}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{20}$

c)

$E(X) = -200 \times \frac{27}{40} + 0 \times \frac{7}{40} + 400 \cdot$

$E(X) = -5 \times 27 + 20 \times 3 = -$

$\boxed{E(X) = -75}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$V(X) = 51000 - 5625 = 45375$

$V(X) = 45375$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$\sigma(X) = \sqrt{45375}$

$\boxed{\sigma(X) = 55\sqrt{15}}$

3°

$P(X > 0) = P(X = 400) = \frac{3}{20}$

$P(S) = \frac{3}{20}$ $P(\bar{S}) = \frac{17}{20}$

Schema de bernoulli avec

$n = 5$, $P(S) = \frac{3}{20}$ et $P(\bar{S}) = \frac{17}{20}$

$P($

$P_k = C_5^k \left(\frac{3}{20}\right)^k \left(\frac{17}{20}\right)^{5-k}$

$P_{k \leq 4} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

$P_{k \leq 4} = 1 - P_5 = 1 - \left(\frac{3}{20}\right)^5$

$\simeq 0,999$

$\boxed{P \simeq 1}$

Problème (4)

Partie A

$g(x) = (x-1)e^x + x^2 = xe^x - e^x + x^2$.

1° $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{+\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)e^x = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$

2° g est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $g'(x) = xe^x + 2x = x(2+e^x)$

$2+e^x > 0$ et $g'(x)$ est de signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

g est décroissante sur $]-\infty ; 0]$

g est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3° g est dérivable et strictement croissante sur $[\frac{1}{2} ; 1]$ et

$g(\frac{1}{2}) \simeq -0{,}57 < 0$

$g(1) \simeq 1 > 0$

$g(\frac{1}{2}) \times g(1) < 0$ donc l'équation

$g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[\frac{1}{2} ; 1]$.

Partie B :

$f(x) = \dfrac{e^x}{x+e^x}$

1° a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{x+e^x}$

$= -1$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$.

Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x+e^x$ sont dérivables sur $[0 ; +\infty[$

et $x + e^x > 0$ $\forall x \geq 0$

donc $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+e^x}$ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

b) $\forall x \in [0 ; +\infty[$

$$\boxed{f'(x) = (x-1)\frac{e^x}{(e^x+x)^2}}$$

$e^x>0$ $(x+e^x)^2>0$ donc

$f'(x)$ est de signe de $x-1$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

sur $[0;1]$ f est decroissante

sur $[1;+\infty[$ f est croissante

2 a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{x}{e^x}} = 1$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$

Rq La droite $y=1$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.

b) TV de f

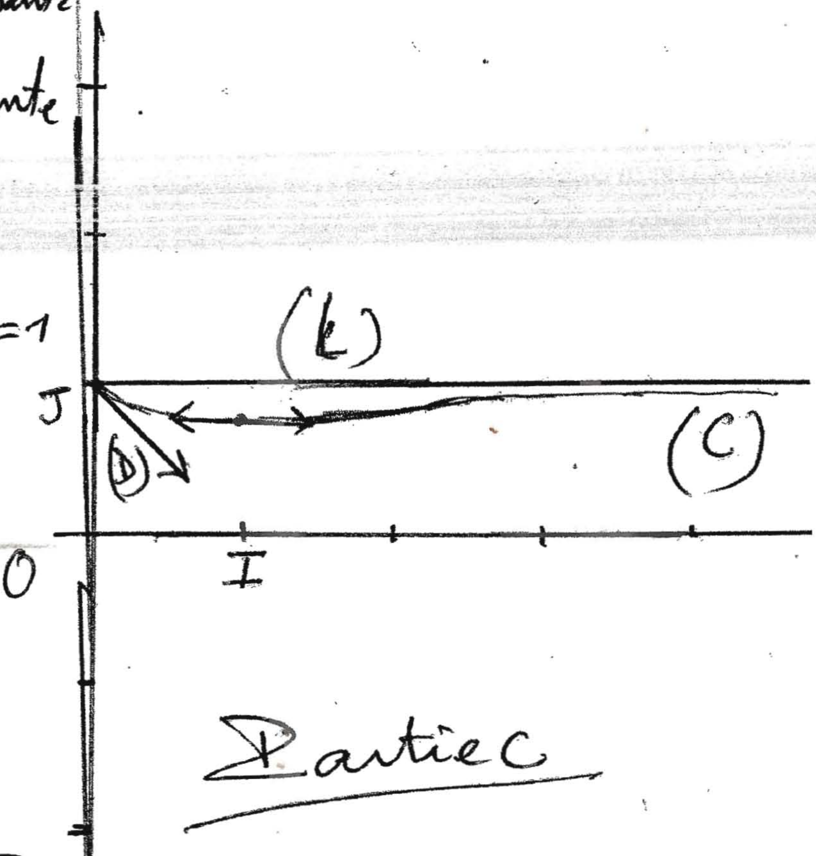
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{e}{1+e}$	$\nearrow$	1

3 a)

(D) $y = -x+1$

(L) $y = \frac{e}{1+e} \simeq 0,73$

b)



Partie C

1° a) Mq $f(x) = x \iff g(x)=0$

$f(x) = x \iff \frac{e^x}{e^x+x} = x \iff e^x = x(e^x+x)$

$\iff e^x - xe^x - x^2 = 0 \iff$

$\iff -e^x + xe^x + x^2 = 0$

$\iff e^x(x-1) + x^2 = 0$

$\iff g(x) = 0$ d'où

$f(x) = 0 \iff g(x) = 0$

b) α est l'unique solution de $f(x)=x \Rightarrow f(\alpha)=\alpha$

b) α est la solution de l'équation $f(x)=x$ sur $\mathbb{R}_+$

2° Mq $\forall x\in[\frac{1}{2};1]$ $f(x)\in[\frac{1}{2};1]$.

$\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ et f décroissante sur $[\frac{1}{2};1]$

donc $f(1)\leq f(x)\leq f(\frac{1}{2})$

or $f(1)\simeq 0{,}73 > \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2})\simeq 0{,}767 < 1$.

donc $\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 1$ et

$\forall x\in[\frac{1}{2};1]$ $f(x)\in[\frac{1}{2};1]$.

3° $\begin{cases} u_1=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

- $u_1=\frac{1}{2}\in[\frac{1}{2};1]$ et P_1 vraie
- si $u_n\in[\frac{1}{2};1]$ on a :

$u_{n+1}=f(u_n)\in[\frac{1}{2};1]$ car d'après 2° $\forall x\in[\frac{1}{2};1]$ on a $f(x)\in[\frac{1}{2};1]$

P_{n+1} vraie et d'après le principe de recurrence $u_n\in[\frac{1}{2};1]$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

4°) Montrons que $\forall x\in[\frac{1}{2};1]$ $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

$$f'(x)=(x-1)\frac{e^x}{(e^x+x)^2}$$

et $$|f'(x)|=(1-x)\frac{e^x}{(e^x+x)^2}$$

$\frac{1}{2}\leq x\leq 1 \Rightarrow -1\leq -x\leq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0\leq 1-x\leq\frac{1}{2}$ (1)

$\frac{1}{2}\leq x\leq 1\Rightarrow e^{\frac{1}{2}}\leq e^x\leq e$

$\Rightarrow \frac{1}{2}+e^{\frac{1}{2}}\leq x+e^x\leq 1+e$

$\Rightarrow (\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{2}})^2\leq(x+e^x)^2\leq(1+e)^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+e)^2}\leq\frac{1}{(x+e^x)^2}\leq\frac{1}{(\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{2}})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{2}}}{(1+e)^2}\leq\frac{e^x}{(x+e^x)^2}\leq\frac{e}{(\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{2}})^2}\quad(2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$

$$0\leq(1-x)\frac{e^x}{(x+e^x)^2}\leq\frac{\frac{1}{2}e}{(\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{2}})^2}$$

$$\Rightarrow 0\leq|f'(x)|\leq\frac{\frac{1}{2}e}{(\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{2}})^2}$$

or $\frac{\frac{1}{2}e}{(\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{2}})^2}\simeq 0{,}29<\frac{1}{2}$

d'où $\forall x\in[\frac{1}{2};1]$ $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

5° f est dérivable sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ d'après l'inégalité des accroissements finis appliqué à u_n et α élément de $\left[\frac{1}{2};1\right]$ on a :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$

donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

6 a)

pour $n = 1$ $\quad |u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1 - \alpha|$

$n = 2$ $\quad |u_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_2 - \alpha|$

$\vdots$

pour $n = n-1$ on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

Tous les termes étants positifs, par produit membre à membre et après simplification on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - \alpha|$$

(7) majorons $|u_1 - \alpha|$:

$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} - 1 \leq u_1 - \alpha \leq 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq u_1 - \alpha \leq 0 \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$ et

$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ $\quad \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

et $\lim\limits_{+\infty} u_n = \alpha$ par encadrement.

La suite (u_n) converge alors vers α.

Fin