MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

Direction d'Académie Provinciale

de L'Ogooué - Maritime

Service des Examens et Concours

REPUBLIQUE GABONAISE

Union - Travail - Justice

BAC BLANC PROVINCIAL

Session de : Avril - Mai 2012

Epreuve de Mathématiques

Série : C **Durée** : 4h **Coef** : 5

Exercice I : (5points)

On considère les nombres complexes z et Z tels que $z = 2\cos^2\theta + i\sin 2\theta$ et $Z = \frac{1}{z^2}$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

On désigne par m et M les points du plan complexe d'affixes respectives z et Z.

1. a. Déterminer le module et un argument de z.
   b. En déduire un le module et un argument de Z.
2. Montrer que : $Z = \frac{1}{4}\left(1-\tan^2\theta\right) - \frac{1}{2} i \tan\theta$.
3. Soit (Γ) la courbe d'équation : $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
   a. Préciser la nature de (Γ) et déterminer ses éléments caractéristiques.
   b. Montrer que : $m \in (\Gamma)$.
4. Soit (Ω) la courbe d'équation : $4x + 4y^2 = 1$.
   a. Préciser la nature de (Ω) et déterminer ses éléments caractéristiques.
   b. Montrer que : $M \in (\Omega)$.

Exercice II (5points)

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x\left[1-(\ln x)^2\right] \text{ si } x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$
   b. Etudier les variations de f.
   c. Quelle est la nature de la branche infinie de (C).
   d. Montrer que (C) admet un point d'inflexion. Ecrire l'équation de la tangente à (C) en ce point.

2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2}{x^{n+1}}(n!)\left[\ln x - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p}\right]$ où $f^{(n+2)}$ désigne la dérivée d'ordre $n+2$ de f.

3. Soit x un élément de $\mathbb{R}_+^*$. On admet l'existence de θ tel que $\theta \in]0\,;\,1[$ et $f(x) = xf'(\theta x)$

   a. Démontrer que θ est solution de l'équation : $(\ln\theta)^2 + 2(\ln x + 1)\ln\theta + 2\ln x = 0$.

   b. Résoudre cette équation. On note θ_1 et θ_2 les solutions $(\theta_1 < \theta_2)$.

   c. Calculer $\ln\theta_1 + \ln\theta_2$ et $(\ln\theta_1)\times(\ln\theta_2)$.

Exercice III : (6points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

1. Etudier les variations de f et montrer que pour réel $x, f(x) \geq 0$.
2. a. Démontrer que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $|f'(x)| < 1$ et $f''(x) = 1 - [f'(x)]^2$.

   b. Démontrer que, si x appartient à $]-1\,;\,1[$, il existe un unique réel X tel que $f'(X) = x$.

   Ecrire X en fonction de x. Puis démontrer que $f'(\mathbb{R}) =]-1\,;1[$.
3. Dans la suite de l'exercice, on prendra $X = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

   Soit n un nombre entier naturel, X un nombre réel et $I_n(X) = \int_0^X [f'(u)]^n du$.

   a. Justifier l'existence de $I_n(X)$.

   b. Calculer $I_0(X)$ et $I_1(X)$.

   c. En utilisant $[f'(X)]^2 = 1 - f''(X)$, démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a :
   $I_n(X) = I_{n-2}(X) - \frac{1}{n-1}[f'(X)]^{n-1}$.

   d. Déduire de ce qui précède que, pour tout p entier naturel non nul
   $I_{2p}(X) = X - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1}[f'(X)]^{2k-1}$ **(1)** et $I_{2p+1}(X) = ln\frac{e^X+e^{-X}}{2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k}[f'(X)]^{2k}$ **(2)**

   e. Démontrer que pour tout p entier naturel on a : $0 \leq \int_0^X [f'(u)]^{2p} du \leq X[f'(X)]^{2p}$. En déduire, X étant fixé, que la suite de terme générale $\int_0^X [f'(u)]^{2p} du$ est convergente et préciser sa limite.
4. En utilisant la relation **(1)** et en posant $X = t(x)$, démontrer que pour tout x fixé de $[0\,;1[$ la suite $(\varepsilon_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ définie par : $\varepsilon_p(x) = t(x) - \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$ a pour limite 0. En déduire un résultat analogue pour x élément de $]-1\,;0[$.
5. En utilisant le relation définissant $\varepsilon_p(x)$ pour $x = \frac{1}{3}$ et $p = 3$, préciser α, une valeur approchée de $ln2$.

   Comparer α et la valeur donnée par la calculatrice. Puis préciser un majorant de $ln2 - \alpha$.

EXERCICE IV : (4 points)

1. a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs. Démontrer que si $a \equiv b[7]$ et $c \equiv d[7]$, alors $ac \equiv bd[7]$.

   b. En déduire que pour a et b entiers relatifs non nuls, si $a \equiv b[7]$, alors pour tout entier naturel n $a^n \equiv b^n[7]$.

2. Pour $a=2$ puis pour $a=3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que : $a^n \equiv 1[7]$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

   a. Montrer que : $a^6 \equiv 1[7]$.

   b. On appelle ordre de $a[7]$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que : $a^k \equiv 1[7]$.

   Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie : $a^r \equiv 1[7]$.

   En déduire que k divise 6.

   c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. A tout entier naturel n, on associe le nombre : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.

Montrer que : $A_{2006} \equiv 6[7]$.

Bac blanc Provinciale

Math Serie C & E

(1)

Exercice 1

$z = 2\cos^2\theta + i\sin 2\theta$ et $Z = \frac{1}{z^2}$

avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1° a) $|z|$ et $\arg z$?

$z = 2\cos^2\theta + i\sin 2\theta$

$z = 2\cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$

$z = 2\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = (2\cos\theta)e^{i\theta}$ or

$\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\cos\theta > 0$

donc $\boxed{|z| = 2\cos\theta \text{ et } \arg z = \theta}$

b) $Z = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{4\cos^2\theta\, e^{i2\theta}}$

$Z = \frac{1}{4\cos^2\theta} e^{-i2\theta}$ et

$\boxed{|Z| = \frac{1}{4\cos^2\theta} \text{ et } \arg Z = -2\theta}$

2° (Γ) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

(Γ) $(x-1)^2 + y^2 = 1$

(Γ) est le cercle de centre $A(1;0)$ et de rayon 1.

2° M q $Z = \frac{1}{4}(1 - \tan^2\theta) - \frac{1}{2}i\tan\theta$

$Z = \frac{1}{4\cos^2\theta}(\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta))$

$Z = \frac{1}{4\cos^2\theta}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)$

$= \frac{1}{4\cos^2\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta)$

$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) - \frac{2i\sin\theta\cos\theta}{4\cos^2\theta}$

$= \frac{1}{4}(1 - \tan^2\theta) - \frac{1}{2}i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{4}(1 - \tan^2\theta) - \frac{1}{2}i\tan\theta$

d'où

$Z = \frac{1}{4}(1 - \tan^2\theta) - \frac{1}{2}i\tan\theta$

3° (Γ) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

a) $M\binom{x}{y} \in (\Gamma) \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 + y^2 = 1 = 1^2$

$\Leftrightarrow (\Gamma)$ est le cercle de centre $A\binom{1}{0}$ et de rayon 1.

b) Montrons que $m \in (\Gamma)$

$z = 2\cos\theta\, e^{i\theta}$ et

m est le point d'affixe z.

$m\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $z = 2\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$

on a : $\begin{cases} x = 2\cos^2\theta \\ y = 2\cos\theta\sin\theta \end{cases}$

$x^2 + y^2 - 2x = 4\cos^4 x + 4\cos^2 x \sin^2 x$

$- 4\cos^2 x = 4\cos^4 x + 4\cos^2 x(1 - \cos^2 x)$

$- 4\cos^2 x = 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x$

$- 4\cos^2 x = 0$ donc

$m \in (\Gamma)$.

4. (Ω) $4x + 4y^2 = 1$

a) $4x + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow$

$4y^2 = 1 - 4x$

$y^2 = \frac{1}{4} - x = -(x - \frac{1}{4})$

Soit $S\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} X = x - \frac{1}{4} \\ Y = y \end{cases}$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\Omega) \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in (\Omega)$

$\Leftrightarrow Y^2 = -X$

$\Leftrightarrow Y^2 = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot X$

(2)

(Ω) est la parabole de sommet $S\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$, de paramètre $\frac{1}{2}$, d'axe focal l'axe des abscisses, de foyer $F\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ de directrice la droite $x = \frac{1}{4}$ dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

b) M est le point d'affixe

$Z = \frac{1}{4}(1 - \tan^2\theta) - \frac{1}{2} i \tan\theta$.

$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(1 - \tan^2\theta) \\ y = -\frac{1}{2}\tan\theta \end{cases}$

$\begin{cases} 4x = 1 - \tan^2\theta \\ 2y = -\tan\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 1 - \tan^2\theta \\ 4y^2 = \tan^2\theta \end{cases}$

$\Leftrightarrow 4x + 4y^2 = 1$ et

$M \in (\Omega)$.

Exercice 2

$$\begin{cases} f(x) = x\left[1-(\ln x)^2\right] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1° a) Continuité de f en 0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x - x(\ln x)^2$$

$$= \lim_{x\to 0} x - (\sqrt{x}\ln x)^2 = 0$$

car $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

f est continue en 0.

La fonction $x \mapsto x$ et la fonction $x \mapsto 1-(\ln x)^2$ sont continues sur $]0;+\infty[$ donc f étant continue en 0 est continue sur

$$D_f = [0;+\infty[.$$

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} 1-(\ln x)^2$$

$= -\infty$ car $\lim_{x\to 0}(\ln x)^2 = +\infty$

f est pas dérivable en 0.

Au point $O(0;0)$ (C) admet une demi-tangente verticale.

Dérivabilité sur $]0;+\infty[$

les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1-(\ln x)^2$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ donc f : $x \mapsto x(1-(\ln x)^2)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

En conclusion

f est continue sur $[0;+\infty[$ et f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

b) Variation de f.

$\forall x > 0 \quad f'(x) = -(\ln x)^2 - 2\ln x + 1$

x	0		$e^{-1-\sqrt{2}}$		$e^{\sqrt{2}-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f est croissante sur $[e^{-1-\sqrt{2}}; e^{\sqrt{2}-1}]$

f est décroissante sur $[0; e^{-1-\sqrt{2}}]$ et sur $[e^{\sqrt{2}-1}; +\infty[$

Tableau de variation

x	0		$e^{-1-\sqrt{2}}$		$e^{\sqrt{2}-1}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$

$m = f(e^{-1-\sqrt{2}}) = (-2-2\sqrt{2})\, e^{-1-\sqrt{2}}$

$M = f(e^{\sqrt{2}-1}) = (2\sqrt{2}-2)\, e^{\sqrt{2}-1}$

c) branche infinie

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-(\ln x)^2) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

(C) admet branche infinie de direction l'axe des ordonnées.

d) $f'(x) = -(\ln x)^2 - 2\ln x + 1$

f' est dérivable sur $]0;+\infty[$

et $f''(x) = -\frac{2}{x}(1+\ln x)$

$\frac{2}{x} > 0$ et $f''(x)$ est de signe de $-(1+\ln x)$.

$-1 - \ln x \geq 0$ ssi

$-\ln x \geq 1 \iff \ln x \leq -1$

$\iff x \leq e^{-1}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$+$	0	$-$	

f'' s'annule en $\frac{1}{e}$ et change de signe donc le point d'abscisse $\frac{1}{e}$ est un point d'inflexion pour (C).

Soit (T) la tangente à (C) en ce point.

(T) $y = 2(x - \frac{1}{e})$

2° Mq $\forall x>0$ et $\forall n \geq 2$

$$f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2}{x^{n+1}} (n!) \left[\ln x - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p}\right]$$

Notons (P_n) cette proposition.

• Pour $n=2$ on a

$f''(x) = -\frac{2}{x}(1+\ln x)$ $\forall x>0$

f'' est dérivable sur $]0;+\infty[$

et $\forall x>0$ $f'''(x) = 2\frac{\ln x}{x^2}$

f''' est dérivable sur $]0;+\infty[$

et $\forall x>0$ $f^{(4)}(x) = 2\frac{1-2\ln x}{x^3}$

en prenant $n=2$

la formule donne

$$f^{(2+2)}(x) = (-1)^3 \frac{2}{x^3}(2!)\left[\ln x - \frac{1}{2}\right]$$
$$= -\frac{2}{x^3}(2\ln x - 1) = 2\,\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

et $f^{(4)}(x) = 2\,\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

donc P_2 vraie.

• Soit n un entier naturel supérieur à 2. Supposons

$$f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2}{x^{n+1}}(n!)\left[\ln x - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}\right]$$

et Montrons que

$$f^{(n+3)}(x) = (-1)^{n+2}\frac{2}{x^{n+2}}((n+1)!)\left[\ln x - \sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p}\right]$$

$$f^{(n+3)}(x) = \left(f^{(n+2)}\right)'(x) =$$

$$(-1)^{n+1}\times 2(n!)\,\frac{x^n - (n+1)x^n\left(\ln x - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}\right)}{x^{2n+2}}$$

$$= (-1)^{n+1}\times 2(n!)\,\frac{1-(n+1)\left(\ln x - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}\right)}{x^{n+2}}$$

$$= (-1)^{n+1}\times 2(n!)(n+1)\,\frac{\frac{1}{n+1} - \left(\ln x - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}\right)}{x^{n+2}}$$

$$= (-1)^{n+1}\times 2((n+1)!)(-1)\,\frac{\ln x - \sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p}}{x^{n+2}}$$

$$= (-1)^{n+2}\,\frac{\times 2((n+1)!)}{x^{n+2}}\left[\ln x - \sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p}\right]$$

donc P_{n+1} vraie et d'après le principe de récurrence $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ on a :

$$f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2}{x^{n+1}}(n!)\left[\ln x - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}\right].$$

3. On admet $\exists \theta \in]0,1[$ tq $f(x) = x f'(\theta x)$

a) $f(x) = x f'(\theta x) \Leftrightarrow$

$f(x) - x f'(\theta x) = 0 \Leftrightarrow$

$x\left[1-(\ln x)^2\right] + x\left[(\ln x\theta)^2 + 2\ln\theta x - 1\right] = 0$

$x - x(\ln x)^2 + x\left[(\ln x + \ln\theta)^2 + 2\ln\theta + 2\ln x - 1\right] = 0$

et alors θ est solution de :

$$(\ln\theta)^2 + 2(\ln x + 1)\ln\theta + 2\ln x = 0$$

Rq ce résultat est obtenu après développement et simplification de la ligne précédente.

b) Résolvons l'equation

$(\ln \theta)^2 + 2(\ln x + 1)\ln\theta + 2\ln x = 0$

$\theta \in]0;1[$ et $x > 0$

Posons $X = \ln\theta$

$X^2 + 2(\ln x + 1)X + 2\ln x = 0$

$\Delta' = (\ln x)^2 + 1 > 0$ ou

$\Delta = 4((\ln x)^2 + 1) > 0$

on a :

$X_1 = -1 - \ln x - \sqrt{1 + (\ln x)^2}$

$X_2 = -1 - \ln x + \sqrt{1 + (\ln x)^2}$

$\ln\theta_1 = X_1 = -1 - \ln x - \sqrt{1 + (\ln x)^2}$

$\theta_1 = e^{-1-\ln x - \sqrt{1+(\ln x)^2}}$

$\theta_1 = \frac{1}{xe} e^{-\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

$\ln\theta_2 = -1 - \ln x + \sqrt{1 + (\ln x)^2}$

$\theta_2 = e^{-1-\ln x + \sqrt{1+(\ln x)^2}}$

$\theta_2 = \frac{1}{xe} e^{\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

d'où $\boxed{S = \{\theta_1 ; \theta_2\}}$

(6) c). calculons

$\ln\theta_1 + \ln\theta_2$ et $(\ln\theta_1)(\ln\theta_2)$

Rq on sait que

$P = \frac{c}{a}$ et $S = -\frac{b}{a}$

avec $a = 1$; $c = 2\ln x$ et

$b = 2(\ln x + 1)$.

donc

$\ln\theta_1 + \ln\theta_2 = X_1 + X_2 \Rightarrow$

$\ln\theta_1 + \ln\theta_2 = -2(\ln x + 1)$

$(\ln\theta_1)(\ln\theta_2) = X_1 X_2 \Rightarrow$

$(\ln\theta_1)(\ln\theta_2) = 2\ln x$

d'où

$\ln\theta_1 + \ln\theta_2 = -2(1 + \ln x)$

$(\ln\theta_1)(\ln\theta_2) = 2\ln x$

EXERCICE 3

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)$$

1° Etude de f

La fonction $x \longmapsto \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

ou encore $f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$e^{2x}+1>0$ donc $f'(x)$ est de signe de $e^{2x}-1$

$e^{2x}-1 \geq 0$ ssi $e^{2x} \geq 1$
ssi $2x \geq 0$
ssi $x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

sur $]-\infty ; 0]$ f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ f est croissant

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

car $\lim_{-\infty} e^{x} = 0$ $\lim_{-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$ et le minimum donc $f(0)=0$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et alors

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0}$$

2a) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f'(x)| < 1$ et $f''(x) = 1 - [f'(x)]^2$

Avec $f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Mq $-1 < f'(x) < 1$.

$f'(x) - (-1) = f'(x)+1 = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} > 0$
et
$1 - f'(x) = \frac{2}{e^{2x}+1} > 0$ donc

$-1 < f'(x) < 1$ d'où

$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| < 1$

d'où $|f'(x)| < 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f''(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ ou

encore

$f''(x) = \dfrac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2}$

Avec $f''(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ on a :

Montrons que

$1-(f'(x))^2 = f''(x)$.

$$1-(f'(x))^2 = 1-\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2$$

$$= \frac{(e^{2x}+1)^2-(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = f''(x)$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f''(x) = 1-[f'(x)]^2}$$

Méthode 2 : Avec

$f''(x) = \dfrac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2}$ on a :

8

$$1-(f'(x))^2 = 1-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)^2$$

$$= \frac{(e^{x}+e^{-x})^2-(e^{x}-e^{-x})^2}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2} = f''(x)$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f''(x) = 1-[f'(x)]^2}$$

b) $f''>0$ sur $\mathbb{R}$ donc f' est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f'(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{-\infty} f' ; \lim\limits_{+\infty} f'\right[$

$f'(\mathbb{R}) =]-1 ; 1[$ car $\lim\limits_{-\infty} e^{2x} = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$f'(\mathbb{R}) = 1$ puisque $\lim\limits_{+\infty} e^{-2x} = 0$

or $x \in]-1 ; 1[$ donc il existe X unique tq $f'(X) = x$.

de plus on a bien

$f'(\mathbb{R}) =]-1 ; 1[$.

$f'(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = x$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = x e^{2x} + x$

$\Leftrightarrow e^{2x} - x e^{2x} = 1 + x$

$\Leftrightarrow (1-x) e^{2x} = 1 + x$

$\Leftrightarrow e^{2x} = \dfrac{1+x}{1-x} > 0$

$\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

d'où $\boxed{x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$

on a déjà $f'(IR) =]-1,1[$

3° $n \in IN$, $x \in IR$ et

$$I_n(x) = \int_0^x [f'(u)]^n du$$

a) Justifier que $I_n(x)$ ∃.

La fonction f' est dérivable sur IR donc $(f')^n$ est dérivable sur IR et $0 \in IR$ donc $(f')^n$ ... $I_n(x)$ existe et est bien défini.

Rq $(f')^n$ continue sur $[0;x]$ ou sur $[x,0]$ et $I_n(x)$ existe et est bien définie.

b) Calcule de $I_0(x)$ et $I_1(x)$

$I_0(x) = \int_0^x du = x$

$I_1(x) = \int_0^x [f'(u)] du$

$= [f(u)]_0^x = f(x) - f(0)$

$= f(x) = \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

d'où

$I_0(x) = x$

$I_1(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

c) Sachant que $[f'(x)]^2 = 1 - f''(x)$ Mq

$I_n(x) = I_{n-2}(x) - \frac{1}{n-1}[f'(x)]^{n-1}$

$I_n(x) = \int_0^x [f'(u)]^n du$

$= \int_0^x (f'(u))^2 \times (f'(u))^{n-2} du$

$= \int_0^x (1 - f''(u)) [f'(u)]^{n-2} du$

$= \int_0^x (f'(u))^{n-2} du - \int_0^x f''(u) (f'(u))^{n-2} du$

$= I_{n-2}(x) - \frac{1}{n-1} \left[(f'(u))^{n-1}\right]_0^x$

$= I_{n-2}(x) - \frac{1}{n-1}[f'(x)]^{n-1}$

Car $f'(0) = 0$

d'où $\forall n \geq 2$ on a :

$$\boxed{I_n(x) = I_{n-2}(x) - \frac{1}{n-1}[f'(x)]^{n-1}}$$

d) $n = 2$ $\quad I_2(x) = I_0(x) - f'(x)$

$n = 4$ $\quad I_4(x) = I_2(x) - \frac{1}{3}(f'(x))^3$

$\vdots$

$n = 2p$ $\quad I_{2p}(x) = I_{2p-2}(x) - \frac{1}{2p-1}[f'(x)]^{2p-1}$

Par addition membre à membre et après simplification on a :

$I_{2p}(x) = I_0(x) - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1}[f'(x)]^{2k-1}$

or $I_0(x) = x$ donc

$$\boxed{I_{2p}(x) = x - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1}[f'(x)]^{2k-1}}$$

• $n = 3$ $\quad I_3(x) = I_1(x) - \frac{1}{2}[f'(x)]^2$

$n = 5$ $\quad I_5(x) = I_3(x) - \frac{1}{4}[f'(x)]^4$

$\vdots$

$n = 2p+1$

$I_{2p+1}(x) = I_{2p-1} - \frac{1}{2p-2}[f'(x)]^{2p-2}$

Par addition membre à membre et après simplification on a :

$I_{2p+1} = I_1(x) - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k}[f'(x)]^{2k}$

or $I_1(x) = f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

donc

$$\boxed{I_{2p+1} = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k}[f'(x)]^{2k}}$$

e°) Mq $\forall p \in \mathbb{N}$ (11)

$$0 \leq \int_0^x [f'(u)]^{2p} du \leq x[f'(x)]^{2p}$$

$[f'(u)]^{2p} \geq 0$ et $\int_0^x [f'(u)]^{2p} du \geq 0$

$\forall x \geq 0$:

$$I_{2p}(x) = \int_0^x [f'(u)]^{2p} du$$

$$= \left[u(f'(u))^{2p}\right]_0^x - 2p\int_0^x u f''(u) (f'(u))^{2p-1} du$$

(IPP)

or $-2p\int_0^x u f''(u)(f'(u))^{2p-1} du \leq 0$

et

$$0 \leq \int_0^x [f'(u)]^{2p} du \leq x[f'(x)]^{2p}$$

Rq $\left[u(f'(u))^{2p}\right]_0^x = x[f'(x)]^{2p}$

$f'(x) \in]-1;1[$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} [f'(x)]^{2p} = 0$

donc la suite de terme général $\int_0^x [f'(u)]^{2p} du$ converge vers 0 par encadrement.

4°) $I_{2p}(x) = x - \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1}[f'(x)]^{2k-1}$ (1)

on a aussi $f'(x) = x$ et

$I_{2p}(x) = \int_0^x [f'(u)]^{2p} du$ et $\lim I_{2p}(x) = 0$

donc en posant $x = t(a)$ pour a fixé de $[0;1]$ et

$$\varepsilon_p(a) = t(a) - \sum_{k=1}^{p} \frac{a^{2k-1}}{2k-1}$$

on a $I_{2p}(x) = I_{2p}(t(a))$

$I_{2p}(x) = \varepsilon_p(a)$

Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p}(x) = 0$

et pour $a \in [0;1[$ on a $x \in [0;+\infty[$.

$$\boxed{\lim_{+\infty} \varepsilon_p(a) = 0}$$

(12)

$X = t(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ avec

$x \in]-1;1[$.

$\forall x \in]-1,1[$ $-x \in]-1,1[$ et

$t(-x) = -t(x)$ t est impaire

pour x fixé de $]-1;0[$ on a

$-x \in]0;1[$ et en considérant

la suite $(\ell_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ définie

par $\ell_p(x) = \mathcal{E}_p(-x) = t(-x) - \sum_{k=1}^{p} \frac{(-x)^{2k-1}}{2k-1}$

a aussi pour limite 0 car

$\lim_{p\to+\infty} \mathcal{E}_p(-x) = 0$

5°

$\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$

avec $x = \frac{1}{3} \in [0;1[$ on a :

$\mathcal{E}_3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5}\right)$

or $\mathcal{E}_3\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0$ donc

$\frac{1}{2}\ln 2 \simeq \frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{135}$

$\ln 2 \simeq \frac{2}{3} + \frac{2}{81} + \frac{2}{135} \simeq 0,70$

d'où $\boxed{\ln 2 \simeq 0,70}$

et $\boxed{\alpha \simeq 0,70}$

la machine affiche

$\ln 2 \simeq 0,69314718$

et $\ln 2 - \alpha \simeq -0,00685$

$\alpha - \ln 2 \simeq 0,00685$

$-0,007 < \ln 2 - \alpha < 0,007$

un majorant de

$\ln 2 - \alpha$ est $0,007$ et

α est une valeur approchée de $\ln 2$ à $0,007$ près.

Exercice 4 ③ :

1°a) Mq $\begin{cases} a \equiv b[7] \\ c \equiv d[7] \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd[7]$

$a \equiv b[7] \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $a = b + 7k$

$c \equiv d[7] \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}$ tq $c = d + 7k'$

on a alors

$ac = (b+7k)(d+7k')$

$ac = bd + 7(k'b + kd + 7kk')$

$ac = bd + 7k''$ avec

$k'' = k'b + kb + 7kk' \in \mathbb{Z}$

d'où $ac \equiv bd\ [7]$

Ainsi

$\begin{cases} a \equiv b[7] \\ c \equiv d[7] \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd[7]$

Rq La congruence modulo n est compatible avec la multiplication.

b) Mq $a \equiv b[7] \Rightarrow a^n \equiv b^n[7]$

On raisonne par récurrence.

• pour $n = 0$ $\quad a^0 = 1$ et $b^0 = 1$

$a \equiv b[7] \Rightarrow a^0 \equiv b^0[7]$ car $1 \equiv 1[7]$ et P_0 vrai

• Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Supposons $a^n \equiv b^n \boxed{[7]}$ et Mq $a^{n+1} \equiv b^{n+1}[7]$.

$\begin{cases} a^n \equiv b^n[7] \\ a \equiv b[7] \end{cases} \Rightarrow a \times a^n \equiv b \times b^n[7]$

et $a^{n+1} \equiv b^{n+1}[7]$ donc P_{n+1} vrai.

D'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$

$a \equiv b[7] \Rightarrow a^n \equiv b^n[7]$.

2° $2^3 = 8$ et $8 \equiv 1[7]$ donc

$\boxed{2^3 \equiv 1[7]}$

$3^1 \equiv 3[7] \quad 3^2 \equiv 2[7] \quad 3^3 \equiv 6[7]$

$3^4 \equiv 4[7] \quad 3^5 \equiv 5[7] \quad 3^6 \equiv 1[7]$

donc $\boxed{3^6 \equiv 1[7]}$

3° Soit a un entier non divisible par 7 Mq $a^6 \equiv 1[7]$.

On a :

$a \equiv 1[7]$ ou $a \equiv 2[7]$ ou $a \equiv 3[7]$

$a \equiv 4[7]$ ou $a \equiv 5[7]$ ou $a \equiv 6[7]$

or $1^6 \equiv 1\ [7]$ $2^6 = 64 \equiv 1\ [7]$

$3^6 \equiv 1\ [7]$ $4^6 = 4096 \equiv 1\ [7]$

$5^6 = 15625 \equiv 1\ [7]$; $6^6 = 46656 \equiv 1\ [7]$

Dans tous les cas $a^6 \equiv 1\ [7]$

d'où si est un entier non divisible par 7 on a :

$$\boxed{a^6 \equiv 1\ [7]}$$

b) si $6 \equiv r\ [k]$ avec $0 \le r < k$ on a :

il existe un entier naturel p tel que $6 = r + pk$ et

$a^6 = a^{r+pk} = a^r \times (a^k)^p$ or

$a^6 \equiv 1\ [7]$ d'après 3a et

$a^k \equiv 1\ [7] \Rightarrow a^{kp} \equiv 1\ [7]$

Ainsi $\boxed{a^r \equiv 1\ [7]}$

l'ordre de a est k c'est à dire k est le plus petit entier naturel non nul tq $a^k \equiv 1\ [7]$.

or $0 \le r < k$ et $a^r \equiv 1\ [7]$ donc $r = 0$ et $6 \equiv 0\ [k]$ ce qui traduit que k divise 6.

c) $2^3 \equiv 1\ [7]$ 3 est l'ordre de 2

$3^6 \equiv 1\ [7]$ 6 est l'ordre de 3

$4^3 \equiv 1\ [7]$ 3 est l'ordre de 4

$5^6 \equiv 1\ [7]$ 6 est l'ordre de 5

$6^2 \equiv 1\ [7]$ 2 est l'ordre de 6.

4) $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

$2006 \equiv$; $668 \times 3 + 2$

$2006 = 334 \times 6 + 2$

$2006 = 668 \times 3 + 2$

$2006 = 2 \times 1003$

$2^n = 2^{2006} = 2^{668 \times 3 + 2} = (2^3)^{668} \times 2^2$

$2^{2006} \equiv 4\ [7]$ de même

$3^{2006} \equiv 3^2\ [7]$ et $3^{2006} \equiv 2\ [7]$

$4^{2006} \equiv 16\ [7]$ et $4^{2006} \equiv 2\ [7]$

$5^{2006} \equiv 25\ [7]$ et $5^{2006} \equiv 4\ [7]$

$6^{2006} \equiv 1\ [7]$ donc

$A_{2006} \equiv 13\ [7]$ d'où $\boxed{A_{2006} \equiv 6\ [7]}$