BERENGER B. TC

MATHÉMATIQUES
BAC Blanc n° 2

Série : C
Coeff. : 5
Durée : 4 h

EXERCICE I

L'unité choisie est le centimètre.
Dans le plan orienté, on considère deux points A et O tels que AO = 1,5.
Soit f la similitude de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$. On pose B = f(A) et C = f(B).

1°) a) Construire les points B et C.

b) Démontrer que $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et que : BC = 2 BA.
En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

2°) Soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
On désigne par D, E et F les points tels que B = R(D), E = R(C) et F = f(D).

a) Construire les points E, D puis F.

b) Démontrer que les points A, D, B et O sont cocycliques. En déduire que B, F, C et O sont cocycliques.

c) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABD; $(\mathcal{C}')$ le cercle circonscrit au triangle BCF; $(\mathcal{C}'')$ le cercle circonscrit au triangle ACE.
Démontrer que les trois cercles ont le point O en commun.

EXERCICE II

Soit la suite (u) de premier terme u_0 égal à 5 et définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{u_n + 5}$$

1°) a) Démontrer que pour tout entier n : $u_n > 0$

b) Démontrer que pour tout entier n : $u_n \neq 1$.

2°) Donner dans un repère orthonormé (O, I, J) une représentation graphique de la fonction f définie sur $]-5, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+4}{x+5}$ (unité : 2 cm).
Utiliser cette représentation graphique et la droite (D) d'équation y = x pour placer u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.
D'après le graphique, quelle hypothèse peut-on faire sur le sens de variation de la suite (u) et sa limite ?

3°) Soit (v) la suite réelle de terme général v_n tel que :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}.$$

Démontrer que (v) est une suite géométrique et en donner le premier terme et la raison.
Démontrer que (v) est convergente et calculer sa limite.

4°) En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

PROBLEME

Partie A:
On considère la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = x\,e^{1-x}.$$

1°) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) [unité : 3 cm].

2°) u est un réel strictement positif.
Déterminer l'aire A(u) de la région du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = u.

3°) Calculer $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie B:
On considère les fonctions f_n définies dans IR par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\,e^{1-x}.$$

1°) Etudier les variations des fonctions f_2 et f_3 et construire leurs courbes représentatives respectives (C_2) et (C_3) dans le même repère que la courbe (C).

2°) Etudier, suivant la parité de n, les variations de la fonction f_n et donner ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
Démontrer que pour tout entier non nul n : $f'_n = f_{n-1} - f_n$.

Partie C:
On considère les fonctions J_n définies dans IR par :

$$J_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt.$$

1°) Justifier l'existence de J_n.

2°) En utilisant la relation de la question B-2, calculer $J_n(x) - J_{n-1}(x)$ pour tout réel x.

3°) Démontrer que pour tout réel x, et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $J_n(x) = J_1(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} f_k(x)$.

En déduire que : $J_n(x) = e - e^{1-x}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$.

4°) Dans cette question, on suppose que x est élément de [0, 1].

a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul :
$0 \leq f_n(x) \leq f_n(1)$.

b) En déduire que pour tout x élément de [0, 1],
$J_n(x) \leq \frac{1}{n!}$

c) Calculer la limite de $J_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Démontrer que pour tout x de [0, 1],

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x.$$

Partie D.
1°) On suppose n pair. Etudier les variations de J_n sur IR; préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
Déterminer le nombre de solutions dans IR de l'équation
$J_n(x) = e$.

2°) On suppose n impair. Etudier les variations de J_n sur IR ; préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
Déterminer le nombre de solutions dans IR de l'équation : $J_n(x) = e$. Préciser le signe de chaque solution.

3°) Déterminer, suivant la parité de n, le nombre de solutions dans IR de l'équation :

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = 0$$

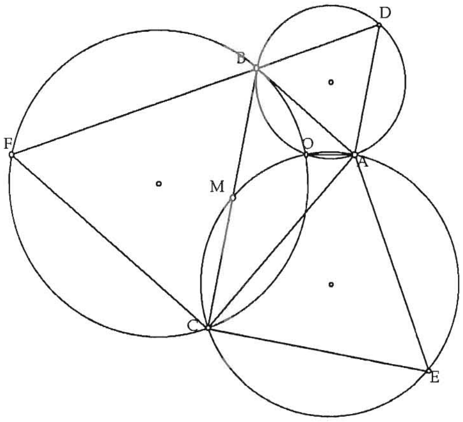
On ne calculera pas les solutions
Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	1	3/2	2
e^x	0,05	0,13	0,37	2,72	4,48	7,39

BERENGER B. TC

Correction Bac Blanc n°2/98

EXERCICE I



1°b) B = f(A) et C = f(B) donc BC = 2 BA et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ $\Leftrightarrow (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

Dans le triangle ABC soit M le milieu de [BC]. On a donc BM = BA et l'angle B de mesure $\frac{\pi}{3}$ le triangle ABM est donc équilatéral. Alors BC = 2 AM et (AM) est donc la médiane d'un triangle rectangle.

2°b) Le triangle ADB est équilatéral par construction. Donc, le point D est le symétrique de A par la réflexion d'axe la médiatrice de [AD]. On a donc $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = -(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$. Donc $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{3}$. Or B = f(A) d'où $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3}$. On a alors $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ $[\pi]$. Les points n'étant pas alignés, d'après le théorème de la cocyclicité, on en déduit qu'ils sont cocycliques et appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$.
B, F, C et O étant les images respectives par f de A, D, B et O, ces quatre points appartiennent à l'image par f du cercle circonscrit au triangle ADB. Ils sont donc cocycliques et appartiennent au cercle $(\mathcal{C}')$.

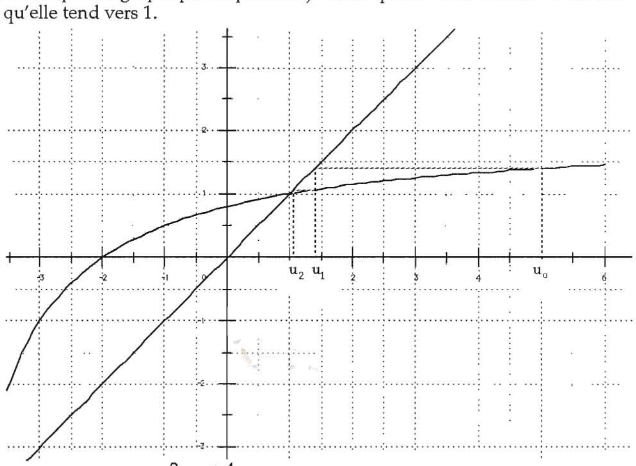
2°c) C = f [f(A)] donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{4\pi}{3}$ de plus E = R(C) donc, avec un raisonnement identique à la question précédente, on a $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = -(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA})$.
C'est à dire $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$ $[\pi]$. Les points n'étant pas alignés, ils sont cocycliques et appartiennent au cercle $(\mathcal{C}'')$. Le point O est commun aux trois cercles.

EXERCICE II

1°) a) Un raisonnement par récurrence nous permet de démontrer le résultat pour tout n, $u_n > 0$.

b) pour cette question écrire u_n sous la forme $u_n = 2 - \frac{6}{u_n + 5}$ et faire un raisonnement par récurrence si $u_n \neq 1$ on a $u_n + 5 \neq 6$ donc $\frac{6}{u_n + 5} \neq 1$ soit $u_{n+1} \neq 1$

2°) D'après le graphique on peut conjecturer que la suite u est décroissante et qu'elle tend vers 1.



3°) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 4} = \frac{\frac{2u_n + 4}{u_n + 5} - 1}{\frac{2u_n + 4}{u_n + 5} + 4}$

$= \frac{u_n - 1}{6(u_n + 4)} = \frac{1}{6} v_n$

La suite v est donc une suite géométrique de premier terme $v_o = \frac{4}{9}$ et de raison $q = \frac{1}{6}$. Sa raison étant strictement comprise entre - 1 et 1, elle converge vers 0. Or, $u_n = \frac{4v_n + 1}{1 - v_n}$ donc $\lim u_n = 1$.

PROBLEME

Partie A:

1°) $f'(x) = (1 - x)\, e^{1-x}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^{1-x} = -\infty$,

car $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}\, e = 0$,

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Le signe de f'(x) est le même que celui de 1 - x.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	—	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0

2°) Sur l'intervalle [0, u], f(x) étant positive, on a :

$A(u) = \int_0^u f(x)\, dx = \int_0^u x\, e^{1-x}\, dx = -\int_0^u (-x)\, e^{1-x}\, dx$

Faisons une intégration par parties :
Posons $v(x) = x$ et $w'(x) = e^{1-x}$
alors $v'(x) = 1$ et $w(x) = -e^{1-x}$

$A(u) = [-x\, e^{1-x}]_0^u - \int_0^u -e^{1-x}\, dx =$

$[-x\, e1-x]_0^u - [e^{1-x}]_0^u = e - e^{1-u} - u\, e^{1-u}$

$A(u) = e - e^{1-u} - u\, e^{1-u}$ unités d'aire
$= 9\,(e - e^{1-u} - u\, e^{1-u})\, cm^2$.

3°) $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u) = 9\, cm^2$.

Partie B:

1°) $f_2(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{1-x}$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2} x^2 e^{1-x} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} x^2 e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \frac{1}{2} e = 0$,

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$f'_2(x) = \frac{1}{2} x\, (2 - x) e^{1-x}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'_2(x)$		—	0	+	0	—	
$f_2(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

$f_3(x) = \frac{1}{6} x^3 e^{1-x}$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{6} x^3 e^{1-x} = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{6} x^3 e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} \frac{1}{6} e = 0$,

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

$f'_3(x) = \frac{1}{6} x^2 (3 - x) e^{1-x}$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'_3(x)$		+	0	+	0	—	
$f_3(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{3}{e}$	↘	0

2°) L'étude des fonctions f_n lorsque n est pair est identique à celle de f_2 et lorsque n est impair à f_3. D'où les tableaux de variations ci-dessous, pour chacun des cas.

n impair

x_n	$-\infty$		0		n		$+\infty$
f'		+	0	+	0	—	
f	$-\infty$	↗	0	↗	n	↘	0

n pair

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f'_n(x)$		—	0	+	0	—	
$f_n(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{n}{e}$	↘	0

$f'_n(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1} (n - x) e^{1-x} = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{1-x} - \frac{1}{n!} x^n e^{1-x}$.

Donc $f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$.

Partie C:

1°) Pour tout n, entier naturel, f_n est le produit de deux fonctions continues et dérivables sur $]-\infty ; +\infty[$ donc f_n est aussi continue et dérivable, en particulier f_n est continue sur l'intervalle [0 , x] et admet donc sur cet intervalle une primitive qui s'annule en 0. $J_n(x)$ est cette intégrale.

2°) $J_n(x) - J_{n-1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt - \int_0^x f_{n-1}(t)\, dt = \int_0^x f_n(t) - f_{n-1}(t)\, dt = -\int_0^x f'_n(t)\, dt = -[f_n(t)]_0^x = -f_n(x)$.

3°) Soit pour $n \geq 2$ la proposition p(n) définie par :

$$J_n(x) = J_1(x) - \sum_{k=2}^{n} f_k(x)$$

- on vient de vérifier que $J_2(x) - J_1(x) = -f_2(x)$ soit que $J_2(x) = J_1(x) - f_2(x)$. C'est à dire que p(2) est vraie.
- Soit $n \geq 2$ tel que p(n) soit vraie. D'après C2, on a

$J_{n+1}(x) = J_n(x) - f_{n+1}(x)$, or $J_n(x) = J_1(x) - \sum_{k=2}^{n} f_k(x)$

donc $J_{n+1}(x) = J_n(x) - f_{n+1}(x)$

$= J_1(x) - \sum_{k=2}^{n} f_k(x) - f_{n+1}(x) = J_1(x) - \sum_{k=2}^{n+1} f_k(x)$.

Donc p(n+1) est vraie.

- en conclusion, pour tout $n \geq 2$,

$J_n(x) = J_1(x) - \sum_{k=2}^{n} f_k(x)$. C'est à dire donc que :

$J_n(x) = A(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} e^{1-x} = e - e^{1-x} - x\, e^{1-x} - e^{1-x} \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}$

$= e - e^{1-x}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

4°) Nous avons vu dans la question B2 que sur l'intervalle $[\ 0,\ n]$, pour tout n, la fonction f_n est croissante. Elle est donc croissante sur l'intervalle $[\ 0\ ,\ 1\ ]$; donc, pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$ on a $f_n(0) \leq f_n(x) \leq f_n(1) \Leftrightarrow 0 \leq f_n(x) \leq f_n(1)$.
En utilisant le théorème de comparaison des intégrales, on obtient

$$0 \leq \int_0^x f_n(x)\,dx \leq \int_0^x f_n(1)\,dx$$

$\Leftrightarrow 0 \leq J_n(x) \leq x\,f_n(1) \leq f_n(1)$ car $x \leq 1$

donc $0 \leq J_n(x) \leq \frac{1}{n!}$ or $\lim \frac{1}{n!} = 0$ alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n(x) = 0$.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = [\,e - J_n(x)\,]\,e^{x-1}$$

$$\text{donc : } \lim_{n \to +\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = e(e^{x-1}) = e^x.$$

Partie D.

1°) J_n étant la primitive de f_n qui s'annule en 0, on a $F'_n(x) = f_n(x)$. Le signe de $F'_n(x)$ dépend donc essentiellement de celui de $f_n(x)$. D'après l'étude de la question B2, nous en déduisons : que si n est pair, $f_n(x) \geq 0$ sur $]-\infty\ ,+\infty[$ donc que J_n est croissante sur cet intervalle.

n pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$J'_n(x)$		+	0	+	
$J_n(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	e

$$\lim_{x \to +\infty} J_n(x) = \lim_{x \to +\infty} e - e^{1-x}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e - x^n e^{1-x}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^{n-k}k!} = e$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e\frac{x^n}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^{n-k}k!} = \frac{1}{n!}$

$$\lim_{x \to -\infty} J_n(x) = \lim_{x \to -\infty} e - e^{1-x}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = -\infty$$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^k}{k!} = +\infty$.

D'après le tableau de variation de J_n, on en déduit donc que l'équation, $J_n((x) = e$, n'admet dans IR aucune solution.

2°) Si n est impair, d'après le tableau de variation de f_n, nous savons que sur $]-\infty, 0[$, $f_n(x) < 0$ donc que J_n est décroissante sur cet intervalle et, sur $]\ 0, +\infty\ [$, $f_n(x) > 0$ donc J_n croissante sur cet intervalle.

De même que lorsque n est pair, $\lim\limits_{x \to +\infty} J_n(x) = e$

$$\lim_{x \to -\infty} J_n(x) = \lim_{x \to -\infty} e - e^{1-x}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = +\infty$$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^n}{n!} = -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^n e^{1-x}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^{n-k}k!} = e$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e\frac{x^n}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^{n-k}k!} = \frac{1}{n!}$.

D'après le tableau de variation de J_n, on en déduit donc que l'équation, $J_n((x) = e$, admet dans IR une seule solution négative.

n impair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$J'_n(x)$		−	0	+	
$J_n(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	e

3°) L'équation $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 0$ se ramenant à $Jn(x) = e$ admet donc aucune solution lorsque n est impair et une solution négative lorsque n est pair.