MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

INSPECTION DELEGUEE D'ACADEMIE DE

L'OGOOUE-MARITIME PORT-GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE

UNION - TRAVAIL - JUSTICE

BAC BLANC COMMUN AVRIL 2010

Epreuve de MATHEMATIQUES

Serie : C & E

Durée : 4 heures

Coeff : 5

EXERCICE 1(5 points).

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.On désigne par P_k la probabilité d'obtenir, lors d'un Lancer, la face k avec $1 \leq k \leq 6$ .Ce dé a été pipé de telle sorte que les six faces ne sont pas équiprobables :

- Les nombres $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r.
- Les nombres P_1, P_2, P_4 ,dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1° Démontrer que : $P_k = \frac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 6$.

2° On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants : A ''le nombre obtenu est pair'' ; B '' le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3'' et C'' le nombre obtenu est 3 ou 4 ''

a) Calculer la probabilité de chacun des événements A , B et C .

b) Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.

c) Les événements A et B sont ils indépendants ?. les événements A et C sont ils indépendants ?

3° On utilise ce dé pour un jeu. On dispose d'une urne U contenant 6 boules indiscernables au toucher : 3 rouges , 1 jaune ,2 vertes et d'une urne V contenant 5 boules indiscernables au toucher : 1 rouge , 3 jaunes , 1 verte.

Le joueur lance le dé : s'il obtient un nombre pair , il tire simultanément au hasard 2 boules de l'urne U et s'il obtient un nombre impair, il tire successivement au hasard et sans remise 2 boules de l'urne V.

Le joueur est déclaré gagnant si les deux boules tirées sont de même couleur. On note G cet événement.

a) Montrer que la probabilité de l'événement G est $\frac{59}{210}$.

b) Le joueur est gagnant. Déterminer alors la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé .

c) IL joue cinq fois de suite de façon indépendante .Quelle est à 10^{-2}près, la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois.

EXERCICE 2(5 points).

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct (O , I , J), on considère les points A (6 ; 0) et B (3 ; $\sqrt{3}$).

Soit R_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et R_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et M (x ; y) un point du plan.

1° On pose M_1 (x_1 , y_1) = R_1 (M) et M_2 (x_2 , y_2) = R_2 (M) .Déterminer les expressions analytiques de R_1 et de R_2.

2°a) Démontrer que l'application composée $R_2 o R_1$ est une rotation dont on précisera l'angle $\propto$.

b) On pose M' (x' , y ') = $R_2 o R_1$ (M).Exprimer x' et y'en fonction de x et y. En déduire le centre Ω de $R_2 o R_1$.

c) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tel que M' appartienne à la droite (D) d'équation y = x – 6.

3°a) Soit S la symétrie orthogonale d'axe (A B) . Démontrer qu'il existe deux symétries orthogonales S_1et S_2 d'axes respectifs (D_1) et (D_2) telles que : $R_1 = SoS_1$ et $R_2 = S_2oS$. En déduire que $R_2 o R_1 = S_2 o S_1$.

b) Montrer que (D_1) et (D_2) ont pour équations respectives y = - x+ 6 et y = x $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Retrouver le résultat 2b et placer Ω.

c) On pose M_3 (x_3 , y_3) = S_1(M). Déterminer l'expression analytique de S_1.

PROBLEME. (10 points)

PARTIE A : Résolution d'une équation différentielle avec second membre.

1.(E_0) désigne l'équation differentielle : $y'' + 2y' + y = 0$. Déterminer les solutions générales de (E_0).

2.(E) est l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

a) Vérifier que la fonction h définie sur IR par $h(x) = x^2 e^{-x}$ est une solution particulière de (E) .

b) Démontrer que ϕ est une solution de (E) si et seulement si $\phi - h$ est solution de (E_0).

c) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .

d) Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales : $f_0(0) = 1$ et $f_0'(0) = 1$

PARTIE B : Etude et représentation graphique d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ,l'unité graphique étant égale à 2 cm.

1.a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

b) Tracer avec soin la courbe (C).

2. a) Montrer rigoureusement que l'équation $f(x) = 2$ admet dans IR , une seule solution $\propto$.

b) Montrer que $-2 < \propto < -1$ et que $\propto$ vérifie la relation $\propto = -1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{\propto}{2}}$

3. On note F la primitive sur IR de f qui s'annule en 0.

a) Sachant que f est une solution de (E) , déterminer la valeur explicite de F (x) pour tout réel x.

b) Ecrire F (x) sous forme d'intégrale et déterminer F (x) à l'aide de deux intégrations par parties.

c) Calculer $I = \int_0^1 f(t)dt$ et interpréter graphiquement le résultat.

PARTIE C : Détermination d'une valeur approchée de $\propto$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $K = [-2 ; -1]$ par , $g(x) = -1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{x}{2}}$.

1. Montrer $g(K) \subset K$ et que $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x élément de K.

2. On définit la suite (U_n) par $U_0 = -2$ et pour tout $n \geq 0$ $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer que : pour tout n entier naturel , U_n appartient à K et $|U_{n+1} - \propto| \leq \frac{1}{2}|U_n - \propto|$.

b) Montrer que : pour tout n entier naturel , $|U_n - \propto| \leq (\frac{1}{2})^n$. En déduire la convergence et la limite de la suite (U_n).

c) Déterminer une valeur approchée de $\propto$ à 10^{-3} près.

PARTIE D : Etude de la convergence d'une suite par la méthode des rectangles.

Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par $V_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k+n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$.

1. Pour tout entier naturel non nul n ,vérifier qu'on a : $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = V_n + \frac{1}{n} - \frac{4}{ne}$.

2. Etablir que , pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n}) \quad \text{et} \quad V_n + \frac{1}{n} - \frac{4}{ne} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq V_n .$$

3. Montrer que : pour tout entier naturel non nul n on a : $I \leq V_n \leq I - \frac{1}{n} + \frac{4}{ne}$ .En déduire la convergence et la limite de la suite (V_n) .

Corrigé type du Bac blanc Avril 2010

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

$P_1, P_2, \cdots P_6$ en progression arithmétique
P_1, P_2 et P_4 en progression géom.

1° Montrons que $P_k = \frac{k}{21}$

$P_2 = P_1 + r$; $P_3 = P_1 + 2r$ $P_4 = P_1 + 3r$
$P_5 = P_1 + 4r$ et $P_6 = P_1 + 5r$

avec $P_1 + P_2 + \cdots + P_6 = 1$ on a : $\boxed{6P_1 + 15r = 1}$
D'autres parts P_1, P_2 et P_4 étant en progression géométrique on a :
$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_4}{P_2}$ et $P_2^2 = P_1 P_4$ ou encore
$(P_1 + r)^2 = P_1(P_1 + 3r)$ d'où
$P_1^2 + 2rP_1 + r^2 = P_1^2 + 3P_1 r$ et enfin
$P_1 r = r^2$. Les six faces ne sont pas équiprobables donc $r \neq 0$ et $P_1 = r$
Avec $6P_1 + 15r = 1$ on a $21 P_1 = 1$
et $\boxed{P_1 = r = \frac{1}{21}}$ et alors
$P_2 = \frac{1}{21}$; $P_3 = \frac{3}{21}$; $P_4 = \frac{4}{21}$
$P_5 = \frac{5}{21}$ et $P_6 = \frac{6}{21}$ Ainsi

$$\boxed{P_k = \frac{k}{21} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 6}$$

Rq avec $P_1 = r = \frac{1}{21}$ et $P_k = P_1 + (k-1)r$
on a : $P_k = P_1 + (k-1)P_1 = kP_1$
C'est à dire $\boxed{P_k = \frac{k}{21}}$

2° $A = \{2; 4; 6\}$ $B = \{3; 4; 5; 6\}$
$C = \{3; 4\}$. $A \cap B = \{4; 6\}$

a) Déterminons $P(A)$; $P(B)$ et $P(C)$.

$P(A) = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$
$P(B) = P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$
$P(C) = P_3 + P_4 = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

b) Déterminons $P(B/A)$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}$$

Car $P(A \cap B) = P_4 + P_6 = \frac{10}{21}$

c) $P(B/A) = \frac{5}{6} \neq \frac{6}{7} = P(B)$
donc A et B ne sont pas indépendants

Rq ou encore $P(A \cap B) = \frac{10}{21} \neq P(A) \times P(B)$

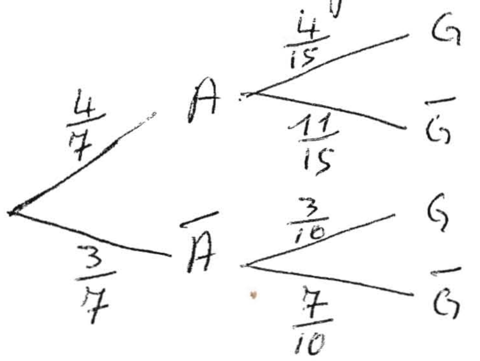
$P(A \cap C) = P_4 = \frac{4}{21}$
$P(A) \times P(C) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{21}$
$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ donc A et C sont indépendants.

3° U contient 3 Rouges, 1 Jaune et 2 Verts.
on tire simultanément 2 boules de même couleur. La probabil. d'avoir 2 boules de même couleur est $P = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_6^2} = \frac{4}{15}$

… tire successivement et sans remise 2 boules de V.
La probabilité qu'elles soient de même couleur est

$$P' = \frac{3\times 2}{5\times 4} = \frac{3}{10}$$

d'où l'arbre pondéré ci-dessous



$$G = (A\cap G)\cup(\bar{A}\cap G)$$

D'après la formule des probabilités totales.

$$P(G) = \frac{4}{7}\times\frac{4}{15} + \frac{3}{7}\times\frac{3}{10} =$$

$$P(G) = \frac{32+27}{7\times 5\times 3\times 2} = \frac{59}{210}$$

donc $\boxed{P(G) = \frac{59}{210}}$

b) $P(A/G) = \dfrac{P(A\cap G)}{P(G)}$

$$P(A/G) = \frac{P(A)\times P(G/A)}{P(G)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7}\times\frac{4}{15}}{\frac{59}{210}} = \frac{32}{59}$$

d'où $\boxed{P(A/G) = \frac{32}{59}}$

(2)

c) Un Joueur joue cinq fois de suite de façon indépendante.

On a un schema de Bernoulli de paramètre $n = 5$ et $p = \frac{59}{210}$

$q = 1-p = \frac{151}{210}$ et $P_{k'} = C_5^{k'}\left(\frac{59}{210}\right)^{k}\left(\frac{151}{210}\right)^{5-k}$

$0\leq k'\leq 5$

Ainsi pour $k' = 2$ on a

$$P_2 = C_5^2\left(\frac{59}{210}\right)^2\left(\frac{151}{210}\right)^3$$

$\boxed{P_2 \simeq 0,29}$

EXERCICE 2

$A(6;0)$ $B(3;\sqrt{3})$ $M\binom{x}{y}$

$R_1 = r(A, \frac{\pi}{6})$ et $R_2 = r(B, \frac{2\pi}{3})$

1° Expressions analytiques

$R_1(M) = M_1 \Leftrightarrow z_1 - z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_A)$

$R_2(M) = M_2 \Leftrightarrow z_2 - z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_B)$

on trouve R_1 $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 6 - 3\sqrt{3} \\ y_1 = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 \end{cases}$

R_2 $\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 6 \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y. \end{cases}$

2°a) $R_2 o R_1$ est la composée de deux rotations de centres distincts et la somme des angles est $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \neq 0\ [2\pi]$, donc $R_2 o R_1$ est une rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

b) Par composition des deux expressions analytiques on trouve $\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 3 + 3\sqrt{3} \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 + 3\sqrt{3} \end{cases}$

avec $R_2 o R_1(\Omega) = \Omega$ on a $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

et $\Omega(9 - 3\sqrt{3}; -3 + 3\sqrt{3})$.

c) Determinons (E).

$M\binom{x}{y} \in (E) \Leftrightarrow M'\binom{x'}{y'} \in (D)$ $y' = x' - 6$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 + 3\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 3 + 3\sqrt{3} - 6$

$\Leftrightarrow y = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}x \Leftrightarrow y = (2+\sqrt{3})x$

d'où (E) est la droite d'equation $\boxed{y = (2+\sqrt{3})x}$

3°a) $S = S_{(AB)}$.

La droite (AB) passe par les point A et B centres respectifs de R_1 et R_2 donc il existe une droite (D_1) et une seule, une droite (D_2) et une seule telle que

$R_1 = S o S_{D_1}$ et $R_2 = S_{D_2} o S$

avec $S_{D_1} = S_1$ et $S_{D_2} = S_2$ on a alors $R_2 o R_1 = S_2 o S o S o S_1 = S_2 o S_1$ car $S o S = Id_{\mathcal{P}}$.

b) (D_1) est l'image de (AB) par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{12}$. (D_1) passe par A et est dirigé par le vecteur $\vec{u}_1$ d'affixe $z_{\vec{u}_1} = e^{-i\frac{\pi}{12}} z_{\overrightarrow{AB}} = e^{-i\frac{\pi}{12}} \times 2\sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}$

car $z_{\overrightarrow{AB}} = -3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et

$z_{\vec{u}_1} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{6}(-1+i)$

$\vec{u}_1\binom{-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ donc la droite (D_1) a pour coefficient directeur -1

avec $A\binom{6}{0} \in (D_1)$ $y = -x + b$

on a $b = 6$ et

La droite (D_1) a pour equation

$\boxed{y = -x + 6}$

(D_2) est la droite passant par B et image de (AB) par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Un vecteur direct. de (D_2) est le vecteur $\vec{u_2}$ d'affixe $z_{\vec{u_2}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_{\vec{BA}}$ or $z_{\vec{BA}} = 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ donc

$z_{\vec{u_2}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} = 3+i\sqrt{3}$

le coefficient directeur $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(D_2) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ avec

$B\begin{pmatrix}3\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} \in (D_2)$ on a: $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\times 3 + b$

$\sqrt{3} = \sqrt{3} + b$ et $b = 0$

donc La droite (D_2) a pour equation $\boxed{Y = \frac{x\sqrt{3}}{3}}$

en resolvant le système $\begin{cases} Y = \frac{x\sqrt{3}}{3} \\ y = -x+6 \end{cases}$ on a $\begin{cases} \frac{x\sqrt{3}}{3} = -x+6 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$ et

$x = 9 - 3\sqrt{3}$ et $y = -3+3\sqrt{3}$

ce qui donne $\Omega\begin{pmatrix} 9-3\sqrt{3} \\ -3+3\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

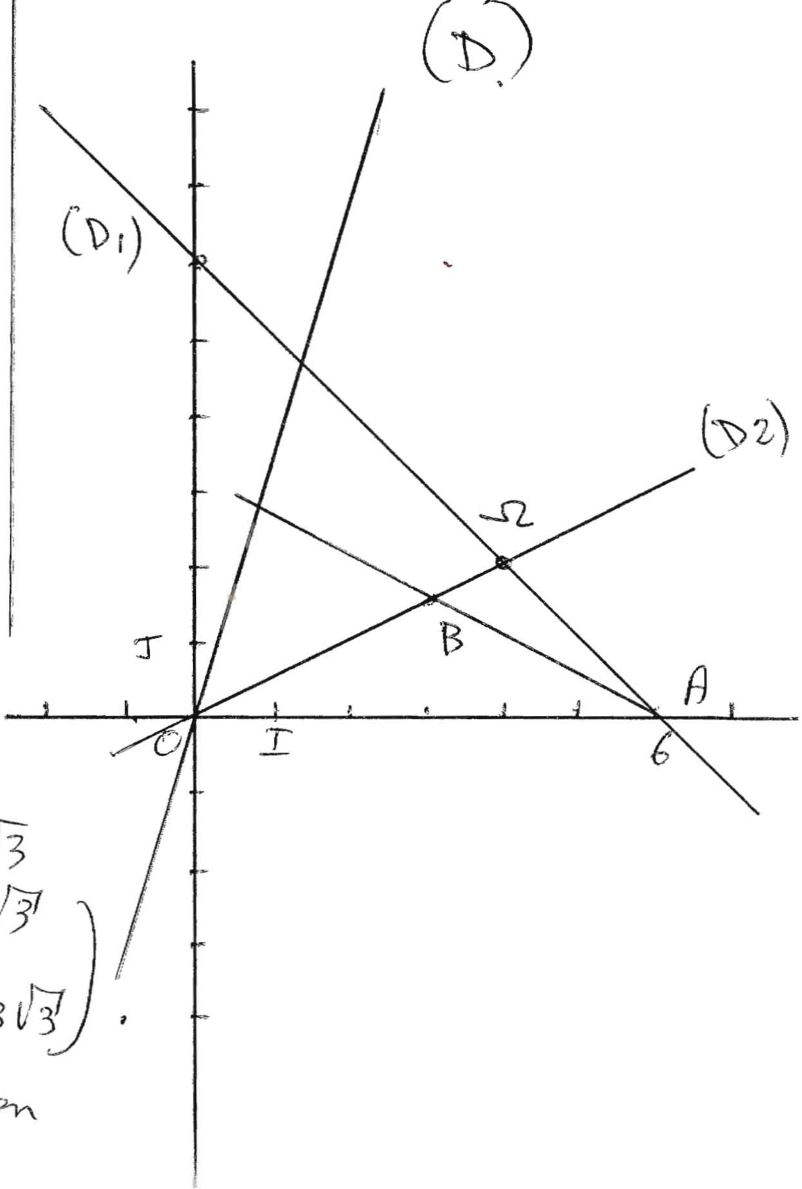
c) Determinons l'expression analytique de S_1. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $M_3\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$ avec $M \notin (D_1)$ et $S_1(M) = M_3$, $K\begin{pmatrix}\frac{x+x_3}{2}\\ \frac{y+y_3}{2}\end{pmatrix}$ milieu de $[MM_3]$.

le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ dirige (D_1)

on a: $\begin{cases} \vec{MM_3} \perp \vec{u} \\ K \in (D_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - x - y_3 + y = 0 \\ \frac{y+y_3}{2} = -\frac{x+x_3}{2} + 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 - x - y_3 + y = 0 \\ y_3 + y = -x - x_3 + 12 \end{cases}$ on trouve

$\begin{cases} x_3 = -y + 6 \\ y_3 = -x + 6 \end{cases}$



Problème A

1.- (E_0) $y''+2y'+y=0$

l'equation caractéristique $r^2+2r+1=0$
$(r+1)^2=0$

admet une seule solution -1 donc

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto (Ax+B)e^{-x}$.

2. (E) $y''+2y'+y=2e^{-x}$

a) Verifions que h est une solution particulière de (E) avec $h(x)=x^2e^{-x}$

h est au moins deux fois deriv sur $\mathbb{R}$ et $h'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

$h''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$ on a :

$h''(x)+2h'(x)+h(x)=2e^{-x}$ donc

h est une solution de (E).

b) Demontrons que :

ϕ Solution de $(E) \iff \phi-h$ solution de (E_0).

$\phi-h$ solution de $(E_0) \iff$

$(\phi-h)''+2(\phi-h)'+(\phi-h)=0$

$\iff \phi''+2\phi'+\phi-(h''+2h'+h)=0$

$\iff \phi''+2\phi'+\phi=h''+2h'+h$

$\iff \phi''+2\phi'+\phi=2e^{-x}$ car h solution de (E)

d'où l'equivalence.

c) avec $\phi(x)-h(x)=(Ax+B)e^{-x}$

on a $\phi(x)=(Ax+B)e^{-x}+h(x)$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto (Ax+B)e^{-x}+x^2e^{-x}$

d) avec $f_0(x)=(Ax+B)e^{-x}+x^2e^{-x}$

déterminons A et B avec $f_0(0)=1$ et $f_0'(0)=1$.

$f_0(0)=1 \iff B=1$.

$f_0'(x)=Ae^{-x}-(Ax+B)e^{-x}+2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

$f_0'(0)=1 \iff A-B=1 \iff A=B+1=2$

et $f_0(x)=(2x+1)e^{-x}+x^2e^{-x}$

et $f_0(x)=(x^2+2x+1)e^{-x}$ d'où

$$\boxed{f_0(x)=(x+1)^2e^{-x}}$$

B

Soit $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

1 a) Sens de variation et tableau de variation de f_0

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\boxed{f'(x)=(1-x^2)e^{-x}}$

$e^{-x}>0$ et $f'(x)$ est de Signe de $1-x^2$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

sur les intervalles $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$ f est decroissante.

sur $[-1;1]$ f est croissante

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{-\infty} (x+1)^2 = +\infty \end{cases}$

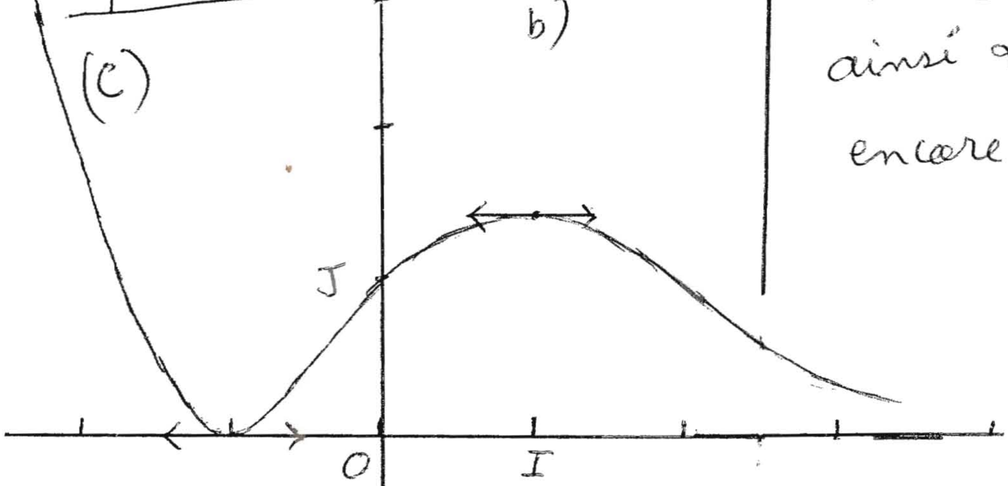
• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x} = 0$

car $\lim\limits_{+\infty} x^2 e^{-x} = 0$ $\quad \lim\limits_{+\infty} x e^{-x} = 0$

• Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

b)



2°a) * d'après le tableau de variation $\frac{4}{e}$ est le maximum de f sur $[-1; +\infty[$ atteint en 1 or $\frac{4}{e} < 2$ donc l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur $[-1; +\infty[$.

* sur $]-\infty; -1]$ f est continue et strictement décroissante et $f(]-\infty; -1]) = [0; +\infty[$ donc f réalise une bijection de $]-\infty; -1]$ sur $[0; +\infty[$ or $2 \in [0; +\infty[$ d'où l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty; -1]$.

En conclusion l'équation $f(x)=2$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution α.

b) Montrons que $-2 < \alpha < -1$

$f(-2) \simeq 7,3 > 2$

$f(-1) \simeq 0 < 2$

donc $\boxed{-2 < \alpha < -1}$

Montrons que $\alpha = -1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{\alpha}{2}}$

$f(\alpha) = 2 \iff (\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = 2$

$\iff (\alpha+1)^2 = 2e^{\alpha} \iff \alpha + 1 = -\sqrt{2e^{\alpha}}$

car $\alpha \in]-2; -1[$ et $\alpha + 1 \in]-1; 0[$.

ainsi $\alpha = -1 - \sqrt{2e^{\alpha}}$ ou encore $\boxed{\alpha = -1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{\alpha}{2}}}$

Car $\sqrt{e^{\alpha}} = (e^{\alpha})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\alpha}{2}}$

$\mathbf{1)}$ a- Déterminons $F(x)$ sachant que $f''(t)+2f'(t)+f(t)=2e^{-t}$.

$$\int_0^x f''(t)dt+2\int_0^x f'(t)\,dt+\int_0^x f(t)dt=2\int_0^x e^{-t}dt$$

$$[f'(t)]_0^x+2[f(t)]_0^x+F(x)=-2[e^{-t}]_0^x$$

$$F(x)=-2[e^{-t}]_0^x-[f'(t)]_0^x-2[f(t)]_0^x$$

$$\boxed{F(x)=-(x^2+4x+5)e^{-x}+5}$$

b) Déterminons $F(x)$ à l'aide de 2 IPP.

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (t+1)^2e^{-t}dt$$

$$F(x)=-\left[(t+1)^2e^{-t}\right]_0^x+2\int_0^x (t+1)e^{-t}dt$$

$$F(x)=-\left[(t+1)^2e^{-t}\right]_0^x+2\left(-\left[(t+1)e^{-t}\right]_0^x+\int_0^x e^{-t}dt\right)$$

$$F(x)=-\left((x+1)^2e^{-x}-1\right)-2\left[(t+1)e^{-t}\right]_0^x-2\left[e^{-t}\right]_0^x$$

on trouve

$$\boxed{F(x)=-(x^2+4x+5)e^{-x}+5}$$

c) calculons $I=\int_0^1 f(t)dt$

$$\boxed{I=[F(t)]_0^1=5-\frac{10}{e}}$$

$I>0$ et I est l'aire en u.a de la partie du plan limitée par (C), l'axe (OI) et les droites $x=0$ et $x=1$

PARTIE C

$1°)$ $g(x)=-1-\sqrt{2}\,e^{\frac{x}{2}}$ $x\in[-2;-1]$

g est dérivable sur K et $g'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{x}{2}}<0$

$g'(x)<0$ et g est strictement décroiss sur $K=[-2;-1]$ Ainsi

$-2\le x\le -1 \Rightarrow g(-1)\le g(x)\le g(-2)$

or $g(-1)\simeq -1{,}8>-2$ et $g(-2)\simeq -1{,}5<-1$.

et alors $-2\le g(x)\le -1$ $\forall x\in[-2;-1]$

d'où $g(K)\subset K$.

Rq on peut procéder aussi par encadrement.

Montrons que $|g'(x)|\le\frac{1}{2}$

$-2\le x\le -1 \Rightarrow -1\le\frac{x}{2}\le-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$e^{-1}\le e^{\frac{x}{2}}\le e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}\le-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{x}{2}}\le-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1}$

or $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}\simeq -0{,}42$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1}\simeq -0{,}26$

$-0{,}42\le g'(x)\le -0{,}26\le\frac{1}{2}$

on a $-\frac{1}{2}\le g'(x)\le\frac{1}{2}$ et $|g'(x)|\le\frac{1}{2}$

d'où $\forall x\in K$ $|g'(x)|\le\frac{1}{2}$

Rq on peut utiliser $|g'(x)|=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{x}{2}}$

$2°)$ a) $u_0=-2$ et $u_{n+1}=g(u_n)$

notons (P_n) $u_n\in K$, $n\in\mathbb{N}$

- pour $n=0$ on a $u_0=-2\in K$ et P_0 vraie.
- Soit n un entier naturel. Supposons $u_n\in K$ et Montrons que $u_{n+1}\in K$.

si $u_n\in K$ on a $u_{n+1}=g(u_n)\in K$ car $g(K)\subset K$ et P_{n+1} vraie

d'où $u_n\in K$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Montrons que $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

g est derivable sur K et $|g'| \leq \frac{1}{2}$ sur K.

d'après IAF avec $u_n \in K$ et $\alpha \in K$ on a :

$|g(u_n)-g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

or $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(\alpha) = -1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}} = \alpha$

donc $\boxed{|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \quad \forall n}$.

b) Montrons que $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

pour $n=0$ on a : $|u_1-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0-\alpha|$

$n=1$ $\quad |u_2-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1-\alpha|$

⋮

$n=n-1$ $\quad |u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1}-\alpha|$

Tous les n termes étant positifs, par produit membre à membre et après simplification on a

$|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

majorons $|u_0-\alpha|$

avec $-2 \leq \alpha \leq -1$ on a $1 \leq -\alpha \leq 2$

$-1 \leq u_0-\alpha \leq 0 \leq 1$

$-1 \leq u_0-\alpha \leq 1$ et

$|u_0-\alpha| \leq 1$ et alors

$|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(8)

$0 < \frac{1}{2} < 1 \quad \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc $\lim\limits_{+\infty} u_n = \alpha$ d'où la suite (u_n) converge vers le réel α.

c) Determinons une valeur approchée de α à 10^{-3}.

Il suffit de trouver n tq $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-3}$ on a alors

$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \ln 10^{-3} \Rightarrow n \ln\frac{1}{2} \leq \ln 10^{-3}$

$\Rightarrow n \geq \dfrac{\ln 10^{-3}}{\ln\frac{1}{2}}$ or $\dfrac{\ln 10^{-3}}{\ln\frac{1}{2}} \simeq 9,96$

on peut prendre $n=10$ et u_{10} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

avec $u_1 = g(u_0)$

$u_2 = g(u_1)$

⋮

$u_{10} = g(u_9)$

on trouve par calcul

$\boxed{u_{10} \simeq -1,627}$

Partie D

$$V_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k+n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$$

1- Montrons que $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+1\right)^2 e^{-\frac{k}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+n)^2}{n^2}e^{-\frac{k}{n}}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k+n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$$

$= V_n$ d'où

$$\boxed{V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Montrons que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = V_n + \frac{1}{n} - \frac{4}{ne}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{0}{n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$= V_n + \frac{1}{n}f(0) - \frac{1}{n}f(1)$$

$= V_n + \frac{1}{n} - \frac{4}{ne}$ d'où

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = V_n + \frac{1}{n} - \frac{4}{ne}}$$

2° f est croissante sur $[0;1]$ et

$\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right] \subset [0;1]$

$$\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dt$$

donc

$$\boxed{\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\,dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$$V_n + \frac{1}{n} - \frac{4}{ne} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

d'où

$$\boxed{V_n + \frac{1}{n} - \frac{4}{ne} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

3° avec $I = \int_0^1 f(t)dt$ on a

$I \leq V_n$ et $V_n + \frac{1}{n} - \frac{4}{ne} \leq I$

donc $I \leq V_n$ et $V_n \leq I - \frac{1}{n} + \frac{4}{ne}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ on a :

$$\boxed{I \leq V_n \leq I - \frac{1}{n} + \frac{4}{ne}}$$

$$\lim_{+\infty} I = I = \lim_{+\infty} I - \frac{1}{n} + \frac{4}{ne}$$

car $\lim_{+\infty}\frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{+\infty}\frac{4}{ne} = 0$

Ainsi $\lim_{+\infty} V_n = I$ par encadrement et la suite (V_n) converge vers I.

FIN