D7

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE
LYCEE JOSEPH AMBOUROUE-AVARO
BP: 236 Tél : 55-21-73
PORT-GENTIL

BAC BLANC n° 1 (Février 2002)
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Série: C
Durée: 4h
Coeff: 5

EXERCICE 1

Partie A

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct ,A , B , H sont les points d'affixes respectives a , b et $\dfrac{a+b}{2}$ et $a \neq b$.

A chaque point M(z) distinct de A , B , H on associe le point M'(z') tel que

$$\frac{z'-a}{z'-b} = \frac{\overline{z-a}}{\overline{z-b}} . \qquad [1]$$

1°) Montrez que :
$(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) + \pi$, modulo 2π 0,75

2°) a) Montrez que :

$$\left(z'-\frac{a+b}{2}\right)\overline{\left(z-\frac{a+b}{2}\right)} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 .$$

b) Déduisez-en que la droite (AB) est bissectrice de $(\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HM'})$, et que : $HM \times HM' = HA^2$. 0,5 + 0,25

c) Montrez que , sans calculs nouveaux ,que si K est le milieu de [MM'] , la droite (MM') est la bissectrice de $(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB})$.

3°) On suppose que $a = 2i$, $b = 4 + 3i$, $z = 1 + 4i$.
Placez alors le point M'(z') .

Partie B

Applications aux racines carrées d'un nombre complexe

1°) α est un complexe non nul , z_1 et z_2 sont deux racines carrées de α .Les points M_1 , M_2 , A , B ont pour affixes respectives z_1 , z_2 , α et 1 . Montrez que pour $a = \alpha$ et $b = 1$, z_1 et z_2 vérifient la relation [1] énoncée au début de la partie A .

2°) Déduisez-en que (M_1M_2) est bissectrice de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$, où O est l'origine du repère . 0,25

3°) Placez les points M_1 et M_2 lorsque $\alpha = -3 + 2i$.

0,5

EXERCICE 2

Méthode de calcul d'une valeur approchée de l'intégrale

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

1°) ***Transformation de J .***

Pour tout élément u de $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, on pose

$F(u) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et pour tout élément x de $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

on pose $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin \pi.t}{1-t}\,dt$.

a) Prouvez que pour tout élément x de $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$:

$$G(x) = F(\pi) - F(\pi\,(1-x)) .$$

(On pourra comparer les dérivées des deux membres).

b) En déduire que $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi.t}{1-t}\,dt$. 1,25

2°) ***Approximation de J***

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi.t.dt$

et si $n \geq 1$, $U_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin \pi.t.dt$.

a) Prouvez que , pour tout $n \geq 1$:
$J = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1} + r_n$

où $r_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin \pi.t}{1-t}\,dt$. 0,5

b) Etablissez que , pour tout élément t de $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$:

$$\frac{t^n \sin \pi.t}{1-t} \leq 2t^n .$$ 0,5

Déduisez-en une majoration simple de r_n . 0,5

c) Montrez que : $J = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1})$. 0,5

3°) ***Calcul des intégrales U_n.***

a) Calculez U_0 et U_1 . 0,5

b) Etablissez que , pour tout entier $n \geq 2$:

$$U_n = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)U_{n-2}\right] .$$ 1

4°) ***Conclusion***

A partir des résultats obtenus en **2°)** et **3°)** , indiquez une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision 10^{-2} . (On ne demande pas d'effectuer ce calcul) . 0,5

PROBLEME 11

La chaînette

La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes

(Définition Petit Larousse).

On montre et on admet dans ce problème que, rapportée à un repère orthonormé convenable, la chaînette admet une équation de la forme :

$$y = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda} \quad \text{avec} \quad \lambda > 0 .$$

On laisse prendre un tel fil d'une longueur de 4 cm entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m. Le but du problème est de calculer une valeur approchée de la flèche prise par le fil, c'est-à-dire la distance d indiquée sur le schéma ci-dessous

A cet effet, pour tout $\lambda > 0$, on considère la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = \dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$.

On note (C_λ) la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé.

Partie A : Etude de la chaînette

1°) a) Etudiez la parité de f_1 ; préciser sa limite en $+\infty$ et dresser son tableau de variations. 1

b) Tracez (C_1) (unité graphique : 1 cm) 0,5

c) Prouvez que pour tout λ la courbe (C_λ) se déduit de (C_1) par une homothétie dont précisera le centre et le rapport. 0,5

2°) Calcul de la longueur de la chaînette.

On admet que la longueur $L(\lambda)$ de l'arc de courbe d'équation $y = f_\lambda(x)$ compris entre les points d'abscisse $x = -1$ et $x = 1$ est égale l'intégrale :

$$L(\lambda) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'_\lambda(x)]^2}\, dx$$

(l'unité de longueur étant le mètre).

a) Vérifiez que :

0,5 $$1 + [f'_\lambda(x)]^2 = \left(\frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2} \right)^2$$

b) En déduire que : $L(\lambda) = \dfrac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda}$. 0,

c) Calcul de la flèche.

Exprimez en fonction de λ la flèche :

$d(\lambda) = f_\lambda(1) - f_\lambda(0)$ de la chaînette (C_λ), (l'unité de longueur étant le mètre) 0,25

Partie B : Etude de l'équation $L(\lambda) = 4$.

Soit λ un nombre réel strictement positif.

1°) a) Résolvez l'équation d'inconnue X réelle :

$X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$. 0,5

b) En déduire que $L(\lambda) = 4$ équivaut à :

$e^{\lambda} = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}$. 0,5

c) Prouvez enfin que $L(\lambda) = 4$ équivaut à :

$\lambda = \ln(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1})$. 0,5

2°) Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$g(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.

a) Calculez la dérivée de la fonction

$U : x \to 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$. Calculer $g'(x)$ 0,25+0,5

b) En déduire le sens de variation de g. 0,25

3°) Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$h(x) = x - g(x)$.

a) Calculez $h'(x)$. Etudier le signe de $h'(x)$. 0,5+0,5

b) Prouvez que, pour tout $x > 0$:

$$g(x) = \ln x + \ln\left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right).$$

En déduire la limite de $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Dressez le tableau de variations de h.

Déduisez-en que l'équation $g(x) = x$ admet une solution α et une seule dans $]0 ; +\infty[$ 0,5

d) Prouvez que $2 \leq \alpha \leq 3$.

4°) On note $I = [2 ; +\infty[$.

a) Démontez que, pou tout élément x de I, $g(x) \in I$ (on pourra utiliser **B 2°)**) 0,25

b) Prouvez que, pour tout élément x de I : 0,5

$0 < g'(x) \leq 0,5$.

Déduisez-en que, pour tout élément x de I :

$|g(x) - \alpha| \leq 0,5\,|x - \alpha|$

5°) a) Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite d'éléments de I définie par : $U_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$ $U_{n+1} = g(U_n)$.

Démontrez que, pour tout entier naturel n :

$|U_n - \alpha| \leq (0,5)^n\,|U_0 - \alpha|$. 0,25+0,25

b) Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$. 0,25+0,25

c) Déterminez un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à la précision 10^{-3} et calculez U_{n0}.

6°) On se place dans la situation décrite au début du problème. En rassemblant les résultats obtenus dans celui-ci, calculez une valeur approchée de la flèche $d(\alpha)$. 0,25

3,25

Bac blanc n° 1 TC (2001-2002)

Exercice 1 (A) A, B et H d'affixes a, b et $\frac{a+b}{2}$

$M(z)$ avec M distinct de A, B, H ; $M'(z')$ tq $\frac{z'-a}{z'-b} = -\frac{z-a}{z-b}$ (1)

1°) Montrons que $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \pi \ [2\pi]$.

$$\frac{z'-a}{z'-b} = -\frac{z-a}{z-b} \Rightarrow \arg\left(\frac{z'-a}{z'-b}\right) = \arg\left[-\frac{z-a}{z-b}\right] \quad [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z'-a}{z'-b}\right) = \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) + \arg(-1) \quad [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z'-a}{z'-b}\right) = \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) + \pi \ [2\pi] \qquad (1)$$

or $\arg\left(\frac{z'-a}{z'-b}\right) = (\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \ [2\pi]$

$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \ [2\pi]$

donc (1) $\Longrightarrow (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + \pi \ [2\pi]$

$$\Rightarrow -(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) = -(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) - \pi \ [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \pi \ [2\pi]$$

d'où $\boxed{(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \pi \ [2\pi]}$

2°) a) Montrons que $\left(z' - \frac{a+b}{2}\right)\left(z - \frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

$$\left(z' - \frac{a+b}{2}\right)\left(z - \frac{a+b}{2}\right) = zz' - z'\left(\frac{a+b}{2}\right) - z\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= zz' - (z+z')\frac{a+b}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

or $\frac{z'-a}{z'-b} = -\frac{z-a}{z-b} \Rightarrow (z'-a)(z-b) = -(z-a)(z'-b)$

$$\Rightarrow (z'-a)(z-b) + (z-a)(z'-b) = 0$$

$$\Rightarrow zz' - bz' - az + ab + zz' - bz - az' + ab = 0$$

$$\Rightarrow 2zz' - (z+z')(a+b) + 2ab = 0$$

$$\Rightarrow zz' - (z+z')\frac{a+b}{2} = -ab$$

donc $\left(z' - \frac{a+b}{2}\right)\left(z - \frac{a+b}{2}\right) = zz' - (z+z')\frac{a+b}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$= -ab + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = -ab + \frac{a^2+b^2+2ab}{4} = \frac{a^2+b^2-2ab}{4}.$$

donc $\left(z' - \frac{a+b}{2}\right)\left(z - \frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

Deduisons-en que (AB) est une bissectrice de $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'})$ et que $HM \times HM' = HA^2$

$$\left(z' - \frac{a+b}{2}\right)\left(z - \frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \Rightarrow \arg\left(z' - \frac{a+b}{2}\right)\left(z - \frac{a+b}{2}\right) = \arg\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(z' - \frac{a+b}{2}\right) + \arg\left(z - \frac{a+b}{2}\right) = 2\arg\left(\frac{b-a}{2}\right) \quad [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{HM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{HM}) = 2(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$$

avec $(O, \vec{u}, \vec{v})$ repere othonormé direct et $\arg \frac{b-a}{2} = \arg(b-a) - \arg 2$
$= \arg(b-a) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

Ainsi $(\vec{u}, \overrightarrow{HM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{HM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = 0 \quad [2\pi]$

$$(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{HM'}) + (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{HM}) = 0 \quad [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HM'}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HM}) = 0 \quad [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HM'}) = (\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$$

ou encore $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HM'}) \quad [2\pi]$ ce qui traduit que la droite (AB) est bissectrice de $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'})$.

avec $\left(z' - \frac{a+b}{2}\right)\left(z - \frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ on a $\left|z' - \frac{a+b}{2}\right|\left|z - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right|^2$

or $\left|z' - \frac{a+b}{2}\right| = HM'$ et $\left|z - \frac{a+b}{2}\right| = HM$ et $\left|\frac{b-a}{2}\right|^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = HA^2$

d'où $HM \times HM' = HA^2$

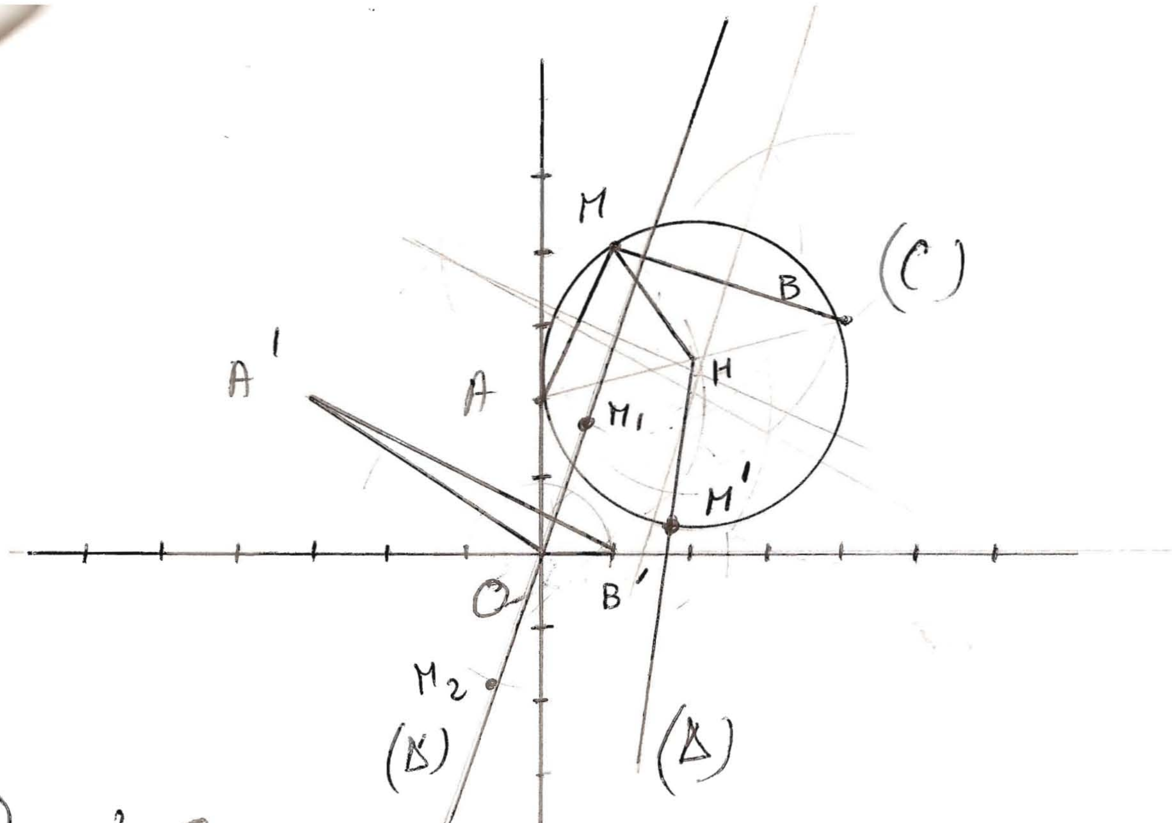
en conclusion (AB) est bissectrice de $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'})$ et $HM \times HM' = HA^2$.

c) Montrons sans nouveaux calculs que si K est le milieu de $[MM']$ alors la droite (MM') est la bissectrice de $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB})$.

si K est le milieu de $[MM']$ la relation (1) donne $\frac{a-z'}{b-z'} = -\frac{a-z}{b-z}$
et $\left(a - \frac{z+z'}{2}\right)\left(b - \frac{z+z'}{2}\right) = \left(\frac{z'-z}{2}\right)^2$ et alors la droite (MM') est bissectrice de $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB})$.

3°) $a = 2i \qquad b = 4+3i \qquad z = 1+4i$

on place M' en tenant compte du fait que (AB) est bissectrice de $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'})$ avec H milieu de $[AB]$ et les points $A\ B\ M$ et M' cocycliques car $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \pi \quad [2\pi]$.



(B) α complexe non nul et z_1, z_2 racines carrées de α.
M_1 et M_2 sont d'affixes z_1 et z_2 sont M_1 et M_2 sont symetriques par rapport à O (car $z_1 = -z_2$).

1°) Montrons que pour $a = \alpha$, $b = 1$ z_1 et z_2 verifient [1].

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{z_2 - \alpha}{z_2 - 1} = \dfrac{z_2 - z_2^2}{z_2 - 1} = \dfrac{-z_2(z_2 - 1)}{z_2 - 1} = -z_2 = z_1 \\ \dfrac{z_1 - \alpha}{z_1 - 1} = \dfrac{z_1 - z_1^2}{z_1 - 1} = \dfrac{-z_1(z_1 - 1)}{z_1 - 1} = -z_1 \end{array}\right\} \text{ donc } \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - 1} = -\frac{z_1 - \alpha}{z_1 - 1}$$

2°) Deduisons-en que $(M_1 M_2)$ est bissectrice de $(\vec{OA}, \vec{OB})$.

$z_1 = -z_2$ et O mil $[M_1 M_2]$ d'après 2e partie A
la droite $(M_1 M_2)$ est bissectrice de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OB})$.

3°) Placer M_1 et M_2 avec $\alpha = -3 + 2i$
Pour eviter toute confusion ou faire une autre figure appelons sur la fig A' l'image de α et B' l'image de $b = 1$
M_1 et M_2 sont sur la bissectrice de $(\vec{OB'}, \vec{OA'})$ et
$OM_1^2 = OM_2^2 = |\alpha| \Rightarrow OM_1 = OM_2 = \sqrt{\sqrt{13}}$.

Exercice 2

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \; ;$$

on pose $F(u) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{\sin t}{t} dt$, $u \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ et $G(x) = \int_{0}^{x} \frac{\sin \pi t}{1-t} dt$
$x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

a) Montrons que $\forall x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ $G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$.

Justifions que G et F sont derivables et calculons G' et F'.

- La fonction $t \mapsto \sin \pi t$ Continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$
la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ en particulier sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$
donc la fonction $t \mapsto \frac{\sin \pi t}{1-t}$ continue sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ donc sur $[0, x]$ pour tout x element de $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ ainsi G est bien definie et est la primitive de $t \mapsto \frac{\sin \pi t}{1-t}$ qui s'annule en 0 et G est derivable sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ avec $G'(x) = \frac{\sin \pi x}{1-x}$ 0,25
- La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$ donc sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2} ; u\right]$ avec $u \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ ainsi F est bien definie et est la primitive sur $\left[\frac{\pi}{2} ; u\right]$ de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$, par suite F est derivable sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ et $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$ 0,25

finalement la fonction $x \mapsto F(\pi) - F[\pi(1-x)]$ est derivable sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ de derivée $\left[F(\pi) - F[\pi(1-x)]\right]' = \pi F'[\pi(1-x)] = \pi \frac{\sin \pi(1-x)}{\pi(1-x)}$
$= \frac{\sin(\pi - \pi x)}{1-x} = \frac{\sin \pi x}{1-x}$ 0,25

les deux membres ayant même derivée

$$G(x) = F(\pi) - F[\pi(1-x)] + k$$

avec $G(0) = 0$ on a $F(\pi) - F(\pi) + k = 0$ donc $k = 0$ 0,25

et $G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$ $\forall x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

b) avec $x = \frac{1}{2}$ on a $G\left(\frac{1}{2}\right) = F(\pi) - \underbrace{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} = F(\pi) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = J$

or $G\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi t}{1-t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = J$ d'où $J = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi t}{1-t} dt$

2) Approximation de J

$u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin\pi t\,dt$, $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin\pi t\,dt$

a) Mq $J = u_0 + \cdots + u_{n-1} + r_n$ avec $r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin\pi t}{1-t}\,dt$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+t+\cdots+t^{n-1}) \sin\pi t\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin\pi t}{1-t}\,dt$$

avec $t \in [0;\frac{1}{2}]$, $t \neq 1$ et $1+t+\cdots+t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$ donc

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-t^n}{1-t}\right) \sin\pi t\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin\pi t}{1-t}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-t^n}{1-t} + \frac{t^n}{1-t}\right) \sin\pi t\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\pi t}{1-t}\,dt = J$$

d'où $J = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + r_n$ avec $r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin\pi t}{1-t}\,dt$.

b) Mq $\forall t \in [0,\frac{1}{2}]$ $\frac{t^n \sin\pi t}{1-t} \leq 2t^n$ et en deduire 1 majoration de r_n.

$0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -t \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1-t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1-t} \leq 2$

or $0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow t \geq 0$ et $0 \leq \pi t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow t^n \geq 0$ et $0 \leq \sin\pi t \leq 1$

donc $0 \leq t^n \sin\pi t \leq t^n$

avec $\begin{cases} 1 \leq \frac{1}{1-t} \leq 2 \\ 0 \leq t^n \sin\pi t \leq t^n \end{cases}$ on a $0 \leq \frac{t^n \sin\pi t}{1-t} \leq 2t^n$

donc $\forall t \in [0;\frac{1}{2}]$ $\frac{t^n \sin\pi t}{1-t} \leq 2t^n$

avec $0 < \frac{1}{2}$ on a $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin\pi t}{1-t}\,dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2t^n\,dt = \frac{2}{n+1}\left[t^{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+1)2^n}$

donc $r_n \leq \frac{1}{(n+1)2^n}$

c) $0 \leq r_n \leq \frac{1}{(n+1)2^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$

or $J = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + r_n$ d'où

$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = J - r_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) = J$

(6)

3) a- $u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi t \, dt = -\frac{1}{\pi}\left[\cos \pi t\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$

$u_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t \sin \pi t \, dt = -\frac{1}{\pi}\left[t \cos \pi t\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi t \, dt = \frac{1}{\pi^2}\left[\sin \pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\pi^2}$

donc $\boxed{u_0 = \frac{1}{\pi} \text{ et } u_1 = \frac{1}{\pi^2}}$

b) Mq $\forall n \geq 2$ $u_n = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)u_{n-2}\right]$.

$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin \pi t \, dt$ $\quad u = t^n \quad u' = n t^{n-1}$

$v' = \sin \pi t \quad v = -\frac{1}{\pi}\cos \pi t$

$u_n = -\frac{1}{\pi}\left[t^n \cos \pi t\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}\cos \pi t \, dt = \frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1} \cos \pi t \, dt$

$u_n = \frac{n}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\left[t^{n-1}\sin \pi t\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{(n-1)}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-2} \sin \pi t \, dt\right)$

$u_n = \frac{n}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n-1}{\pi} u_{n-2}\right)$

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)u_{n-2}\right]}$$

4) Indiquons une methode de calcul d'1 val. app de J à 10^{-2}
avec la relation de recurrence du 3) on peut calcule u_n connaissant u_0 et u_1 suivant la parité de n.

Par ailleurs $J = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + r_n$ avec $u_n \geq 0$ et $r_n \geq 0$

on a $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} \leq J \leq u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + \frac{1}{(n+1)2^n}$ car $r_n \leq \frac{1}{(n+1)2^n}$

donc $\left| J - (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})\right| \leq \frac{1}{(n+1)2^n}$ et

$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ est une valeur approchée de J à $\frac{1}{(n+1)2^n}$ près

Il suffit de trouver n tel que $\frac{1}{(n+1)2^n} \leq 10^{-2}$

C'est à dire $(n+1)2^n \geq 100$ avec $n = 4$ $(n+1)2^n = 80$

et pour $n = 5$ on a $6 \cdot 2^5 = 192$ Ainsi il suffit de prendre $n = 5$ et $u_0 + u_1 + u_3 + u_4$ est 1 valeur approchée de J à 10^{-2} près.

Problème

A- $f_\alpha(x) = \dfrac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$

1° a) Etude $f_1(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

- $D_{f_1} = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ de plus $f_1(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = f_1(x)$ donc f_1 est une fonction paire. 0,25 + 0,25
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ 0,25
- f_1 est derivable sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{-x}}{2}(e^{2x} - 1)$ 0,25

$\dfrac{e^{-x}}{2} > 0$ donc $f_1'(x)$ est de signe de $e^{2x} - 1$

$e^{2x} - 1 \geq 0 \iff e^{2x} \geq 1 \iff 2x \geq 0 \iff x \geq 0$ d'où le tableau de variation de f_1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

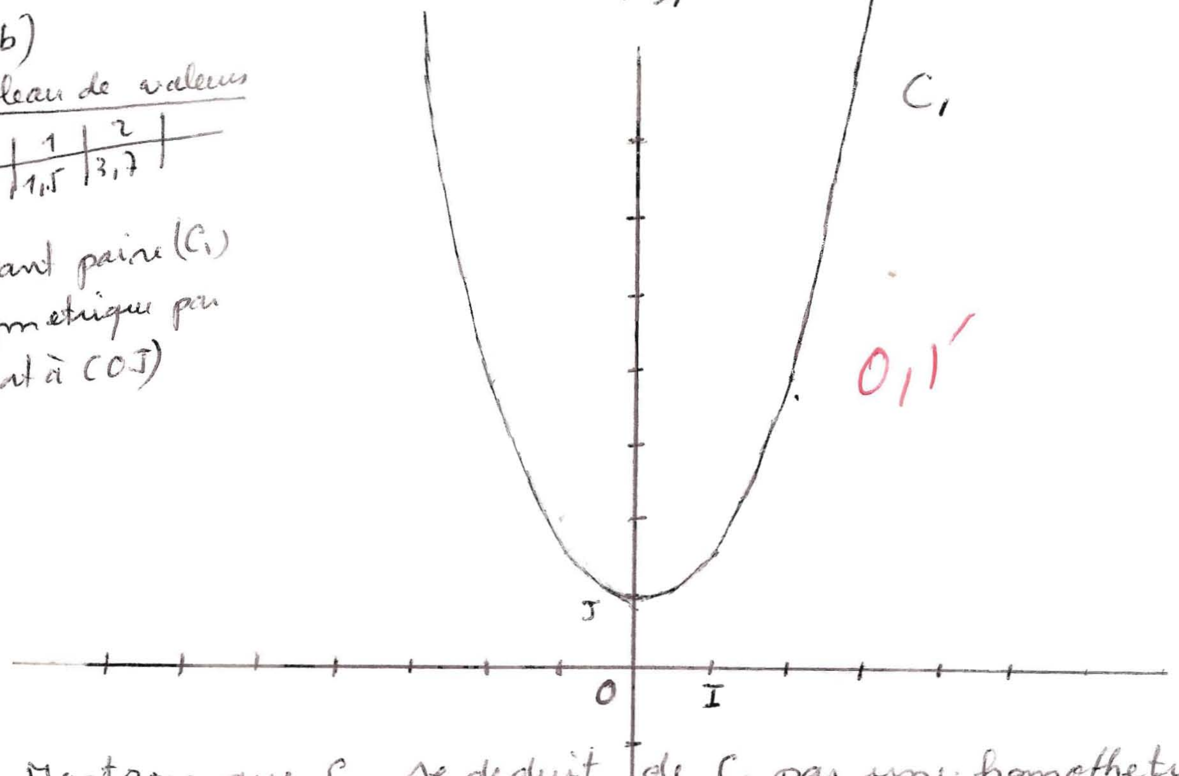
0,75

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$ car f_1 est paire.

b) Tableau de valeurs

x	0	1	2
$f_1(x)$	1	1,5	3,7

f_1 etant paire (C_1) est symetrique par rapport à (OJ)



0,1

c) Montrons que C_α se deduit de C_1 par une homothetie.

Remarquons que $f_\alpha(x) = \dfrac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}\right) = \dfrac{1}{\alpha} f_1(\alpha x)$

0,5 $M'\binom{x}{y} \in C_\alpha \iff y = f_\alpha(x) \iff y = \dfrac{1}{\alpha} f_1(\alpha x) \iff y\alpha = f_1(\alpha x)$

or $y\alpha = f_1(\alpha x)$ signifie que $M\binom{\alpha x}{\alpha y} \in C_1$ et $\overrightarrow{OM} = \alpha\,\overrightarrow{OM'}$

par suite $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{1}{\alpha}\overrightarrow{OM}$ ce qui traduit que M' est l'image de M par $h(O; \frac{1}{\alpha})$. En conclusion C_α est l'image de C_1 par l'homothetie de centre O et de rapport $\frac{1}{\alpha}$.

calcul de la longueur de la chaînette. 18

On donne $L(d) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+[f_d'(x)]^2}\,dx$

a) Montrons que $1+(f_d'(x))^2 = \left(\frac{e^{dx}+e^{-dx}}{2}\right)^2$ avec $f_d(x) = \frac{e^{dx}+e^{-dx}}{2d}$

Pour tout d et pour tout x f_d est derivable sur $\mathbb{R}$ et $f_d'(x) = \frac{e^{dx}-e^{-dx}}{2}$

$1+[f_d'(x)]^2 = 1+\left(\frac{e^{dx}-e^{-dx}}{2}\right)^2 = 1+\frac{e^{2dx}-2+e^{-2dx}}{4} = \frac{e^{2dx}+2+e^{-2dx}}{4}$

$= \left(\frac{e^{dx}+e^{-dx}}{2}\right)^2$

0,5

donc $1+[f_d'(x)] = \left(\frac{e^{dx}+e^{-dx}}{2}\right)^2$

b) Deduisons que $L(d) = \frac{e^{d}-e^{-d}}{d}$

$\sqrt{1+[f_d'(x)]^2} = \sqrt{\left(\frac{e^{dx}+e^{-dx}}{2}\right)^2} = \frac{e^{dx}+e^{-dx}}{2}$ car $\frac{e^{dx}+e^{-dx}}{2} > 0$

donc $L(d) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(f_d'(x))^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{e^{dx}+e^{-dx}}{2}\,dx = \frac{1}{2d}\left[e^{dx}-e^{-dx}\right]_{-1}^{1}$

0,5 $= \frac{1}{2d}\left((e^{d}-e^{-d})-(e^{-d}-e^{d})\right) = \frac{1}{2d}(e^{d}-e^{-d}-e^{-d}+e^{d})$

$= \frac{e^{d}-e^{-d}}{d}$ donc $\boxed{L(d) = \frac{e^{d}-e^{-d}}{d}}$

c) Exprimons en fonction de d la flèche $d(d) = f_d(1) - f_d(0)$

$d(d) = f_d(1) - f_d(0) = \frac{e^{d}+e^{-d}}{2d} - \frac{1}{d} = \boxed{\frac{e^{d}+e^{-d}-2}{2d}}$ 0,25

B - Etude de l'equation $L(d) = 4$ avec $d > 0$

1- a) Resolvons l'equation $x^2 - 4dx - 1 = 0$ $\Delta = 16d^2+4 > 0$

$x_1 = 2d + \sqrt{4d^2+1} > 0$

$x_2 = 2d - \sqrt{4d^2+1} < 0$ car $4d^2 < 4d^2+1$ et $2d < \sqrt{4d^2+1}$

$\boxed{S = \left\{2d+\sqrt{4d^2+1}\,;\, 2d-\sqrt{4d^2+1}\right\}}$ 0,1

b) Montrons que $L(d) = 4 \iff e^{d} = 2d + \sqrt{4d^2+1}$

$L(d) = 4 \iff \frac{e^{d}-e^{-d}}{d} = 4 \iff e^{d}-e^{-d} = 4d \iff e^{2d}-1 = 4de^{d}$

0,5 $\iff e^{2d} - 4de^{d} - 1 = 0$ en posant $e^{d} = X > 0$ on a

$X^2 - 4dX - 1 = 0 \iff e^{d} = 2d + \sqrt{4d^2+1}$ d'après a) de B.

d'où $L(d) = 4 \iff e^{d} = 2d + \sqrt{4d^2+1}$!

c) Montrons enfin que $L(d) = 4 \iff d = \ln(2d + \sqrt{4d^2+1})$ (5)

$L(d) = 4 \iff e^d = 2d + \sqrt{4d^2+1} > 0 \iff d = \ln(2d + \sqrt{4d^2+1})$

d'où $L(d) = 4 \iff d = \ln(2d + \sqrt{4d^2+1})$. 0,5

2° Soit $g(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2+1})$ avec $x \in [0; +\infty[$.

$u(x) = 2x + \sqrt{4x^2+1}$

a) $u'(x) = 2 + \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}} = 2 + \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} = \dfrac{2[2x + \sqrt{4x^2+1}]}{\sqrt{4x^2+1}}$

$g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

b) $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}} > 0$ donc g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3° Soit $h(x) = x - g(x)$ avec $x \in [0; +\infty[$

a) $h'(x) = 1 - g'(x) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}} = \dfrac{\sqrt{4x^2+1} - 2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

$h'(x) = \dfrac{(\sqrt{4x^2+1} - 2)(\sqrt{4x^2+1} + 2)}{\sqrt{4x^2+1}(\sqrt{4x^2+1} + 2)} = \dfrac{4x^2 - 3}{\sqrt{4x^2+1}(\sqrt{4x^2+1} + 2)} = \dfrac{(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})}{\sqrt{4x^2+1}(\sqrt{4x^2+1}+2)}$

$x > 0$ $\quad 2x + \sqrt{3} > 0$ et $\sqrt{4x^2+1}(\sqrt{4x^2+1} + 2) > 0$ et $h'(x)$ est de signe de $2x - \sqrt{3}$

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$

donc sur $[0; \frac{\sqrt{3}}{2}[$ $h'(x) < 0$

sur $]\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$ $h'(x) > 0$ $\quad$ et $h'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$.

b) Montrons que $g(x) = \ln x + \ln(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}})$, $\forall x > 0$

$g(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) = \ln[2x + \sqrt{x^2(4 + \frac{1}{x^2})}]$

$g(x) = \ln(2x + |x|\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}) = \ln(2x + x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}})$ car $x > 0$

$g(x) = \ln[x(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}})] = \ln x + \ln(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}})$

donc $g(x) = \ln x + \ln(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}})$ $\quad \forall x > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x - \ln x - \ln(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}})] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x(1 - \frac{\ln x}{x}) - \ln(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}})]$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ Tableau de variation de h

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$h(\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

$h(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(\sqrt{3} + \sqrt{3+1}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(\sqrt{3}+2)$.

$h(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(2+\sqrt{3}) \simeq -0{,}45$

Montrons que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α et une seule dans $]0; +\infty[$.

$g(x) = x \Leftrightarrow x - g(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$

sur $]0; \frac{\sqrt{3}}{2}]$ h dérivable et strictement décroissante et $h(]0; \frac{\sqrt{3}}{2}]) = [\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(\sqrt{3}+2); 0[$ donc h est une bijection de $]0; \frac{\sqrt{3}}{2}]$ sur $[\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(2+\sqrt{3}); 0[$ or $0 \notin [\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(2+\sqrt{3}); 0[$ donc h n'a pas de racine dans $]0; \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

sur $[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$ h dérivable et strictement croissante avec $h([\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[) = [\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(2+\sqrt{3}); +\infty[$ donc h est une bijection de $[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$ sur $[\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(2+\sqrt{3}); +\infty[$ or $0 \in [\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(2+\sqrt{3}); +\infty[$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$.

En conclusion l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$ or $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$ d'où α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

d) $[2; 3] \subset]0; +\infty[$ et $h(2) \simeq -0{,}094 < 0$

$h(3) \simeq 0{,}5 > 0$

$h(2)\, h(3) < 0$ donc $\boxed{2 \leq \alpha \leq 3}$

4°- $I = [2;+\infty[$.

a) Montrons que $\forall x \in I$, $g(x) \in I$ avec $I = [2;+\infty[$.

d'après B2°b g est derivable et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

donc si $x \geq 2$ alors $g(x) \geq g(2)$ or $g(2) \simeq 2,09 > 2$

donc $\forall x \in I$, $g(x) \in I$.

b) Montrons que $\forall x \in I$ $0 < g'(x) \leq 0,5$ avec $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

Methode 1 $\forall x > 0$ on a

$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{4x^2}} \leq \frac{2}{2x} \leq \frac{1}{x}$$

or $x \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ et $g(x) > 0$

donc $0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in I$

Methode 2

$x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow 4x^2 \geq 16$

$\Rightarrow 4x^2+1 \geq 17 \Rightarrow \sqrt{4x^2+1} \geq \sqrt{17}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{17}}$$

or $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$ et $\frac{2}{\sqrt{17}} \simeq 0,48 < \frac{1}{2}$

donc $0 < g'(x) \leq 0,5$ $\forall x \in I$

$-\frac{1}{2} \leq 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in I$ donc $|g'(x)| \leq 0,5$ $\forall x \in I$.

g est derivable sur I et $|g'(x)| \leq 0,5$ sur I, avec $x \in I$ et $\alpha \in I$, d'après l'inegalité des accroissements finis on a:

$$|g(x) - g(\alpha)| \leq 0,5\,|x-\alpha| \quad \forall x \in I$$

or $g(\alpha) = \alpha$ donc $|g(x) - \alpha| \leq 0,5\,|x-\alpha|$ $\forall x \in I$.

5°) a- $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de I $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

$U_n \in I$ et d'après 4 b) $\forall x \in I$ $|g(x) - \alpha| \leq 0,5\,|x-\alpha|$

donc $|g(U_n) - \alpha| \leq 0,5\,|U_n - \alpha|$

or $g(U_n) = U_{n+1}$ ainsi $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0,5\,|U_n - \alpha|$ $\forall n$

à l'ordre 0 on a $|u_1 - \alpha| \leq 0,5\, |u_0 - \alpha|$

à l'ordre 1 on a $|u_2 - \alpha| \leq 0,5\, |u_1 - \alpha|$

⋮

à l'ordre n-1 on a $|u_n - \alpha| \leq 0,5\, |u_{n-1} - \alpha|$

Tous les termes étant positifs, par produit membre à membre et après simplification on a :

$$|u_n - \alpha| \leq (0,5)^n\, |u_0 - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$2 \leq \alpha \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -\alpha \leq -2 \Rightarrow -1 \leq u_0 - \alpha \leq 0 \leq 1$$

donc $|u_0 - \alpha| \leq 1$ et $|u_n - \alpha| \leq (0,5)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

b) $0 \leq 0,5 \leq 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ (finie)

donc la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et converge vers α.

c) Il suffit de trouver n_0 tel que $(0,5)^{n_0} \leq 10^{-3}$

$(0,5)^{n_0} \leq 10^{-3} \Rightarrow \ln (0,5)^{n_0} \leq \ln 10^{-3} \Rightarrow n_0 \ln 0,5 \leq \ln 10^{-3}$

donc $n_0 \geq \dfrac{\ln 10^{-3}}{\ln 0,5}$ car $\ln 0,5 < 0$

or $\dfrac{\ln 10^{-3}}{\ln 0,5} \simeq 9,90$ donc on peut prendre $\boxed{n_0 = 10}$

$u_0 = 2$; $u_1 = g(u_0) \simeq 2,094$; ...... $u_{10} = 2,177$

et $u_{10} \simeq 2,177$ est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

6°) $L(d) = 4 \iff d = \ln(2d + \sqrt{4d^2+1}) \iff d = g(d)$

donc $d \simeq \alpha$ et $d = d(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha} - 2}{2\alpha} \simeq 1,592$

une valeur approchée de la flèche est $d(\alpha) \simeq 1,592$.