D7

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES ENSEIGNEMENTS DU SECOND DEGRE
LYCEE JOSEPH AMBOUROUE-AVARO
BP 236 TEL : 55-21-73

Série : C
Coeff : 5
Durée: 4 h

BAC BLANC 2 (2001)
EPREUVE DE *MATHEMATIQUES*

EXERCICE 1 **(3,5 points)**

On tire trois boules simultanément et au hasard d'une urne contenant trois boules blanches, trois boules vertes, trois boules noires et trois boules rouges. On suppose l'équiprobabilité des tirages.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. X est la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches obtenues.
   1 Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Pour gagner il faut tirer au moins deux boules blanches, mais on estimes qu'un joueur sur dix est un tricheur et qu'un tricheur gagne avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.

On note: T l'événement « être un tricheur », $\overline{T}$ l'événement contraire de T et G l'événement «gagner au jeu ».

a. Calculer la probabilité de l'événement « gagner pour un non tricheur » c'est-à-dire 0,5 $P_{\overline{T}}(G)$.
0,5 En déduire la probabilité de l'événement $G \cap \overline{T}$.

0,5 b. Calculer $P(T \cap G)$.

0,5 c. Démontrer que la probabilité de l'événement G est $\frac{181}{1100}$.

d. Calculer la probabilité qu'une personne qui a gagner soit un tricheur.

EXERCICE 2 **(6,5 points)**

Dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère la courbe (Γ_m) d'équation : $y^2=mx^2-(m-1)x-3(2m+1)$, où m désigne un nombre réel donné.

0,25 A. a) Vérifier que le point A(3 ;0) appartient à la courbe (Γ_m), quel que soit le réel m.

b) On suppose dans cette question que m est non nul.

0,75 Montrer que la courbe (Γ_m) est une conique à centre.
Montrer que le centre I_m de (Γ_m) a pour coordonnées ($\frac{m-1}{2m}$; 0).

0,25 Préciser suivant les de m, si (Γ_m) est une ellipse ou une hyperbole. Equat° et courbes asymp 0,25

c) Construire les courbes (Γ_{-1}) et (Γ_1). (0,25+0,25) + (0,25+0,25) /

B. Soit (a ;b) un couple de nombres complexes. On appelle τ la transformation du plan (P) qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par z'= az + b.

a) Déterminer a et b pour que les points A(3 ; 0) et B (-3 ; 0) aient pour images respectives par τ les points A' (3 ; -3) et B' (-3 ; 3).
Préciser la nature de τ et ses éléments caractéristiques.

Dans la suite de l'exercice, τ est la transformation ainsi déterminée.

b) Justifier que l'ensemble (Γ'_{-1}), transformé de (Γ_{-1}) par τ, est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c) Exprimer les coordonnées x' et y' du point M' en fonction des coordonnées x et y du point M, puis x et y en fonction de x' et y'.

d) En déduire une équation de (Γ'_1), transformé de (Γ_1) par τ. Construire la courbe (Γ'_1) sur la figure.

C. Dans cette question, on étudie le cas m=0.

a) Quelle est la nature de la courbe (Γ_0) ? On fera une deuxième figure, représentant (Γ_0).

b) On appelle G le barycentre de la famille { (A,2), (B,1), (M,1)}, où le point M décrit (Γ_0). On appelle alors (γ_0) la courbe décrite par G.

Démontrer que (γ_0) est l'ensemble transformé de (Γ_0) par une homothétie de centre I_1(1,0) dont on précisera le rapport.

On appelle M_1 et M_2 les points de (Γ_0) d'abscisses respectives 4 et 7, dont les ordonnées sont positives. Construire les barycentres G_1 et G_2 correspondants.

PROBLEME **(10 points)**

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal ($O,\vec{i},\vec{j}$); (unité graphique: 4 cm).

Partie A : Etude de f.

1°) a) Calculer f '(x) pour tout réel x, puis étudier le signe de f '(x)suivant les valeurs de x. En déduire le sens de variation de f.

b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et dresser le tableau de variation de f.

2°) Démontrer que le point A de coordonnées (0 ; $\dfrac{1}{2}$) est centre de symétrie de (bC).

3°) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A.

4°) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x-f(x)$.

a) Démontrer que $\forall$ $x\in]-\infty\,;0[$, $\varphi(x)>0$ et que $\forall$ $x\in]0\,;+\infty[$, $\varphi(x)<0$.

b) En déduire la position de (T) par rapport à (C).

c) Tracer (T) et (C).

Partie B : Etude d' une fonction fm .

Pour tout nombre réel non nul m, on considère les fonctions f_m définie par $f_m(x)=f(\dfrac{x}{m})$.

(C_m) désigne la courbe représentative de f_m dans le repère ($O, \vec{i}, \vec{j}$). Soit T_m la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{HM'} = m\overrightarrow{HM}$, où H est le projeté orthogonal de M sur (O ; $\vec{j}$).

2,5

1°) a) Déterminer la nature de T_{-1}. 0,25

b) Démonter que (C_m) est l'image par T_m de (C). 0,75

c) Tracer (C_{-1}). 0,5

2°) Soit λ un nombre réel. On pose $I_m(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f_m(x)dx$.

Calculer $I_m(\lambda)$ et en déduire que $I_m(\lambda)$ est indépendante de m. 1

Partie C : Approche d' une solution d'équation.

Soit g la fonction définie sur IR par : g(x)=x – f(x).

7

1°) a) Etudier le sens de variation de g. 0,25 + 0,25

b) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ 0,25 + 0,25

c) En déduire que l'équation f(x)=x admet une solution unique α et que $\frac{1}{4} \le \alpha \le \frac{1}{2}$. 0,25 + 0,25

2°) a) Démontrer que : $\forall\, x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, $f(x) \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$. 0,25

b) Calculer f ''(x). En déduire que : $\forall\, x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, $|f'(x)| \le \frac{1}{4}$. 0,25 + 0,25

c) En déduire que : $\forall\, x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, $|f(x)-\alpha| \le \frac{1}{4}|x-\alpha|$. 0,25

3°) Soit (U_n) la suite de nombres réels définies par la relation de récurrence : $U_0=\frac{1}{4}$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Démontrer que : $\forall\, n \in IN$, $U_n \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$. 0,25

b) Démontrer que : $\forall\, n \in IN$, $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{4}|U_n-\alpha|$. 0,25

c) En déduire que : $\forall\, n \in IN$, $|U_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$. 0,25 + 0,25

4°) a) Déterminer la limite de (U_n). 0,25

b) Trouver le plus petit entier naturel p tel que : $|U_p-\alpha| \le 10^{-2}$. 0,25

c) En déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près. 0,25

- FIN -

I L'urne contient 12 boules : 3 rouges (R) ; 3 noires (N) ; 3 vertes (V) et 3 blanches (B).

1°) On tire simultanément 3 boules donc chaque éventualité est une combinaison de 3 boules parmi 12 donc Card $\Omega = C_{12}^3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 220$

$X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ $\quad P(X=0) = \frac{C_9^3}{C_{12}^3} = \frac{84}{220} = \frac{21}{55}$

$P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_9^2}{C_{12}^3} = \frac{108}{220} = \frac{27}{55}$; $\quad P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_9^1}{C_{12}^3} = \frac{27}{220}$

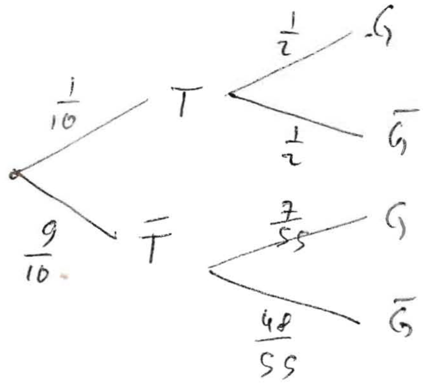
$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{220}$

1

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

2°) a) $P_{\overline{T}}(G) = P_{\overline{T}}(G) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{27}{220} + \frac{1}{220} = \frac{28}{220} = \frac{7}{55}$

on a l'arbre pondéré ci-dessous



0,5 $\boxed{P_{\overline{T}}(G) = \frac{7}{55}}$

$P(G \cap \overline{T}) = P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(G)$

0,5 $\boxed{P(G \cap \overline{T}) = \frac{9}{10} \times \frac{7}{55} = \frac{63}{550}}$

0,5 b) $P(T \cap G) = P(T) \times P_T(G) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$

c) $G = (G \cap \overline{T}) \cup (G \cap T)$ partition de G.

d'après la formule des probabilités totales.

0,5 $P(G) = P(G \cap \overline{T}) + P(G \cap T) = \frac{63}{550} + \frac{1}{20} = \frac{126}{1100} + \frac{55}{110} =$

$\boxed{P(G) = \frac{181}{1100}}$

d) $P(T/G) = \frac{P(G \cap T)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{181}{1100}} = \frac{1}{20} \times \frac{1100}{181}$

0,5 $P(T/G) = \frac{55}{181}$

II

II (Γ_m) $y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1)$

A- a) pour $x = 3$ et $y = 0$ on a $y^2 = 0^2 = 0$ et

0,25 $m3^2 - (m-1)3 - 3(2m+1) = 9m - 3m + 3 - 6m - 3 = 0$ donc

$A(3;0) \in (\Gamma_m)$ $\forall m$.

b) On suppose que $m \neq 0$, Montrons que (Γ_m) est une conique à centre.

$$y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1)$$

$$y^2 = m\left[x^2 - \frac{m-1}{m}x\right] - 3(2m+1)$$

$$y^2 = m\left[\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)^2 - \left(\frac{m-1}{2m}\right)^2\right] - 3(2m+1)$$

$$y^2 = m\left[\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)\right]^2 - m\left(\frac{m-1}{2m}\right)^2 - 3(2m+1)$$

$$y^2 = m\left[x - \frac{m-1}{2m}\right]^2 - \frac{m^2-2m+1}{4m} - \frac{12m(2m+1)}{4m}$$

$$y^2 = m\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)^2 - \frac{(5m+1)^2}{4m}$$

$$y^2 - m\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)^2 = -\frac{(5m+1)^2}{4m}$$

$$-\frac{y^2}{\frac{(5m+1)^2}{4m}} + \frac{\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)^2}{\frac{(5m+1)^2}{4m^2}} = 1$$

$$\boxed{\frac{\left(x - \frac{m-1}{2m}\right)^2}{\left(\frac{5m+1}{2m}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{(5m+1)^2}{4m}} = 1}$$

- La courbe (Γ_m) est donc une conique de centre $I_m\left(\frac{m-1}{2m}; 0\right)$
- et la nature de (Γ_m) dépend du signe de m car $(5m+1)^2 > 0$

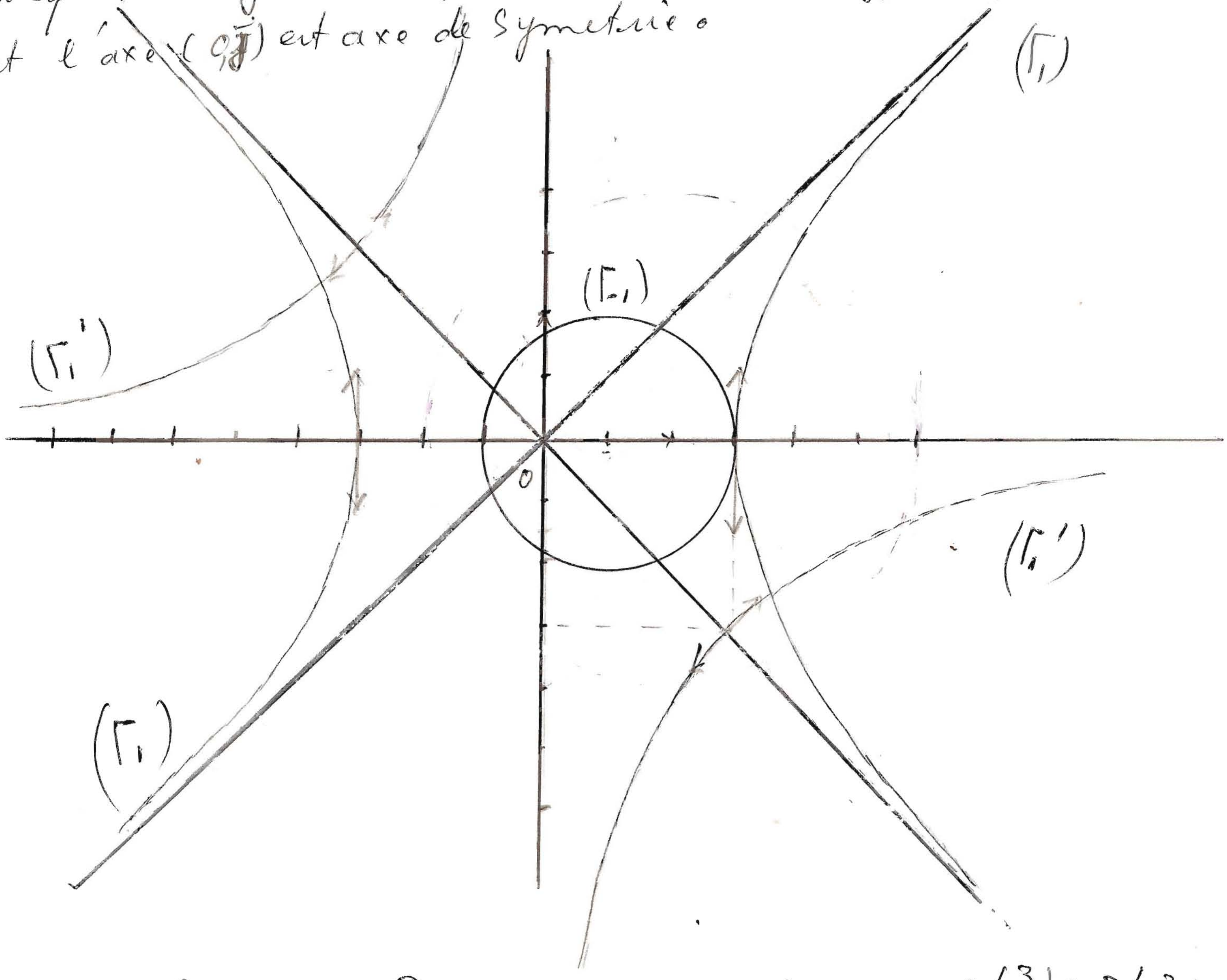
- Si $m < 0$ (Γ_m) est une ellipse
- Si $m > 0$ (Γ_m) est une hyperbole.

c) si $m = -1$ (Γ_{-1}) ~~a~~ pour équation $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

ou encore $(x-1)^2 + y^2 = 4$ donc $(\Gamma_{-1}) = \mathcal{C}(I_{-1}; 2)$ avec $I_{-1}(1;0)$.

(3

Si $m=1$, (Γ_1) a pour équation $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ et (Γ_1) est une hyperbole d'axe focal $(O,\vec{i})$ et d'asymptotes les droites d'équation $y=x$ et $y=-x$. (Γ_1) est une hyperbole équilatère et l'axe $(O,\vec{j})$ est axe de symétrie.



B- a) f $\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ $M\longmapsto M'$ $M(z)$ et $M'(z')$ $A\binom{3}{0}$; $B\binom{-3}{0}$

$z'=az+b$ $A'\binom{3}{-3}$; $B'\binom{-3}{3}$

$\begin{cases} z'_A=az_A+b \\ z'_B=az_B+b \end{cases}$ $\begin{cases} 3-3i=3a+b \\ -3+3i=-3a+b \end{cases}$ $a=1-i$, $b=0$

$$z'=(1-i)z=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}z$$

f est la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$.

b) (Γ_{-1}) est le cercle de centre $I_{-1}(1;0)$ et de rayon 2 ~~dont~~ toute similitude directe transforme un cercle en un cercle. donc le transformé de (Γ_{-1}) par f est un cercle (Γ'_{-1}) de centre $f(I_{-1})$ et de rayon $2\sqrt{2}$ avec $f(I_{-1}) = I'_{-1}(1;-1)$

car $z'_{I_{-1}} = (1-i)1 = 1-i$ et $I'_{-1}(1;-1)$.

c) $z' = (1-i)z$ avec $z' = x'+iy'$ et $z = x+iy$ on a

$x'+iy' = (1-i)(x+iy) = x+iy-ix+y = (x+y)+i(-x+y)$

donc $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -x+y \end{cases}$ et $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x'-y') \\ y = \frac{1}{2}(x'+y') \end{cases}$

d) Déterminons une équation de (Γ'_1)

(Γ_1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ ou encore $x^2 - y^2 = 9$

en remplaçant x et y par leurs expressions fonction de x' et y' on a

$$\left(\frac{x'-y'}{2}\right)^2 - \left(\frac{x'+y'}{2}\right)^2 = 9$$

$$\frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{4} - \frac{x'^2 + 2x'y' + y'^2}{4} = 9$$

$$\boxed{x'y' = 9 \quad \text{et donc} \quad y' = -\frac{9}{x'}}$$

<u>Rq</u> (Γ'_1) est une hyperbole équilatère d'asymptotes (OI) et (OJ)

C- Cas $m = 0$

a) Nature de (Γ_0)

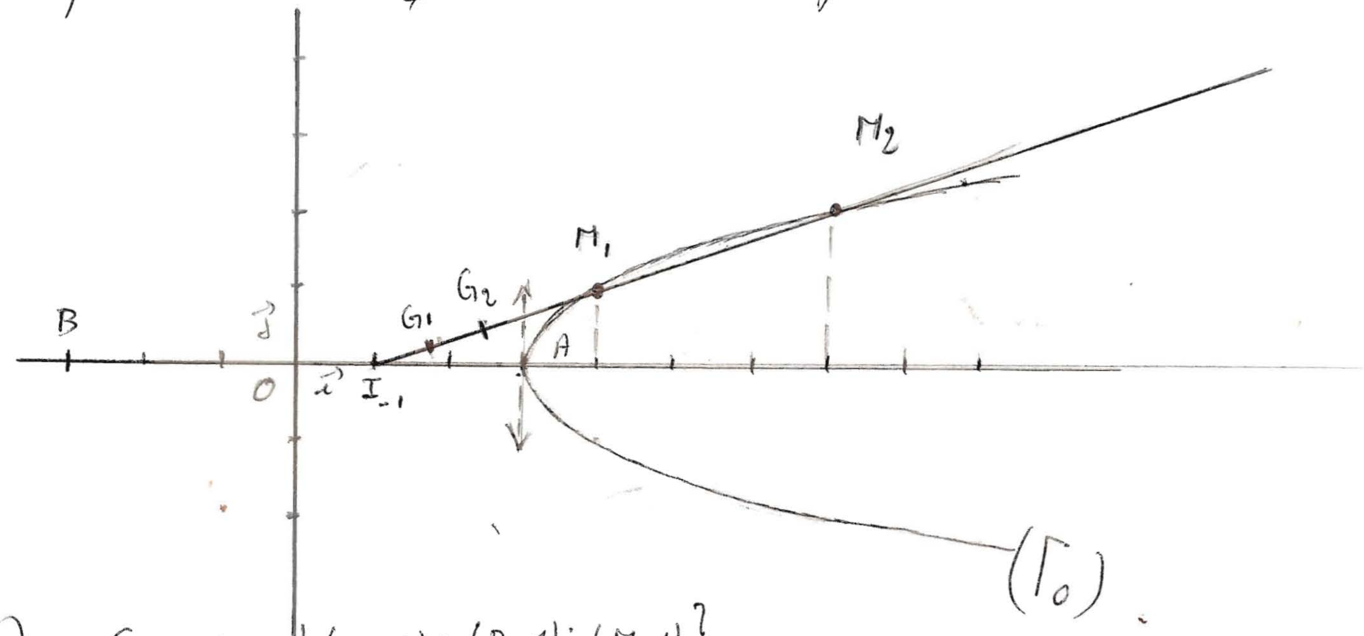
Si $m=0$ on a $y^2 = x-3$ en posant $\begin{cases} X = x-3 \\ Y = y \end{cases}$ on a $\begin{cases} x = X+3 \\ y = Y \end{cases}$

et $Y^2 = X$ Ainsi (Γ_0) est une parabole de sommet $A(3;0)$ de paramètre $\frac{1}{2}$ de foyer $F\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a $F \begin{cases} x = \frac{1}{4}+3 = \frac{13}{4} \\ y = 0 \end{cases}$ et $F\left(\frac{13}{4};0\right)$

puis la directrice (D) a pour équation $x = \frac{11}{4}$ car $X = -\frac{1}{4}$ donc $x = \frac{11}{4}$

- conclusion (Γ_0) est une parabole de sommet $A(3,0)$, d'axe focal (OI), de foyer $F(\frac{13}{4};0)$, de directrice la droite (D) d'équation $x = \frac{11}{4}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.



b) $G = bar\{(A,2);(B,1);(M,1)\}$

Pour tout point N du plan $2\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NM} = 4\vec{NG}$

en particulier pour le point I_{-1} on a

$$\vec{I_{-1}G} = \frac{1}{4}\left(2\vec{I_{-1}A} + \vec{I_{-1}B} + \vec{I_{-1}M}\right)$$

$\vec{I_{-1}A} = 2\vec{i}$

$\vec{I_{-1}B} = -4\vec{i}$

or $2\vec{I_{-1}A} + \vec{I_{-1}B} = 4\vec{i} - 4\vec{i} = \vec{0}$

donc $\vec{I_{-1}G} = \frac{1}{4}\vec{I_{-1}M}$ Ainsi G est l'image de M par l'homothétie h de centre I_{-1} et de rapport $\frac{1}{4}$.

si M décrit (Γ_0) G décrit l'image γ_0 de (Γ_0) par h

et $\gamma_0 = h(\Gamma_0)$.

Pour les points M_1 et M_2 d'abscisses respectives 4 et 7

on a : $\vec{I_{-1}G_1} = \frac{1}{4}\vec{I_{-1}M_1}$

$\vec{I_{-1}G_2} = \frac{1}{4}\vec{I_{-1}M_2}$

(Voir G_1 et G_2 sur la figure).