LYCEE TECNHIQUE NATIONAL OMAR BONGO
DEPARTEMENT DE MATHEMTAIQUES.

EXAMEN BLANC – EPREUVE DE : MATHEMATIQUES SERIE : C-E- DUREE : 4H

UN SOIN PA RTICULIER SERA APPORTE A LA QUALITE DE VOTRE COPIE ET A VOTRE REDACTION QUI ENTRERONT EN COMPTE POUR LA NOTE FINALE.

EXERCICE N°1 : il a pour but de montrer que p est premier si et seulement si p divise C_p^k pour k = 1,2,…,p -1.

Soit p un entier naturel tel que $p \geq 2$. On suppose que pour k = 1,2,…., p-1 , p divise C_p^k.

1. A l'aide de la définition C_p^k, montrer par récurrence sur k que, pour $1 \leq k \leq p-1$ *on a* : $C_{p-1}^k \equiv (-1)^k \bmod p$.
2. On suppose p non premier.
   .a) Prouver qu'il existe un diviseur s de p tel que $1 \leq s-1 \leq p-1$ et déduire de la question précédente que : $C_{p-1}^{s-1} \equiv (-1)^{s-1} \bmod p$.
   .b) On pose $p = s \times q \quad (q \geq 1)$ *montrer que* $k \times C_p^k = p \times C_{p-1}^{k-1}$ *puis* montrer alors que $C_p^s = q \times C_{p-1}^{s-1}$ *et..en..déduire.que* : $q \times (-1)^{s-1} \equiv 0 \bmod p$.
3. conclure.

EXERCICE N°2

Soit P un plan orienté rapporté au repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$. soit f l'application de P dans P qui à M(z) associe M'(z').définie par : $z' = \left(2e^{\frac{i\pi}{6}}\bar{z} - 3\sqrt{2}.e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)$.

1. On pose z = x + iy et z' = x' + iy'. Ecrire x' et y' en fonction de x et de y.
2. Montrer qu'il existe un réel k tel que, quel que soit A et B dans P d'image A' et B' on ait : $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = k.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.
3. Montrer que f n'est pas une similitude directe.
4. Montrer que f a un point invariant I et un seul que l'on déterminera.
5. Montrer qu'il existe une homothétie h de centre I et une droite (D)passant par I telles que : $f = h \circ S_D = S_D \circ h$.

PROBLEME :

Le problème a pour objet l'étude d'une famille de fonction suivant la parité de n, de construire deux courbes particulières et enfin d'obtenir à partir de suites définies à l'aide de ces fonctions des limites remarquables.

Pour tout entier naturel, on définie sur IR les fonctions f_n par : $\begin{cases} f_0 = e^x \quad et \\ f_n(x) = \dfrac{(1-x)^n}{n!} e^x \quad n \in IN \end{cases}$

On désigne par Cn la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(o,\vec{i},\vec{j})$ unité 2cm.

Partie A

I) **Etude de** f_n *pour* $n \geq 1$.

1) Déterminer suivant la parité de n, les limites de f_n dans son ensemble de définition.

2) Etudier suivant la parité de n, le sens de variation de f_n et dresser les tableaux de variations correspondants.

3) Etudier suivant la parité de n, les positions relatives des courbes (C_n) *et* (C_{n+1})

II) **tracé et calcul d'aire.**

1) a- Dresser les tableaux de variations de f_1 et f_2.

b- Préciser les positions des courbes (C_1) et (C_2) et les construire.

2) Vérifier que pour tout réel x on a : $f_2'(x) = f_2(x) - f_1(x)$, en déduire en cm² l'aire du domaine plan limité par ces deux courbes et les droites d'équations x = 1 et x = -1

Partie B

Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \int_1^2 f_n(x)dx$.

$\eta^2 = e^{x\ln 2}$

1) a- Montrer que $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\int_1^2 (x-1)^n e^x dx$.

b- Etablir que $0 \leq \int_1^2 (x-1)^n e^x dx \leq e^2$ *et en déduire que* $|U_n| \leq \dfrac{e^2}{n!}$ pour tout entier naturel n.

c- Déterminer alors la limite de Un.

2) a- Démontrer que pour tout $n \geq 1$ *on a* : $f_n'(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$

b- En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on a : $f_n(x) = f_0'(x) + f_1'(x) + ... + f_n(x)$

Partie C

Soit a un réel fixé tel que : $0 \leq a < 1$ et soit la suite (Vn) définie par : $V_n = \int_a^1 f_n(x)dx$.

1) Calculer Vo.

2) Démontrer que pour tout entier naturel on a : $0 \leq V_n \leq \dfrac{(1-a)^{n+1}}{n!} \times V_0$ et déduire que la suite (Vn) converge vers 0.

3) .a- Etablir que pour $n \geq 0$ $on\ a : V_{n+1} = V_n - \frac{(1-a)^n}{(n+1)!} \times e^a$.

. b- En déduire que pour $n \geq 0$ $on\ a : V_n = e - e^a \left[\frac{(1-a)^0}{0!} + \frac{(1-a)^1}{1!} + \ldots + \frac{(1-a)^n}{n!} \right]$

4) Pour $n \geq 0$ $on\ pose\ : S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-a)^k}{k!}$ calculer la limite de Sn.

5) Pour

$n \geq 0\ on\ pose\ A_n = \frac{1}{2^0 \times 0!} + \frac{1}{2^1 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \ldots + \frac{1}{2^n \times n!}\ et\ B_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

Calculer les limites de (An) et (Bn).

Barème :

- **Exercice 1 : 4 points.**
- **Exercice 2 : 5 points.**
- **Problème : 11 points.**

30 (…)

REPUBLIQUE GABONAISE
Lycée d'application
Nelson Mandela

Baccalauréat Blanc / Avril 2006	
Epreuve de Mathématiques	Série : C
Durée : 4 heures	Coefficient : 5

Exercice 1 **(5 points)**

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).
   b) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
2. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.
   On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.
   On considère les points du plan $\mathscr{P}$ qui appartiennent aussi au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$
   Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.
3. On considère un point M du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.
   a) Montrer que l'entier y est impair.
   b) On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
   Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.
   c) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.
   . Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation $x + p + 4q = 7$.
   . En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.
   d) En déduire les coordonnées de tous les points de $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

EXERCICE 2 **(5 points)**

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, T désigne l'application qui, à tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :
$z' = -i\bar{z} + 1$.

1. Montrer que $T \circ T$ est une translation dont précisera le vecteur.
2. Soit t la translation de vecteur $\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$.
   a) Montrer que $T \circ t^{-1} = t^{-1} \circ T = s$, s étant une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathscr{D}$ que l'on précisera.
   b) En déduire que $T = t \circ s = s \circ t$.
3. Soit k la translation de vecteur $\vec{u}$, r la rotation de centre O dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$, σ la symétrie par rapport à la droite $(O, \vec{u})$.
   a) Démontrer que $T = k \circ r \circ \sigma$. En déduire que $T = k \circ S$ où S est une symétrie par rapport à une droite Δ à préciser.
   b) A l'aide du 2., démontrer que $s = h \circ S$ où h est une translation de vecteur $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$.
   c) Retrouver géométriquement l'axe $\mathscr{D}$ de s .

Problème (10 points)

À tout entier naturel non nul n, on associe la fonction f_n définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x) .$$

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A : étude des fonctions f_n

Soit h_n la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $h_n(x) = n\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.

1. **a)** Étudier le sens de variation de h_n.
   b) Calculer $h_n(0)$ et déterminer le signe de $h_n(x)$ suivant les valeurs de x.
2. **a)** Pour x appartenant à $]-1, +\infty[$, vérifier que $f_1'(x) = h_1(x)$.
   b) Montrer que pour tout entier $n > 1$ et pour tout réel $x > -1$,
   $$f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x).$$
3. On suppose que n est impair. Dresser le tableau de variations de f_n en déterminant ses limites en -1 et $+\infty$.
4. On suppose que n est pair. Dresser de même le tableau de variations de f_n en déterminant ses limites en -1 et $+\infty$
5. **a)** Étudier la position relative des courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.
   b) Tracer ces deux courbes dans le même repère.

Partie B : étude d'une suite d'intégrales

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx .$$

1. Étude de la convergence
   a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le u_n \le \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.
2. Calcul de u_1
   a) En remarquant que $\dfrac{x^2}{1+x} = x - 1 + \dfrac{1}{1+x}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$.
   b) Calculer u_1 au moyen d'une intégration par parties.
3. Calcul de u_n
   Pour tout entier $n \ge 2$ et pour tout réel x de $]0 ; 1]$, on pose :
   $$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k \qquad \textbf{(1).}$$
   a) Justifier que $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{1+x}$ **(2).**
   b) En intégrant successivement les égalités (1) et (2), établir l'égalité :
   $$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx .$$
   c) En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent, démontrer que
   $$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right) .$$

COLLÈGE NOTRE DAME DE QUABEN
L'HIRONDELLE LA MESSAGÈRE

BAC BLANC 2007
Mathématiques
Série C Cœff. : 5
Durée : 4 heures

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y=\frac{1}{2}x$, la symétrie S d'axe $(\mathscr{D})$ et de direction celle de l'axe (OJ).

Soit g l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point $M(x;y)$ associe le point M' $(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x+1 \\ y' = -\frac{3}{4}x+y+\frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que g est bijective et vérifier que $g \circ S = S \circ g$.

2. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de $\mathscr{P}$ invariants par g.

3. Montrer que, si M n'est pas invariant par g, la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera.

4. Calculer les coordonnées du point H intersection de (MM') et de (Δ).

5. Montrer que g est une affinité dont on donnera les éléments caractéristiques.

Exercice 2 (5points)

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $x_n = 2^{n+1}+1$.

2. a) Calculer le $\text{PGCD}(x_8, x_9)$ et le $\text{PGCD}(x_{2002}, x_{2003})$.

Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part.

b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

b) Exprimer y_n en fonction de n.

c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p, le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d) O note d_n le PGCD(x_n, y_n) pour tout entier naturel n.

Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels tels que x_n et y_n soient premier entre eux.

Problème (10 points)

Partie A

On considère les fonctions numériques f_m de a variable x définies par : $f_m(x) = e^x - m(x+1)$ où m est un paramètre réel. On désigne par $(\mathscr{C}_m)$ la courbe de f_m dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Etudier les variations de la fonction f_1 et tracer avec soin sa représentation graphique. On précisera l'asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_1)$.

2. Soit la droite (Δ_1) d'équation $y = -x - 1$. Calculer en cm² l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la portion du plan limitée par $(\mathscr{C}_1)$, (Δ_1) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ (où α est un réel négatif).

Etudier la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

3. Pour tout entier naturel n, on désigne par D_n le domaine limité par $(\mathscr{C}_1)$, (Δ_1) et les droites d'équations $x = -n - 1$ et $x = -n$.

a) Calculer en cm² l'aire A_n du domaine D_n.

b) Montrer que la suite (A_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

c) Calculer $S_n = A_0 + A_1 + \cdots + A_n$. En déduire la imite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Etudier suivant les valeurs m les variations de la fonction f_m. On précisera les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.

5. Montrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_m)$ passent par un point fixe B.

6. Montrer que la droite (Δ_m) : $y = -mx - m$ est asymptote à $(\mathscr{C}_m)$ et déterminer la position de $(\mathscr{C}_m)$ par rapport à (Δ_m).

Partie B

A tout point M du plan d'affixe $z = x + iy$, on associe par une transformation T, le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $z' = (1-i)z + 1 + i$.

1. Quelle est la nature de la transformation T ? Déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Définir analytiquement la transformation T.

3. M étant un point de $(\mathscr{C}_1)$, déterminer en fonction de x, abscisse de M, les coordonnées de M' transformé de M par T.

4. Déterminer l'ensemble (Γ), image par T de la courbe $(\mathscr{C}_1)$.

Partie C

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie par : $h(x) = x - \ln(x^2)$.

1. Etudier les variations de h et tracer sa courbe $(\mathscr{C}')$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les branches infinies de $(\mathscr{C}')$.

2. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

3. Tracer (Γ) dans le même repère que $(\mathscr{C}')$. On pourra utiliser une autre couleur.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE L'INSTRUCTION CIVIQUE
CHARGE DE L'EDUCATION POPULAIRE

DELEGATION ACADEMIQUE DU WOLEU – NTEM

LYCEE D'ETAT Richard NGUEMA BEKALE

BACCALAUREAT BLANC : SESSION D'AVRIL – MAI 2007
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

SERIE : C
DUREE : 4 HEURES
COEFFICIENT : 5

EXERCICE 1

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O et de sens direct c'est – à – dire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par :

r le quart de tour direct de centre A ;

t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;

h l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{3}$

1. a. Prouver que R' = tor est une rotation dont on précisera l'angle.
   b. Déterminer les images par R' de A et B. En déduire le centre de R'.
2. On se propose d'étudier la transformation f = R'oh
   a. Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.
   b. Soit I le centre de f. Déterminer l'image de C par f.

Montrer que $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et ID = $\sqrt{3}$ IC

c. Déterminer et construire sur une figure claire et nette, l'ensemble Γ des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Donner une mesure de $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CI})$. Placer I sur la figure.

d. En remarquant que : $MD^2 - 3MC^2 = (\overrightarrow{MD} - \sqrt{3}\,\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MD} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{MC})$, prouver que l'ensemble Γ' des points M du plan tels que $MD^2 - 3MC^2 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre G et le rayon. Construire Γ' et vérifier qu'il passe par I.

EXERCICE 2

On considère l'intégrale suivante : $I_{n,k} = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$ où n et k sont des nombres entiers naturels tels que $n \geq k$.

1. Montrer que $C_n^k = \frac{n\times(n-1)\times\ldots\ldots\times(n-k+1)}{1\times2\times3\times\ldots k}$ où C_n^k désigne les combinaisons de k éléments parmi n éléments.

2. Calculer l'intégrale $I_{n,0}$.

3. Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n,k-1}$. En déduire que $I_{n,k} = \frac{1}{(n+1)C_n^k}$.

4. Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 (n+1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} dx$ et $\int_0^1 x^k (1-x)^2 dx$

5. On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $U_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{C_n^k} \right)$ pour $n > 0$.

a. Démontrer que $U_n = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \left(\frac{1}{C_n^k} \right)$.

b. On admet que $C_n^k \geq \frac{n(n-1)}{2}$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq n-2$. Déduire un encadrement de U_n puis calculer la limite de (U_n).

c. On pose $V_n = \sum_{k=0}^{n} I_{n,k}$. Déterminer la limite de (V_n)

PROBLEME

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan. On donne les points A (1 ; 0) et B(-1 ; 0).

A tout point M du plan de coordonnées (x ; y) ; on associe le nombre complexe $z = x + iy$, affixe de M.

1. T est l'application qui, a tout point M d'affixe z, associe le point M_1 d'affixe z_1 telle que :

$$Z_1 = iz - (i+1)$$

   a. Préciser la nature géometrique de l'application T.
   b. Quel est l'ensemble des points M_1 lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$?
      Construire cet ensemble

2. λ est un réel donné non nul. T_λ est l'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' barycentre de $(M ; \lambda)$, $(M_1 ; -\lambda)$, $(A ; 1)$

   a. Démontrer que l'affixe z' de M' est telle que :

$$Z' = \lambda(1-i)z + \lambda(1+i) + 1.$$

   b. Démontrer que T_λ est une similitude directe dont on donnera l'affixe du centre, le rapport et l'angle.

   c. Pour quelles valeurs de λ, T_λ est-elle une rotation ? Donner dans ce cas son angle et l'affixe de son centre.

   d. Exprimer les coordonnées (x'; y') de M'en fonction des coordonnées (x, y) de M.

3. Le nombre λ étant strictement positif, on lui associe le point $P(-\ln\lambda ; \ln\lambda)$ et le point $P' = T_\lambda(P)$.

   a. Exprimer les coordonnées de P' en fonction de λ.

b. Démontrer que, lorsque λ décrit IR^*_+, l'ensemble des points P' est la courbe (C) d'équation : $y = 2(x-1)\ln(x-1) + (x-1)$.

4. f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x\ln x + x \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a. f est – elle dérivable en 0 ? Que peut – on en déduire ?

b. Etudier la fonction f et préciser le réel $x_0 \neq 0$ tel que $f(x_0) = 0$

c. Représenter graphiquement f dans le repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}$), l'unité de longueur étant 10 cm

Par quelle transformation du plan la courbe (C) se déduit – elle de la courbe Γ représentant f ?

d. Calculer : $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{x_0} (2x\ln x + x)dx$, x_0 étant le réel trouvé dans la question 3.b) et α un réel de l'intervalle$]0 ; x_0[$.

La fonction $\alpha \mapsto I(\alpha)$ admet-elle une limite en 0 ? En déduire l'aire A du domaine du plan limité par la courbe Γ et l'axe ; (O ; $\vec{i}$).

Exprimer A en cm^2 à 10^{-2} près

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

REPUBLIQUE GABONAISE
UNION – TRAVAIL – JUSTICE

LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO

Tél : 55 21 73 FAX : 55 12 02 BP : 236 PORT-GENTIL

DEVOIR DE MATHS N°5

Serie : C&E

Durée : 4h

Coeff : 5

EXERCICE 1.(4 points)

1° a) *Résoudre l'équation différentielle* $y'' + 4y' + 4y = 0$.

b) Déterminer la solution g vérifiant $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$.

2° a) Justifier l'existence du réel : $I = \int_0^1 (2x+1)e^{-2x}\,dx$

b) Calculer I à l'aide d une intégration par parties .

3° Soit la fonction f définie par $f(x) = (2x+1)\,e^{-2x}$

a) Montrer que f est décroissante sur l'intervalle [0 ; 1].

b) En déduire les encadrements :

(i) $\frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$, $0 \leq k \leq n-1$.

(ii) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \leq I \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$.

c) Déterminer la limite $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE2 (5 points)

Soient les fonctions f et g définies sur] 0 ; +∞[par $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$ et $g(x) = \frac{1}{3}[x + 2e^{\frac{1}{x}}]$.

1°a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1{,}7 \leq \alpha \leq 1{,}8$.

c) Prouver que l'équation $g(x) = x$ équivaut à l'équation $f(x) = 0$.

2°a) Calculer la dérivée g' de g. Prouver que g' est croissante.

b) Calculer g' (1 ;7) et g' (1,8).En déduire que :Pour tout x élément de K = [1,7;1,8] $|g'(x)| \leq \frac{1}{10}$

c) Prouver g est décroissante sur K.

d) Calculer g (1,7) ,g (1,8) et en déduire que $g(K) \subset K$.

e) Montrer que : Pour tout x élément de K , $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{10}|x - \alpha|$.

3° Soit (U_n) la suite définie sur ℕ par $U_0 = 1{,}8$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer que $U_n \in K$ pour tout n .

b) Prouver que : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10}|U_n - \alpha|$ pour tout n.

c) Démontrer par récurrence que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{10^n}$ pour tout n élément de ℕ.

d) Montrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

4°Déterminer une valeur approchée de α à la précision de 10^{-6} .

Ministère de l'Education ... Lycée Joseph Ambouroue ... Port-Gentil ... République

PROBLEME (11 points)

Partie A

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). On désigne par f l'application de P vers P d'expression **analytique** $\begin{cases} x' = x\ln a - y\ln b \\ y' = x\ln b + y\ln a + 3 \end{cases}$ **où a et b sont deux réels strictement positifs.**

1°a)Déterminer l'écriture complexe de f .

b) Pour quelles valeurs du couple (a ; b) l'application f est–elle une transformation du plan ?

2° Le couple (a ; b) désigne les coordonnées d'un point N du plan.

a) Déterminer l'ensemble (E) des points N pour lesquels f est une homothétie.

b) Déterminer l'ensemble (F) des points N pour lesquels f est une translation.

c) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (E ') des points N(a ; b) pour lesquels f est une rotation .

Partie B Soit S l'application du plan dans lui même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 3 \end{cases}$

1° a) Déduire de la partie A ,que S est une transformation du plan.

b) Donner l'expression complexe de S. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S.

2° O étant l'origine du repère, on considère la rotation R de centre O et d'angle - $\frac{\pi}{2}$ et on pose : f =R

a) Déterminer l'écriture complexe de f. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Quelle est l'image par f du point d'affixe - 3 ?

3° Soit g l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{z} - i)$.

a) Donner l'écriture complexe de h = g o S.

b) Quelle est la nature de h ? Montrer que h est une symétrie glissée dont on déterminera l'axe vecteur.

Partie C : Soit g l'application de P vers P d'expression analytique $\begin{cases} x' = e^x \\ y' = e^y \end{cases}$

et (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1° L'application g est – elle une transformation du plan ? Justifier votre réponse.

2° Vérifier que l'image par g de (C) est (E').

3° (E_1) et (E_2) sont les courbes représentatives dans le plan des fonctions f_1 et f_2 définies sur [$\frac{1}{e}$; e] par $f_1(x) = e^{\sqrt{1-\ln^2 x}}$ et $f_2(x) = e^{-\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

a) Etudier les variations de f_1 et f_2.

b) Construire (E_1) et (E_2) sur le même graphe.

c) Montrer que (E ') = (E_1) ∪ (E_2).

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO
Tél : 55 73 21 FAX : 55 12 02 BP : 236 PORT-GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
UNION – TRAVAIL – JUSTICE

BAC BLANC Avril 2005
Epreuve de MATHEMATIQUES

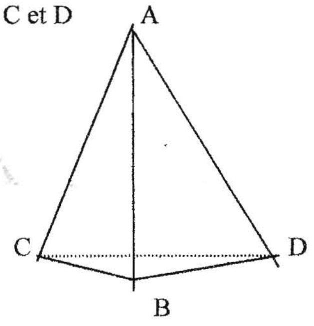
Série : C
Durée : 4h
Coeff : 4

EXERCICE 1 (4 points)

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

$A(0\,;0\,;3)$, $B(2\sqrt{2}\,;0\,;-1)$, $C(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{6}\,;-1)$, $D(-\sqrt{2}\,;\sqrt{6}\,;-1)$.



1°) a) Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes ont la même longueur.

b) Calculer son volume V.

2°) On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC]; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.

3°) Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.

Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1°) Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.

2°) Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.

3°) Calculer la probabilité de l'événement E : « les six faces rouges sont visibles ».

4°) On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres. Calculer la probabilité p_n pour que l'événement E soit réalisé au moins une fois. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} p_n$.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère deux carrés de sens direct ABCD et AEFG tels que : AB = AE = a et $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

Soit K le point tel que DAEK soit un parallélogramme : on appellera I son centre.

Partie I :

En utilisant les isométrie vectorielles, on veut montrer que AK = GB et que les droites (AK) et (GB) sont perpendiculaires et que le triangle FKC est rectangle isocèle en K.

On désigne par ρ la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1°) a) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{GF}$.

b) Démontrer que l'on a : $\rho\left(\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}$ et $\rho\left(\overrightarrow{GF}\right) = \overrightarrow{GA}$. En déduire alors que $\rho\left(\overrightarrow{AK}\right) = \overrightarrow{GB}$.

c) Que peut-on en conclure ?

2°) a) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{KF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EF}$.

b) Démontrer que $\rho\left(\overrightarrow{KF}\right) = \overrightarrow{CK}$ puis conclure.

Partie II :

Soit s la similitude directe qui transforme A en G et K en F.

1°) a) Démontrer que le triangle EAD est équilatéral et que EADK est un losange.

b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

2°) On cherche à construire son centre que l'on notera O.

a) Soit J le point tel que AGJ soit un triangle équilatéral de sens direct.

Quel est l'ensemble (C) des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MG}\right) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$?

b) Soit P le barycentre du système de points pondérés {(G , 3) ; (A , – 1)}.

Démo trer que l'ensemble (C') des points M du plan tels que $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est le cercle de centre P est de rayon $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) En déduire la construction du point O.

PROBLEME (**11 points**)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'unité choisie est le centimètre.

Partie A

1°) Soit **(h)** la conique d'équation $y^2 - x^2 = 16$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Quelle est la nature de **(h)** ?

On note A le sommet de **(h)** d'ordonnée positive. Tracer **(h)**.

2°) On pose : $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$ où x, x', x'', y, y', y'' sont des réels.

Soit R l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$.

Démontrer que R est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3°) Soit S l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' définie par : $z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\bar{z}$.

a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est la droite (D) d'équation : $y = (\sqrt{2}+1)x$.

b) Démontrer que $S = R o S_{(OJ)}$ où J est le point de couple de coordonnées (0 ; 1).

c) Déduire de ce qui précède, la nature de S.

4°) a) Vérifier que : R(A) = S(A). On notera A' ce point.

b) Démontrer que (D) coupe **(h)** en deux points E et F.

5°) a) Démontrer que les coordonnées de M, M', M'' vérifier : $x'y' = x''y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

b) En déduire que **(h)** a la même image par R et S. On appelle (**H**) cette image.

Donner la nature et une équation de (**H**) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6°) a) Expliquer pourquoi E et F appartiennent à (**H**).

b) Construire sur la même figure la courbe **(h)**, les points A et A', la droite (D) et la courbe (**H**).

Partie B

1°) On note **(h+)** l'ensemble des points de **(h)** d'ordonnées positives.

a) Démontrer que **(h+)** est la courbe représentative de la fonction $f: x \to \sqrt{x^2+16}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) Soit N un point de **(h+)** d'abscisse x positive. On note U(x) l'aire de la partie (Δ) du plan, limitée par la courbe **(h+)** et les segments [OA] et [ON]. Démontrer que, pour tout réel positif ou nul x : $U(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+16}\,dt - \left(\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}\right)$.

On ne cherchera pas à calculer U(x).

c) Pour tout réel positif ou nul x, on pose : $G(x) = 8\ln(x + \sqrt{x^2+16})$.

Prouver que U et G ont la même fonction dérivée sur [0 ; +∞[. Calculer U(0) et G(0).

En déduire que pour tout réel positif ou nul x : $U(x) = 8\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right)$.

2°) Soit (C) la courbe représentative de U dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1 cm).

On fera un graphique séparé de celui de la partie A .

a) Etudier le sens de variation de la fonction U sur [0 ; + ∞ [.

b) Calculer le nombre dérivé de U en 0. Préciser l'allure de la courbe (C) au voisinage de l'origine.

c) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle [0 ; 8]. On construira la tangente à (C) en O.

On prendra : ln ≈ 0,693 ; $\ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}881$; $\ln(2+\sqrt{5}) \approx 1{,}444$; $\ln(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}174$.

Partie C

On appelle **(H+)** l'ensemble des points de **(H)** d'ordonnées positives.

On se donne un point N' de **(H+)** d'abscisse x' telle que : $x' \geq 2\sqrt{2}$.

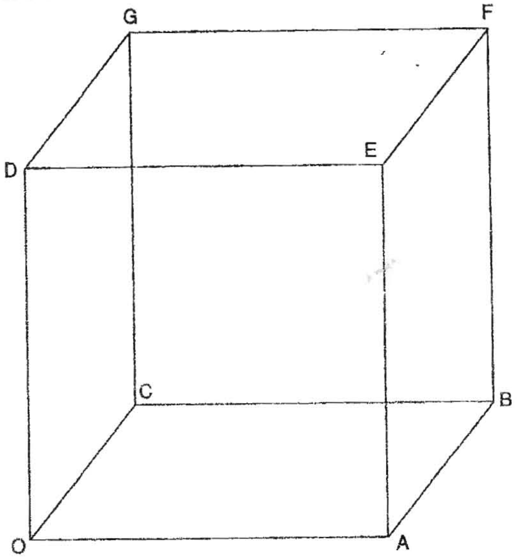
1°) Démontrer que le point N_1, tel que : $N_1 = R^{-1}(N')$ appartient à (**h+**) et que son abscisse x est positive.

2°) Soit (Δ') la partie du plan limitée par **(H+)**, les segments [OA'] et [ON']. Démontrer géométriquement que (Δ') et (Δ) ont la même aire.

Epreuve de Mathématiques

Série : C
Coeff. : 5
Durée : 4 h.

EXERCICE I



Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessus.

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O\,;\vec{OA},\vec{OC},\vec{OD})$.

On désigne par a un réel strictement positif.

L, M et K sont les points définis par $\vec{OL} = a\vec{OC}$, $\vec{OM} = a\vec{OA}$, et $\vec{BK} = a\vec{BF}$.

1. a. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{DM} \wedge \vec{DL}$.

b. En déduire l'aire du triangle DLM.

c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).

2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

a. Démontrer que $\vec{OM}\cdot\vec{OK} = \vec{OH}\cdot\vec{OK}$.

b. Les vecteurs $\vec{OH}$ et $\vec{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\vec{OH} = \lambda\vec{OK}$.

Démontrer que $\lambda = \frac{a}{a^2+2}$. En déduire que H appartient au segment [OK].

c. Déterminer les coordonnées de H.

d. Exprimer $\vec{HK}$ en fonction de $\vec{OK}$. En déduire que $HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a.

EXERCICE II (5 points)

Partie A:

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 1 cm), on considère le point G_0 d'affixe $z_0 = re^{i\theta}$, où r et θ sont deux nombres réels fixés avec $r > 0$.
Soit M_0 le point d'affixe Z_0 tel que le triangle OG_0M_0 soit équilatéral direct. On désigne par G_1 le centre de gravité du triangle OG_0M_0.

1°) a) Démontrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) Exprimer Z_0 en fonction de z_0.

c) Démontrer que le point G_1 d'affixe z_1 est l'image du point G_0 par la similitude directe S de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

2°) On définit dans le plan P les deux suites de points $(M_n)_{n\geq 0}$ et $(G_n)_{n\geq 0}$ telles que, pour tout entier naturel n, le triangle OG_nM_n soit un triangle équilatéral direct de centre de gravité G_{n+1}.

a) Pour tout entier n, on désigne par z_n l'affixe de G_n et Z_n l'affixe de M_n. Démontrer que : $G_{n+1} = S(G_n)$ et exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

b) Pour tout entier n, exprimer z_n en fonction de n, r et θ.

3°) On suppose dans cette question que $z_0 = 8\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. Placer les points G_0, G_1, G_2, G_3 et G_4.

Partie B :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, on considère la suite de points $(K_n)_{n\geq 0}$ telle que $\vec{G_nK_n} = \vec{OG_n} \wedge \vec{OG_{n+1}}$, où les points G_0, G_1, ..., G_n, ... sont ceux de la partie A situés dans le plan $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) a) Montrer que $G_0K_0 = \frac{r^2\sqrt{3}}{6}$.

b) En déduire l'aire du triangle OG_0G_1 en fonction de r.

2°) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = G_nK_n$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Puis en déduire un en fonction de r et de n.

3°) Pour tout n, on note S_n la somme des aires des triangles OG_0G_1 ; OG_1G_2 ; ... ; $OG_{n-1}G_n$. Exprimer S_n en fonction de r et n et calculer la limite de S_n quand n tend vers l'infini.

PROBLEME (**11 points**)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'unité choisie est le centimètre.

Partie A

1°) Soit **(h)** la conique d'équation $y^2 - x^2 = 16$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Quelle est la nature de **(h)** ?

On note A le sommet de **(h)** d'ordonnée positive. Tracer **(h)**.

2°) On pose : $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$ où x, x', x'', y, y', y'' sont des réels.

Soit R l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$

Démontrer que R est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3°) Soit S l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' définie par : $z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\bar{z}$

a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est la droite (D) d'équation : $y = (\sqrt{2}+1)x$.

b) Démontrer que $S = RoS_{(OJ)}$ où J est le point de couple de coordonnées (0 ; 1).

c) Déduire de ce qui précède, la nature de S.

4°) a) Vérifier que : R(A) = S(A). On notera A' ce point.

b) Démontrer que (D) coupe **(h)** en deux points E et F.

5°) a) Démontrer que les coordonnées de M, M', M'' vérifier : $x'y' = x''y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

b) En déduire que **(h)** a la même image par R et S. On appelle (**H**) cette image.

Donner la nature et une équation de (**H**) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6°) a) Expliquer pourquoi E et F appartiennent à (**H**).

b) Construire sur la même figure la courbe **(h)**, les points A et A', la droite (D) et la courbe (**H**).

Partie B

1°) On note **(h+)** l'ensemble des points de **(h)** d'ordonnées positives.

a) Démontrer que **(h+)** est la courbe représentative de la fonction $f : x \to \sqrt{x^2+16}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) Soit N un point de **(h+)** d'abscisse x positive. On note U(x) l'aire de la partie (Δ) du plan, limitée par la courbe (h+),

segments [OA] et [ON]. Démontrer que, pour tout réel positif ou nul x : $U(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+16}\,dt - \left(\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}\right)$.

On ne cherchera pas à calculer U(x).

c) Pour tout réel positif ou nul x, on pose : $G(x) = 8\ln(x + \sqrt{x^2+16})$.

Prouver que U et G ont la même fonction dérivée sur [0 ; +∞[. Calculer U(0) et G(0).

En déduire que pour tout réel positif ou nul x : $U(x) = 8\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right)$.

2°) Soit (C) la courbe représentative de U dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1 cm).

On fera un graphique séparé de celui de la partie A.

a) Etudier le sens de variation de la fonction U sur [0 ; + ∞ [.

b) Calculer le nombre dérivé de U en 0. Préciser l'allure de la courbe (C) au voisinage de l'origine.

c) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle [0 ; 8]. On construira la tangente à (C) en O.

On prendra : ln ≈ 0,693 ; $\ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}881$; $\ln(2+\sqrt{5}) \approx 1{,}444$; $\ln(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}174$.

Partie C

On appelle **(H+)** l'ensemble des points de **(H)** d'ordonnées positives.

On se donne un point N' de (H+) d'abscisse x' telle que : $x' \geq 2\sqrt{2}$.

1°) Démontrer que le point N_1, tel que : $N_1 = R^{-1}(N')$ appartient à (h+) et que son abscisse x est positive.

2°) Soit (Δ') la partie du plan limitée par (H+), les segments [OA'] et [ON']. Démontrer géométriquement que (Δ') et (Δ) ont la même aire.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO

Tél : 55 21 73 FAX : 55 12 02 BP : 236 PORT-GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE

UNION – TRAVAIL – JUSTICE

BAC BLANC n° 1 Avril 2009

Epreuve de MATHEMATIQUES

Série : C&E

Durée : 4h

Coeff : 5

EXERCICE 1. (4 points)

Une urne contient10 boules : cinq sont blanches et portent les numéros 1 ,1 ,1 ,2 ,4 ; trois sont noires et portent les Numéros 1, 3 , 5 ; enfin deux sont rouges et portent les numéros 6 , 6. Les tirages sont équiprobables.

1° Soient A et B deux événements indépendants .Démontrer que $p(A) = p(A \cap \overline{B}) + p(A) \times p(B)$ puis en déduire que A et $\overline{B}$ sont des événements indépendants.

2° Soit l'expérience Є qui consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne.

a) Calculer les probabilités des événements suivants :

E_1 : les deux boules ont la même couleur.

E_2 : les deux boules sont de couleurs différentes.

E_3 : les deux portent le même numéro.

b) Sachant que les deux boules ont la même couleur, calculer la probabilité qu'elles portent le même numéro. Les événements E_1 et E_2 sont-ils indépendants ?

3° On suppose maintenant que : chaque boule tirée portant un numéro impair fait gagner 5F et chaque boule tirée portant un numéro pair fait gagner 10F. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage simultané de deux boules , la somme des gains.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

b) Déterminer et interpréter E(X), l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 (5points) Les questions 1°, 2° et 3° sont indépendantes.

.

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1° On donne les points : $A\binom{2}{0}$, $B\binom{1}{1}$, $C\binom{-2}{-1}$, $A'\binom{3}{10}$, $B'\binom{4}{6}$ et $C'\binom{-3}{-1}$.

Soit f l'application affine du plan telle que : f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'.

a) Démontrer que f est bijective.

b) Déterminer l'expression analytique de f.

c) Déterminer une équation de la droite (D') image par f de la droite (D) d'équation y = 2 x + 3.

2° Soit g l'application affine du plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x - 2 \end{cases}$

a) Démontrer que g est bijective.

b) Déterminer l'écriture complexe de g et en déduire que g est un antidéplacement.

c) Déterminer l'ensemble des points du plan invariants par g et en déduire la nature de g.

d) Déterminer les éléments caractéristiques de g ; (On donnera une équation cartésienne de son axe (Δ)).

3) a) Déterminer l'ensemble (C) des points M du plan d'affixe z telle que $\left|(1+i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

b) Soit h la transformation du plan d'écriture complexe $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.

c) Déterminer E antécédent de O par h. En utilisant h retrouver l'ensemble (C).

PROBLEME (11 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y - 4 = 0$

1° Déterminer le réel b pour que la fonction f telle que $f(x) = e^{2x} + b$ soit solution particulière de (E).

2° Résoudre (E) .

Partie B

Pour tout réel k , on pose $f_k(x) = ke^{2x} - 2$; on appelle (C_k) la courbe de f_k dans un repère orthonormé.

1° a) Montrer qu'à tout point $M(x_0, y_0)$, il correspond un unique réel k tel que M appartient à (C_k).

b) Donner l'équation de la courbe (C_k) passant par (-1 ; 2).

2° a) Donner l'équation de (C_0).

b) On suppose $k \neq 0$. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x)$ et en déduire qu'il existe une droite (D), asymptote à chacune des courbes (C_k).

Partie C

1° a) Etudier le sens de variation de f_1 et donner son tableau de variation.

b) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de (C_1) avec l'axe des abscisses.

c) Tracer (C_1) et (D) dans le repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité 2cm.

2° a) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S d'axe (D) d'équation $y = -2$.

b) Soit S(M)= M'avec M (x, y) et M'(x', y'). Montrer que : $y = f_k(x) \iff y' = f_{-k}(x')$.

c) En déduire que si M est un point de (C_k) alors M' est un point de (C_{-k}).

d) Comment passe- t- on de la courbe (C_k) à la courbe (C_{-k}) ?

e) Tracer (C_{-1}) dans le même repère que (C_1).

3°) Hachurer le domaine Δ, compris entre (C_{-1}) , (C_1) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \frac{1}{2}$.
Calculer en cm^2 l'aire de ce domaine.

4° a) Calculer les coordonnées du point B, intersection de la tangente (T_1) à (C_1) et de la tangente (T_{-1}) à (C_{-1}) au point d'abscisse 0. Tracer ces tangentes.

b) Déterminer l'équation de la tangente (T_k) à (C_k) au point d'abscisse 0 et montrer que toutes les tangentes (T_k) (k variant dans IR) sont concourantes en un point que l'on précisera.

Partie D

Soit (Un) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ où f est la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. On désigne par (C) la courbe de f.

1° a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

b) A l'aide de deux intégrations par partie calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ et en donner une interprétation graphique.

2° Vérifier que, pour tout entier naturel $n \neq 0$, on a : $U_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k+n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = U_n + \frac{e-4}{ne}$

3°a) Etablir que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$ on a :

$$\frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n}).$$

b) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $U_n + \frac{e-4}{ne} \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq U_n$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $I \leq U_n \leq I - \frac{e-4}{ne}$.

d) Etudier la convergence de la suite (Un) puis préciser sa limite.

Département de mathématiques

BACCALAUREAT BLANC : TERMINALES C 1 & 2, SESSION DE MAI 2010

Epreuve de mathématiques(durée : 4 heures)

Exercice1 : ***Arithmétique : division euclidienne, numération de base b, congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$ (3,5 points)***

1) Soit a un entier naturel. Le reste de la division euclidienne de a par 12 est 8.

Quel est le reste de la division euclidienne de a par 6 ? par 4 ? par 3 ?

2) Un entier A s'écrit $\overline{524}$ dans le système de numération de base b et a pour reste 4 dans la division euclidienne par 7.

a) Démontrer que : $5b^2 + 2b \equiv 0[7]$

b) En déduire l'ensemble F des valeurs de b .

3) On suppose que b=7.

Donner l'écriture décimale de A.(on pourra remarquer que A est premier).

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $(x;y)$: $x^2 + 4x = y^2 + 259$

Exercice 2 : *Suite d'intégrales (4 points)*

Pour tout entier strictement positif n, on pose :

$$I_n = \int_1^2 \frac{dt}{t^n e^{1-t}}$$

1)Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$, puis monter qu'elle converge.

2)Démontrer que, pour tout entier naturel strictement supérieur à 1, on a :

$$\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

3) a)Déterminer sur $\mathbb{R}^*$ la fonction dérivée f'_n de $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n e^{1-x}}$.

Donner l'expression de f'_n en fonction de f_n et f_{n+1}.

b) Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}, puis démontrer que : $\lim_{n\to+\infty}(nI_{n+1}) = 1$.

c) En déduire que la suite $(nI_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Problème (12,5 points) :

Les parties A , B et C sont indépendantes. On pourra, en cas de besoin, admettre les résultats d'une partie en l'indiquant clairement, puis traiter la partie suivante.

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit (D) la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x$.

On considère la symétrie s d'axe (D), de direction celle de $\vec{j}$, d'écriture analytique : $\begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}$.

Partie A :*(2,75 points)*

Etude d'une affinité du plan

On considère l'application affine g de (P) dans (P) qui, à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que g est une bijection vérifiant : $g \circ s = s \circ g$.

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(x;y)$ invariants par g .

3) a) Soit $M(x;y)$ un point de (P) d'image $M'(x';y')$ par g .

Démontrer que si $M(x;y)$ n'est pas invariant par g, alors la droite passant par les points $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ garde une direction indépendante de $M(x;y)$ que l'on précisera.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection I de (MM') et de (Δ).

4) Montrer que g est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques.

Partie B :*(6 points)*

Etude d'une famille $\mathcal{F}$ d'applications affines bijectives

On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications affines bijectives f de (P) dans (P) telles que les deux propriétés (1) et (2) suivantes soient satisfaites :

(1) $f(O)$ appartient à (D) d'équation : $y = \frac{1}{2}x$

(2) l'application linéaire φ associée à f vérifie

$\varphi\left(2\vec{i}+\vec{j}\right) = a\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)$

$\varphi\left(\vec{j}\right) = b\vec{j}$

Où, a et b sont des nombres réels non nuls.

1)a) Préciser le couple (a,b) pour que f soit une homothétie.

b) Préciser le couple (a,b) pour que f soit une translation.

2) Soit A un point de (P) tel que le vecteur $\overrightarrow{OA}$ soit colinéaire à $\vec{j}$ et, B un point de (D) distinct de O.

On note ψ l'application linéaire associée à s.

a) Déterminer $\psi\left(\overrightarrow{OA}\right)$ et $\psi\left(\overrightarrow{OB}\right)$.

b) En déduire $\psi\left(\vec{j}\right)$ et $\psi\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)$

(on pourra prendre $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{j}$ et $\overrightarrow{OB} = 2\alpha\vec{i}+\alpha\vec{j}$, $(\lambda,\alpha) \in \mathbb{R}^2$

3) a) Démontrer que s et g appartiennent à $\mathcal{F}$.

4) On note Γ_1, l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant :

$f(O)(2\alpha;\alpha)$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$\varphi\left(\vec{j}\right) = \vec{j}$

$\varphi\left(2\vec{i}+\vec{j}\right) = a\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)$

a) Démontrer que : $\varphi\left(\vec{i}\right) = a\vec{i} + \frac{a-1}{2}\vec{j}$

b) Soit f_1 un élément de Γ_1.

Démontrer que le point $M(x;y)$ a pour image par f_1 le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax + 2\alpha \\ y' = \dfrac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R})$$

c) Quel est l'ensemble des points invariants par f_1 ? (on discutera selon les valeurs de a)

d) Dans cette question, on prend $\alpha = 0$. Soit $M_0(x_0;y_0)$ un point du plan (P). On pose :

$M_1 = f_1(M_0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, M_{n+1} = f_n(M_n)$

On désigne par $(x_n;y_n)$ les coordonnées du point M_n.

-Calculer x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et a.

-Etudier la convergence des suites (x_n) et (y_n).

Partie C : (3,75 points)

Etude d'une fonction, équation de l' image de sa courbe par f_1

1) Soit F la fonction définie par :

$F(x) = \frac{1}{2}x + \ln(x)$.

Etudier le sens de variation de F, puis représenter graphiquement cette fonction dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désignera par (C), la courbe représentative de F.

2) a) Soit f_1 un élément quelconque de Γ_1.

Déterminer une équation de l'image de (C) par f_1.

b) Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $(C_{p,q})$ la courbe d'équation : $y = \ln(px+q) + \frac{1}{2}x$

dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Démontrer que $(C_{p,q})$ est l'image de (C) par une application appartenant à Γ_1.

3) soit (Γ) la courbe d'équation

$y = \ln(-2x+2) + \frac{1}{2}x$

Reconnaître l'application appartenant à Γ_1 qui transforme (C) en (Γ).

4) construire l'image (C') de (C) par $g \circ s$.

COLLEGE & LYCEE RAPONDA WALKER
BP 590 PORT- GENTIL

BAC BLANC - MATHEMATIQUES - 1- 2005

Série : C
Durée : 4 heures
Coeff : 6

EXERCICE 1 (5points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal ($O;\vec{U},\vec{V}$) unité 2cm . On donne les points A , B et C d'affixes respectives $i; \sqrt{2} et \sqrt{2}+i$; on appelle I , J et K les milieux respectifs des segments [OB] , [AC] et [BC] et S la similitude directe qui transforme A en I et O en B .

1 . Faire une figure .

2 . a. Déterminer le rapport et l'angle de S .
 b. Donner l'écriture complexe de S.
 c. En déduire l'affixe ω du centre Ω de S.
 d. Quelle est l'image par S du rectangle AOBC ?

S(A) = I
S(O) = B

3 On considère la transformation $S^2 =$ SoS.
 a. Quelles sont les images des points O ; B et A par S^2 ?
 b. Montrer que S^2 est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
 c. En déduire que les droites (OC) , (BJ) et (AK) sont concourantes.

4. On définit la suite des points A_n de la façon suivante : $A_o = A$ et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = S(A_n)$.
 a. Placer les points A_1 , A_2 et A_3 sur la figure .
 b. On note U_n la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$. Exprimer U_n en fonction de U_{n-1}.
 c. Calculer U_o et en déduire U_n en fonction de n.
 d. Calculer $S_n = U_o + \ldots\ldots + U_n$. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2 (5points)

Dans le plan orienté , on considère le losange OABC tel que $(\vec{OA};\vec{OC}) = \frac{\pi}{3}$ et OA= a où a est un réel strictement positif .

Le cercle (Γ), de centre O et de rayon a , coupe le segment [OB] en E.

Soit F le point de la demi –droite [OC) tel que CF = EB et C est situé entre O et F.

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et r_2 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$. On considère la transformation $g = r_1 o r_2$.

1° a. Déterminer les images des points O et A par g.
 b. Démontrer que g est une rotation dont on précisera l'angle. En déduire que les droites (EF) et (OA) sont perpendiculaires et que EF = OA.
 c. Déterminer et construire l'image (Γ') de (Γ) par g.

2° La perpendiculaire à la droite (OC) passant par E coupe la droite (AB) en Ω
 a. Démontrer que le triangle EΩA est rectangle isocèle en Ω.

b. En admettant que deux rotations de même angle qui coïncident en un point sont égales et en utilisant la question 1° a. déduire le centre de la transformation g.

c. Démontrer que les droites (EF), (AC) et (OΩ) sont concourantes en un point H qui est l'orthocentre du triangle OAE.

PROBLEME (10 points)

Le but du problème est d'étudier dans sa première partie la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}}$, puis, dans sa seconde partie, d'établir un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.

PARTIE A

1. On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = x - e^{x-1}$.

   a. Etudier les variations de g (on ne demande pas dans cette question de calculer les limites de g). Calculer g(1) et montrer que pour tout x réel $g(x) \leq 0$.

   b. En déduire que pour tout x réel $xe^{-x} \leq \dfrac{1}{e}$ puis $1 - xe^{-x} > 0$

2. On désigne par f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}}$

   Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 3cm).

   a. Vérifier que f est définie sur IR.

   b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

   c. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.

   d. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

   e. Tracer (T) puis (C) (on admettra que (C) est au dessus de (T) pour $x < 0$, et au dessous pour $x > 0$)

3. a. Déterminer les images par f des intervalles $[0 ; 1]$ et $[1 ; +\infty[$

   b. En déduire que pour tout x positif ou nul : $1 \leq f(x) \leq \dfrac{e}{e-1}$.

PARTIE B

1. Donner une interprétation géométrique du nombre $I = \int_0^1 f(x)dx$.

2. Soit n un entier naturel non nul, et soit $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$.

   a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_1 = 1 - \dfrac{2}{e}$.

   b. On se propose de calculer J_2 sans utiliser des intégrations par parties. déterminer les coefficients a ; b et c tels que la fonction :

   $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ soit une primitive de $h(x) = x^2 e^{-2x}$

   En déduire $J_2 = \dfrac{1}{4}(1 - \dfrac{5}{e^2})$.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = 1 + J_1 + J_2 + \dots\dots\dots + J_n$.

—>a. Montrer que , pour tout réel x : $1+xe^{-x}+x^2e^{-2x}+\dots\dots\dots+x^ne^{-nx}=\dfrac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}$.

b. En déduire que I - U_n $=\int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)dx$.

c. En utilisant la partie A-1.b montrer que pour tout x positif ou nul :

$0\leq x^{n+1}e^{-(n+1)x}\leq\dfrac{1}{e^{n+1}}$.

En déduire que pour tout x positif ou nul :

$0\leq x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)\leq\dfrac{1}{e^n(e-1)}$.

d. En déduire un encadrement de I- U_n ; étudier alors la convergence de la suite de terme général U_n .

4. Montrer que $U_2\leq I\leq U_2+\dfrac{1}{e^2(e-1)}$. Sachant que $U_2=1+J_1+J_2$, trouver deux nombres décimaux d_1 et d_2 tels que $0<d_2-d_1<10^{-1}$ et $I<d_2$.

FIN

40

INSTITUTION IMMACULEE CONCEPTION

BAC BLANC 2007

MATHEMATIQUES

SERIE C

DUREE : 4 HEURES

Exercice 1 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD direct tel que : AB = a et BC = 2a, où a est un nombre réel strictement positif. On désigne par K le milieu du segment [BC].

1- m désigne un nombre réel non nul, et on désigne par G_m le barycentre des points pondérés

(A, m), (B, - 1) et (C, 1).

a). Préciser la position de G_1.

b). Déterminer l'ensemble (E) des points G_m lorsque m décrit IR\{0}.

c). Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = a\sqrt{5}$.

d). Déterminer, en fonction de a, la valeur du nombre réel k tel que le point A appartient à l'ensemble (L_k) des points M qui vérifient : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = k$.

2- Soit s la similitude directe telle que : s(A) = K et s(B) = D.
Déterminer le rapport et l'angle de s.

3- On veut préciser la position du centre O de la similitude s.

a). Les droites (AB) et (DK) se coupent en I.
Démontrer que les points A, O, K et I sont cocycliques.
En déduire que BK = BO = BA.

b). Démontrer que DK = DO.

c). En déduire que O est le symétrique de K par rapport à la droite (BD).

4- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct tel que les affixes des points A, B et D sont respectivement 0, 1 et 2i.

a). Déterminer l'expression complexe de s et l'affixe de O.

b). Vérifier que O est bien le symétrique de K par rapport à la droite (BD) en montrant que BK = BO et que les droites (OK) et (BD) sont orthogonales.

Exercice 2 : (5 points)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J) et f est une application affine de P dans P qui, au point M (x ; y) associe le point M' (x' ; y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{7}(8x+4y+7) \\ y' = \frac{1}{7}(5x+27y+35) \end{cases}.$$

1- a). Déterminer l'ensemble (Δ) des points de P invariants par f.

b). Montrer que, si M n'est pas invariant, la droite (MM') garde une direction fixe que l'on précisera.

c). Montrer que les coordonnées du point H, intersection de (MM') et de (Δ) sont :

$$x_H = \frac{20x-4y-7}{21} \quad \text{et} \quad y_H = \frac{-5x+y-35}{21}.$$

d). Exprimer le vecteur $\overrightarrow{HM'}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$; reconnaître l'application f et préciser ses éléments caractéristiques.

2- Soit la suite de points $A_n(x_n ; y_n)$ telle que $A_0(2 ; 3)$ et $A_{n+1} = f(A_n)$.

a). Montrer par récurrence que tous les points $A_n(x_n ; y_n)$ appartiennent à la droite (D) dont une équation est : $5x - y - 7 = 0$. En déduire que : $x_{n+1} = 4x_n - 3$.

b). Démontrer que (x_n) et de (y_n) sont des suites de nombres entiers relatifs.

3- a). Montrer que x_n est divisible par 7 si et seulement si y_n est divisible par 7.

b). Montrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 7, alors x_n et y_n sont premiers entre eux.

c). Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $x_n = 4^n + 1$.

d). Quels sont les restes de la division euclidienne de 4^n par 7 ?

En déduire que x_n et y_n sont toujours deux nombres entiers relatifs premiers entre eux.

***PROBLEME :** (10 points)*

m étant un nombre réel, on appelle f_m l'application de]0 ; +∞[dans IR qui, à x, associe

$f_m(x) = \dfrac{x^2-1}{4} - \dfrac{m}{2}\ln x$ et (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I, J) ; l'unité de longueur est 5 cm.

Partie A : L'objet de cette partie est l'étude de f_m.

1- a). Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$.

b). En distinguant les cas où m = 0, m< 0 et m > 0, calculer $\lim\limits_{x\to 0} f_m(x)$.

2- a). Justifier que f_m est dérivable sur]0 ; +∞[, puis donner suivant les valeurs de m, les différents tableaux de variation possibles.

b). Montrer que, par un point $M_0(x_0 ; y_0)$ vérifiant $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$, il passe une et seule courbe (C_m).

c). Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un unique point Ω dont on précisera les coordonnées.

Construire les courbes (C_0), (C_4) et (C_{-1}) dans le même repère (O ; I, J).

Partie B : Dans cette partie, on considère la fonction f_4 telle que : $f_4(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{4} - 2\ln x$.

1- Montrer que l'équation $f_4(x) = 0$ possède deux solutions et deux seulement dont l'une x_0 appartient à [3 ; 4] (On ne demande pas de calculer x_0 ici).

Montrer que $x_0 = \sqrt{1+8\ln x_0}$.

2- On considère la fonction numérique g définie de [3 ; +∞ [vers IR par : $g(x) = \sqrt{1+8\ln x}$.

Montrer que : $g(x) \geq 3$,

et que : $0 \leq g'(x) \leq \dfrac{4}{9}$.

3- Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = g(u_n) = \sqrt{1+8\ln(u_n)}$.

a). Montrer par récurrence que : $\forall n \in IN,\ u_n \geq 3$.

b). Montrer que : $\forall n \in IN,\ |u_{n+1} - x_0| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - x_0|$.

c). Montrer que : pour tout n de IN, $|u_n - x_0| \leq (\frac{4}{9})^n$. En déduire la convergence de (u_n).

d). Trouver le plus petit entier n tel que u_n soit une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie C : On considère la fonction h définie sur]0 ; +∞[par : $h(x) = \dfrac{x^2-1}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$. [On pourra reconnaître que $h = f_1$].

1- On note λ un réel strictement positif.

a). A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln x \, dx$.

En déduire la valeur de $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} h(x)\,dx$.

b). Déterminer la limite A de $A(\lambda)$ quand λ tend vers zéro par valeurs supérieures.

2- Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{p=n} h(\frac{p}{n})$.

a). En utilisant le sens de variation de h sur]0 ; 1], démontrer que, pour p entier naturel vérifiant $1 \leq p \leq n-1$, on a : $\frac{1}{n} h(\frac{p+1}{n}) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h(x)dx \leq \frac{1}{n} h(\frac{p}{n})$.

b). En déduire que : $S_n - \frac{1}{n} h(\frac{1}{n}) \leq A(\frac{1}{n}) \leq S_n$.

puis que : $A(\frac{1}{n}) \leq S_n \leq A(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} h(\frac{1}{n})$.

c). En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE
LYCEE JOSEPH AMBOUROUE-AVARO
BP: 236 Tél 55-21-73
PORT-GENTIL

BAC BLANC n° 1 (Février 2002)
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Série: C
Durée: 4h
Coeff: 5

EXERCICE 1

Partie A

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct ,A , B , H sont les points d'affixes respectives a , b et $\frac{a+b}{2}$ et $a \neq b$

A chaque point M(z) distinct de A , B , H on associe le point M'(z') tel que

$$\frac{z'-a}{z'-b} = -\frac{z-a}{z-b} \qquad [1]$$

1°) Montrez que
$(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \pi$, modulo 2π

2°) a) Montrez que

$$\left(z'-\frac{a+b}{2}\right)\left(z-\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

b) Déduisez-en que la droite (AB) est bissectrice de $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'})$, et que : $HM \times HM' = HA^2$

c) Montrez que , sans calculs nouveaux ,que si K est le milieu de [MM'] , la droite (MM') est la bissectrice de $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB})$.

3°) On suppose que $a = 2i$, $b = 4+3i$, $z = 1+4i$
Placez alors le point M'(z')

Partie B

Applications aux racines carrées d'un nombre complexe

1°) α est un complexe non nul , z_1 et z_2 sont deux racines carrées de α .Les points M_1 , M_2 , A , B ont pour affixes respectives z_1 , z_2 , α et 1 . Montrez que pour $a = \alpha$ et $b = 1$, z_1 et z_2 vérifient la relation [1] énoncée au début de la partie A

2°) Déduisez-en que (M_1M_2) est bissectrice de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, où O est l'origine du repère

3°) Placez les points M_1 et M_2 lorsque $\alpha = -3+2i$

EXERCICE 2

Méthode de calcul d'une valeur approchée de l'intégrale

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

1°) *Transformation de J*

Pour tout élément u de $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, on pose

$F(u) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et pour tout élément x de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

on pose $G(x) = \int_0^x \frac{\sin \pi t}{1-t}\,dt$

a) Prouvez que pour tout élément x de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

$$G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$$

(*On pourra comparer les dérivées des deux membres*)

b) En déduire que $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi t}{1-t}\,dt$

2°) *Approximation de J*

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi t\,dt$

et si $n \geq 1$, $U_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin \pi t\,dt$

a) Prouvez que , pour tout $n \geq 1$
$J = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1} + r_n$
où $r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin \pi t}{1-t}\,dt$

b) Etablissez que , pour tout élément t de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

$$\frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \leq 2t^n$$

Déduisez-en une majoration simple de r_n .

c) Montrez que : $J = \lim\limits_{n \to +\infty} (U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1})$.

3°) *Calcul des intégrales U_n.*

a) Calculez U_0 et U_1

b) Etablissez que , pour tout entier $n \geq 2$:

$$U_n = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)U_{n-2}\right]$$

4°) *Conclusion*

A partir des résultats obtenus en 2°) et 3°) , indiquez une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision 10^{-2} (On ne demande pas d'effectuer ce calcul)

PROBLEME

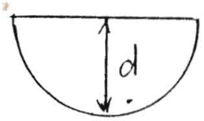
La chaînette

La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène , pesant , flexible et inextensible , suspendu par ses extrémités à deux points fixes (Définition Petit Larousse) .

On montre et on admet dans ce problème que , rapportée à un repère orthonormé convenable , la chaînette admet une équation de la forme

$$y = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda} \qquad \text{avec} \quad \lambda > 0$$

On laisse prendre un tel fil d'une longueur de 4 m entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m . Le but du problème est de calculer une valeur approchée de la flèche prise par le fil , c'est-à-dire la distance d indiquée sur le schéma ci-dessous



A cet effet , pour tout $\lambda > 0$, on considère la fonction f_λ définie sur ℝ par $f_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$

On note (C_λ) la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé .

Partie A : Etude de la chaînette

1°) a) Etudiez la parité de f_1 ; préciser sa limite en $+\infty$ et dresser son tableau de variations

b) Tracez (C_1) (unité graphique : 1 cm) .

c) Prouvez que pour tout λ la courbe (C_λ) se déduit de (C_1) par une homothétie dont précisera le centre et le rapport

2°) Calcul de la longueur de la chaînette .

On admet que la longueur $L(\lambda)$ de l'arc de courbe d'équation $y = f_\lambda(x)$ compris entre les points d'abscisse $x = -1$ et $x = 1$ est égale l'intégrale

$$L(\lambda) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'_\lambda(x)]^2}\,dx$$

(l'unité de longueur étant le mètre) .

a) Vérifiez que :

$$1 + [f'_\lambda(x)]^2 = \left(\frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}\right)^2$$

b) En déduire que : $L(\lambda) = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda}$

c) Calcul de la flèche

Exprimez en fonction de λ la flèche $d(\lambda) = f_\lambda(1) - f_\lambda(0)$ de la chaînette (C_λ) , (l'unité de longueur étant le mètre)

Partie B : Etude de l'équation $L(\lambda) = 4$

Soit λ un nombre réel strictement positif

1°) a) Résolvez l'équation d'inconnue X réelle :
$X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$

b) En déduire que $L(\lambda) = 4$ équivaut à
$e^\lambda = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1}$

c) Prouvez enfin que $L(\lambda) = 4$ équivaut à :
$\lambda = \ln(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1})$

2°) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$g(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2+1})$

a) Calculez la dérivée de la fonction
$U : x \to 2x + \sqrt{4x^2+1}$ Calculer g' (x)

b) En déduire le sens de variation de g .

3°) Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$h(x) = x - g(x)$

a) Calculez h'(x) Etudier le signe de h'(x)

b) Prouvez que , pour tout $x > 0$

$$g(x) = \ln x + \ln\left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

En déduire la limite de h(x) quand x tend vers $+\infty$

c) Dressez le tableau de variations de h .
Déduisez-en que l'équation $g(x) = x$ admet une solution α et une seule dans $]0 ; +\infty[$

d) Prouvez que $2 \leq \alpha \leq 3$.

4°) On note $I = [2 ; +\infty[$

a) Démontez que , pou tout élément x de I , $g(x) \in I$
(on pourra utiliser **B 2°)**)

b) Prouvez que , pour tout élément x de I
$0 < g'(x) \leq 0,5$.
Déduisez-en que , pour tout élément x de I
$|g(x) - \alpha| \leq 0,5|x - \alpha|$

5°) a) Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite d'éléments de I définie par $U_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$ $U_{n+1} = g(U_n)$
Démontrez que , pour tout entier naturel n :
$|U_n - \alpha| \leq (0,5)^n |U_0 - \alpha|$

b) Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$

c) Déterminez un entier n_0 tel que U_{n0} soit une valeur approchée de α à la précision 10^{-3} et calculez U_{n0} .

6°) On se place dans la situation décrite au début du problème . En rassemblant les résultats obtenus dans celui-ci , calculez une valeur approchée de la flèche $d(\alpha)$.

INSTITUTION IMMACULEE CONCEPTION — AVRIL 2008

Département de Mathématiques — BAC BLANC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

TERMINALE C — Coefficient: 5 — Durée : 4 HEURES

EXERCICE 1 : (4,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et A est le point d'affixe i.

On considère l'application ϕ du plan vers le plan qui à tout point M distinct de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = i + \frac{2}{\bar{z} + i}$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

1- a). Calculer $\alpha = f(\frac{-4\sqrt{3}+15i}{13})$, puis $|\alpha|$ et $\arg(\alpha)$.

b). Calculer la **racine** β de l'équation $f(z) = \sqrt{2} + i$ et la **racine** γ de l'équation $f(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2- a). Calculer $\arg[(z' - i)(\bar{z} + i)]$. Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

b). Exprimer l'affixe z'' de M'' $= \phi \circ \phi(M)$ en fonction de l'affixe z de M. Que peut-on dire de $\phi \circ \phi$?

c). On appelle J l'ensemble des points invariants par ϕ. Donner une condition sur la distance AM pour que le point M d'affixe z appartienne à J. **Caractériser géométriquement** cet ensemble J.

3- On pose $z = x + iy$, et $z' = f(z) = x' + iy'$, où x, y, x' et y' sont des réels.

a). Calculer x' et y' en fonction de x et y.

b). Déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, pour lesquels z' est réel.

c). Déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, pour lesquels la partie réelle x' de z' est nulle.

EXERCICE 2 : (4,5 points)

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$.

Soit (Γ) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ;\vec{i}, \vec{j})$ et Δ le domaine limité par (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = 1.

I- 1). Montrer que (Γ) est incluse dans la courbe (H) d'équation :

$$2y^2 - 4(x - \tfrac{1}{2})^2 = 1.$$

2). Montrer que **(H) est une hyperbole**. Donner *son axe focal, son centre et ses sommets*. **Tracer (H)** et (Γ).

II- Soit a un nombre réel de [0 ; 1]. On pose :

$$A = 1 + \frac{a}{2} + \sqrt{1+a} \quad \text{et} \quad B == 1 + \frac{a}{2} - \sqrt{1+a}.$$

Calculer le produit AB. En déduire que :

$$0 \leq 1 + \frac{a}{2} - \sqrt{1+a} \leq \frac{a^2}{8}. \qquad (1)$$

III- Soit $I = \int_0^1 f(x)dx$. (On ne cherchera pas à calculer I).

1) Utiliser (1) pour démontrer que pour tout x de [0;1] :

$$1 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 \leq \sqrt{1 + 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq 1 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

2) En déduire un **encadrement de I**.

3) Donner une **interprétation graphique de l'intégrale I**.

PROBLEME : (11 points) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A :

1- Soit f la fonction numérique définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = x - \frac{1}{2} + e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Etablir le tableau de **variations** de f.

2- Soit T l'application ponctuelle qui à tout point M du plan de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x', y') tels que : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}$.

a). Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ **est colinéaire au vecteur** $\vec{i} + \vec{j}$ et que **le milieu de [MM'] appartient à l'axe (O ;** $\vec{j}$**)**.

b). Reconnaître l'application T.

3- Soit g la fonction numérique définie sur] – ∞ ; 0] par $g(x) = x - \frac{1}{2} + e^{x}$ et soit (C_1) sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a). Montrer que **l'image de la courbe (C) par T est la courbe** (C_1).

b). Etablir le **tableau de variations** de g.

4- Montrer que (C) et (C_1) admettent pour **asymptote** la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ et préciser leur position par rapport à (D).

5- Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - \frac{1}{2} + e^{-|x|}$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que **(Γ) est la réunion de (C) et de (C_1).**

6- En adoptant une unité de **4 cm sur chaque axe, construire** (D) et la courbe (Γ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ en précisant **les demi-tangentes** à (Γ) au point A d'abscisse 0.

Partie B

Soit D_k la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$, où k est un réel strictement supérieur à 1.

1- a). Etudier **la position relative** de (C) et D_k et donner l'abscisse de **leur point commun M_k**.

b). Etudier **la position relative** de (C_1) et D_k et donner l'abscisse de **leur point commun N_k**.

c). Vérifier que **$N_k = T(M_k)$** (T étant l'application définie en Partie A, 2-) et que le **milieu P_k de $[M_kN_k]$ appartient à l'axe $(O ; \vec{j})$**.

2- Démontrer que les parties du plan limitées, l'une par (C), D_k et $(O ; \vec{j})$,

l'autre par (C_1), D_k et $(O ; \vec{j})$ ont **la même aire a(k)**.

Etudier **la limite de a(k) lorsque k tend vers** $+\infty$.

3- Montrer que l'aire du triangle AP_kM_k est **$S(k) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\ln k$**.

4- On se propose d'étudier s'il existe une valeur de k telle que **S(k) = 2a(k).** **(1)**

a). ψ étant la fonction numérique définie sur $]1 ; +\infty[$ par $\psi(k) = \ln k - 4\frac{k-1}{k+3}$, montrer que l'égalité précédente **(1)** équivaut à : $\psi(k) = 0$.

b). Etablir le **tableau de variation de ψ**.

c). En déduire **l'existence et l'unicité de la valeur de k** vérifiant l'égalité (1) et **encadrer** cette valeur par deux entiers consécutifs.

06 83255

COLLÈGE NOTRE DAME DE QUABEN
L'HIRONDELLE LA MESSAGÈRE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

25

BAC BLANC 2010
Mathématiques Série C
Coef : 5 Durée : 4 heures

EXERCICE 1(5 points)

1. Soit la suite (u_n), définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$.

a) Soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

2. On considère deux dés, notés A et B. le dé A comporte trois faces rouge et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

On choisit un dé hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si o obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.

On désigne par A_n l'événement « on utilise le dé A au n^ième^ lancer », par $\overline{A_n}$ l'événement contraire de A_n, par R_n l'événement « on obtient rouge au n^ième^ lancer » et par $\overline{R_n}$ l'événement contraire de R_n, par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.

a) Déterminer a_1.

b) Déterminer r_1 ; (pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.)

c) Montrer que $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.

d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $A_{n+1} = (R_n \cap A_n) \cup (\overline{A}_n \cap \overline{R}_n)$.

e) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer a_n en fonction de n.

f) en déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2(5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle isocèle tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit rectangle et isocèle avec $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$.

Pour la figure, que l'on complètera en traitant les questions, on prendra AB = 5 cm.

1. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = r_A \circ r_C$.
   a) Déterminer les images par f de A et de B.
   b) Démontrer que f est une rotation dont précisera l'angle. On désigne par O son centre.
   c) Démontrer que ABOC est un losange.

2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' limage de C par s, H le milieu du segment $[BC]$ et H' son image par s.
   a) Donner une mesure de l'angle de s. Montrer que C' appartient à la droite (OA).
   b) Donner l'image par s du segment $[OA]$ et montrer que H' est le milieu de $[OB]$.
   c) Montrer que $(C'H')$est perpendiculaire à (OB). En déduire que C' est centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

PROBLEME (10 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(x) = \frac{t-1}{lnt} \quad si\ \ t \in]0\,;1[\end{cases}$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Le but du problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale :

$$\int_1^1 ft)dt$$

A – Etude de f

1. a) Montrer que f est continue en 0 et en 1.
   b) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;1[$.
   Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ a le même signe que $\varphi(t)$, où φ est la fonction définie sur $]0\,;1[$ par :
   $$\varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}.$$
   c) Etudier les variations de φ ; en déduire le signe de f'.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
3. a) Prouver que, pour tout élément u de $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$:
   $$0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2$$
   En déduire que : $0 \leq -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \leq \frac{2u^3}{3}$.
   b) Soit g la fonction définie sur $]0\,;1[$ par :
   $$g(x) = \frac{1}{f(x)}\ .$$
   Prouver, que pour tout élément h de $\left[-\frac{1}{2}\,;0\right]$:
   $$0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}$$
   En déduire que g est dérivable en 1 et préciser $g'(1)$.
   c) En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ (unité graphique 10 cm).

B – Calcul de l'intégrale I

Pour tout élément x de $]0;\ 1]$, on pose : $I(x) = \int_x^1 f(t)dt$ et $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt$.

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales.)

1. Soit K la fonction définie sur $]0;\ 1]$ par :

$$K(x) = J(x^2) - J(x).$$

   a) Montrer que K est dérivable sur $]0;\ 1]$ et que

$$K'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - 2f(x^2)].$$

   b) Prouver que, pour tout élément x de $]0;\ 1]$:

$$f(x) - 2f(x^2) = -xf(x).$$

   c) En déduire que, pour tout élément x de $]0;\ 1]$:

$$I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\, lnt}\, dt. \ (1)$$

2. Calculer la dérivée de la fonction $\Psi : t \mapsto \ln(-\ln t)$ sur $]0;\ 1]$.

   En déduire que, pour tout élément x de $]0\ ;1[$:

$$\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\, lnt}\, dt = \ln x.\ (2)$$

3. Prouver que, tout élément $0 < t < x < 1$: $0 \leq -\frac{1}{\ln t} \leq -\frac{1}{lnx}$.

   En déduire que, pour tout élément x de $]0\ ;1[$:

$$0 \leq \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \leq -\frac{x}{\ln x}.\ (3)$$

4. A partir de (1), (2) et (3), déterminer la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 0.
5. Etablir que, pour tout élément x de $]0;\ 1]$:

$$I - I(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

   En déduire que $0 \leq I - I(x) \leq x$.

6. Prouver finalement que $I = \ln 2$.

2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' limage de C par s, H le milieu du segment $[BC]$ et H' son image par s.
   a) Donner une mesure de l'angle de s. Montrer que C' appartient à la droite (OA).
   b) Donner l'image par s du segment $[OA]$ et montrer que H' est le milieu de $[OB]$.
   c) Montrer que $(C'H')$est perpendiculaire à (OB). En déduire que C' est centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

PROBLEME (10 points)

On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(x) = \frac{t-1}{lnt} \quad si \;\; t \in]0\,;1[\end{cases}$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Le but du problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale :

$$\int_1^1 ft)dt$$

A – Etude de f

1. a) Montrer que f est continue en 0 et en 1.
   b) Montrer que f est dérivable sur]0 ; 1[.
   Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ a le même signe que $\varphi(t)$, où φ est la fonction définie sur]0 ; 1[par :
   $$\varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}.$$
   c) Etudier les variations de φ ; en déduire le signe de f'.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
3. a) Prouver que, pour tout élément u de $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$:
   $$0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2$$
   En déduire que : $0 \leq -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \leq \frac{2u^3}{3}.$
   b) Soit g la fonction définie sur]0 ; 1[par :
   $$g(x) = \frac{1}{f(x)} \;.$$
   Prouver, que pour tout élément h de $\left[-\frac{1}{2}\,;0\right]$:
   $$0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}$$
   En déduire que g est dérivable en 1 et préciser $g'(1)$.
   c) En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1) = \frac{1}{2}.$

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ (unité graphique 10 cm).

B – Calcul de l'intégrale I

Pour tout élément x de $]0;\ 1]$, on pose : $I(x) = \int_x^1 f(t)dt$ et $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$.

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales.)

1. Soit K la fonction définie sur $]0;\ 1]$ par :

$$K(x) = J(x^2) - J(x).$$

   a) Montrer que K est dérivable sur $]0;\ 1]$ et que

$$K'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - 2f(x^2)].$$

   b) Prouver que, pour tout élément x de $]0;\ 1]$:

$$f(x) - 2f(x^2) = -xf(x).$$

   c) En déduire que, pour tout élément x de $]0;\ 1]$:

$$I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\,lnt}\,dt. \ (1)$$

2. Calculer la dérivée de la fonction $\Psi : t \mapsto \ln(-\ln t)$ sur $]0;\ 1]$.

   En déduire que, pour tout élément x de $]0\,;1[$:

$$\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\,lnt}\,dt = \ln x. \ (2)$$

3. Prouver que, tout élément $0 < t < x < 1$: $0 \leq -\frac{1}{\ln t} \leq -\frac{1}{lnx}$.

   En déduire que, pour tout élément x de $]0\,;1[$:

$$0 \leq \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \leq -\frac{x}{\ln x}. \ (3)$$

4. A partir de (1), (2) et (3), déterminer la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 0.
5. Etablir que, pour tout élément x de $]0;\ 1]$:

$$I - I(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

   En déduire que $0 \leq I - I(x) \leq x$.

6. Prouver finalement que $I = \ln 2$.

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Baccalauréat Blanc

Session d'avril 2008

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
SERIE : C
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

EXERCICE I : (4 points)

1/On considère l'équation **(1)** d'inconnue (n,m) élément de $\mathbb{Z}^2$: $11n-24m=1$ **(1).**

a) Montrer, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation **(1)**.

c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation **(1)**.

2/ Recherche du PGCD de $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$

a) Montrer que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.

b) (n,m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de **(1)**, montrer que l'on peut écrire: $\left(10^{11n}-1\right)-10\left(10^{24m}-1\right)=9$.

c) Montrer que $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$.(On rappelle que: $\forall n\in\mathbb{N}^*, a^n-1=(a-1)\left(a^{n-1}+a^{n-2}+..+a^0\right)$).

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que:

$$\left(10^{11}-1\right)N-10\left(10^{24}-1\right)M=9 .$$

d) Montrer que tout diviseur commun à $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ divise 9.

e) Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$.

EXERCICE II : (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note:

(D_1) la droite d'équation $y=x$; (D_2) la droite d'équation $y=-x$.

À tout point $M(x,y)$ du plan, on associe le point M_1 intersection de (D_1) et de la parallèle à $(O,\vec{u})$ passant par M, et le point M_2 intersection de (D_2) avec la parallèle à $(O,\vec{v})$ passant par M.

On définit les points P et Q par les relations vectorielles: $\overrightarrow{OP}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}\right)$ et $\overrightarrow{OQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}\right)$

A/. Soit f l'application qui, à tout point M, associe le point P.

1°) Montrer que le point O est invariant par f.

2°) Déterminer les coordonnées des points M_1 et M_2 en fonction des coordonnées (x,y) de M.

Vérifier que: $OP=OM$.

3°) a) Exprimer l'affixe z_p du point P en fonction de l'affixe z de M.

b) Reconnaître alors l'application f.

B/. Soit g l'application, qui, à tout point M, associe le point Q.

1°)Quelle est l'image du point O par g ?

2°)Déterminer les coordonnées de Q en fonction des coordonnées (x,y) de M, et vérifier que $OQ=OM$.

3°)Montrez que l'ensemble des points invariants par g est une droite, dont on déterminera une équation.

4°)Pour tout point M, déterminer les coordonnées de $(g\circ g)(M)$.

Déduire que M a pour unique antécédent par g le point $g(M)$, et conclure que g est une isométrie du plan.

5°) Reconnaître alors l'application g.

PROBLEME : (11 points)

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f_n(x)=x^n\ln(1+x)$.

Le problème est consacré à l'étude de la famille des fonctions f_n et à celle d'une suite liée à ces fonctions f_n.

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie I : Étude des fonctions f_n

1°/. Soit h_n la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par: $h_n(x)=n\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$

Étudier le sens de variation de h_n. En utilisant la valeur de $h_n(0)$, déterminer le signe de h_n sur $]-1;+\infty[$.

2°/.

a°) Vérifier que pour tout x de $]-1;+\infty[$: $f_1'(x)=h_1(x)$, et que pour tout $n>1$, $f_n'(x)=x^{n-1}h_n(x)$.

b°) On suppose n impair. Justifier que $f_n'(x)$ et $h_n(x)$ sont de même signe pour tout x de $]-1;+\infty[$.

c°)Dresser alors le tableau de variation de la fonction f_n lorsque n impair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

d°) Dressez de même le tableau de variation de f_n lorsque n est pair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

3°/.a°) Étudier la position relative des courbes (C_1) et (C_2).

b°) Tracer ces deux courbes.

Partie II : Étude d'une suite

Dans cette partie, (u_n) est la suite définie par: $u_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)dx$, $n\geq 1$

1°/ *étude de la convergence*

a°) Démontrer que : $0\leq u_n\leq\dfrac{\ln 2}{n+1}$.

b°) Déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

c°) À l'aide de l'encadrement obtenu en a°), déterminer un entier naturel n_0

tel que pour tout $n\geq n_0$, $0\leq u_n\leq\dfrac{1}{100}$.

2°/. *Calcul de* u_1

a°). En remarquant que pour tout x appartenant à $[0;1]$, $\dfrac{x^2}{1+x}=x-1+\dfrac{1}{1+x}$, calculer $\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x}dx$

b°) Calcul de u_1 au moyen d'une intégration par parties.

3°/. *Calcul de* u_n

Pour tout x de $[0;1]$ et pour tout $n\geq 2$, on pose: $S_n(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k x^k$ [1]

a°) Démontrer que : $S_n(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$ [2].

b°)En utilisant successivement les expressions [1] et [2] de $S_n(x)$,montrer que :

$$1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

c°)En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent,démontrer que :

$$u_n=\frac{\ln 2}{n+1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\left[\ln 2-\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

4°/. *Application*

Soit E l'ensemble des points M du plan, de coordonnées (x,y) vérifiant $0\leq x\leq 1$ et $f_2(x)\leq y\leq f_1(x)$.

Calculer u_2 et en déduire l'aire de E en cm^2.

30

République Gabonaise
Ministère de l'Education Nationale et de l'Instruction Civique
Lycée d'Application Nelson Mandela
Bac Blanc – Session de Mai 2009

Epreuve de Mathématiques

Série C

Coefficient 4
Durée : 4 heures
Calculatrices scientifiques autorisées

Ce sujet comporte quatre (4) pages numérotées I, II, III et IV, deux (2) exercices et un problème. Le candidat devra s'assurer d'avoir un sujet complet. Le barème est donné à titre indicatif et le candidat pourra commencer par l'exercice ou le problème de son choix.

Exercice 1 | *Etude de la convergence d'une suite* **(4 points)**

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i}{n^2}\right) \; ; \; v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$$

1. Exprimer v_n en fonction de n puis montrer que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

2. Soient les fonctions numériques f, g et h définies par :
$f(x) = x - \sin x$; $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cos x$ et $h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$. Montrer que pour tout réel positif x, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ et $h(x) \geq 0$

3. Démontrer à l'aide d'une démonstration par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq \sum_{i=1}^{n} i^3 \leq n^4$.

4. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$ et calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 | *Composition de transformatiös du plän par les complexes* **(5 points)**

Parie A

On considère la transformation ponctuelle F qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M'=F(M) d'affixe z'=f(z)= $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2 + i$. On se propose de préciser les caractéristiques de cette transformation.

1. a. Placer les points A(3+5i), B(-4-i) et C(-2+9i) dans le repère du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 1cm) ainsi que les points A'=F(A), B'=F(B) et C'=F(C)

   b. Montrer que F est un antidéplacement.

c. Déterminer l'expression analytique de F.

2. a. La transformation F admet-elle des points invariants ?

b. Déterminer les caractéristiques de la transformation $F \circ F$.

3. a. Montrer que les milieux des segments [AA'], [BB'] et [CC'] sont alignés et préciser à quelle droite (D) ils appartiennent.

b. Montrer que la droite (D) est globalement invariante.

4. On pose $z_{\overline{U}} = 2 + i$. Montrer que le point m défini par $z_m = z' - z_{\overline{U}}$ est le symétrique de M par rapport à (D).

5. Indiquer de quelles transformations F est la composée, puis donner la nature et les élément caractéristiques de F.

Partie B

On se propose maintenant la démarche inverse. On se donne une droite (D') ensemble des nombres complexes d'affixes z=x+(x+2)i. Ensuite, à partir du point M d'affixe z, on se propose de définir en fonction de z, l'affixe du point M' transformé du point M par la symétrie d'axe (D') suivie de la translation de vecteur $\vec{V}$ d'affixe $z_{\vec{v}}=-1-i$

1. On appelle H, d'affixe $Z_H = X_H + iY_H$, la projection orthogonale de M sur (D').

a. Déterminer une expression de Z_H qui caractérise l'appartenance de ce point à la droite (D').

b. Après avoir calculé l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MH}$, en s'appuyant sur la connaissance de la $\overrightarrow{MH}$ direction du vecteur $\overrightarrow{MH}$, montrer que l'affixe du point H est $Z_H = \frac{z}{2} + \frac{\bar{z}}{2}i - 1 + i$.

2. Déterminer l'affixe du point m symétrique de M par rapport à (D') en fonction de l'affixe de M (*<u>indication</u>:m symétrique de M par rapport à (D') équivaut à dire que* $\overrightarrow{Hm} = \overrightarrow{MH}$) .

3. Déterminer l'affixe du point M' transformé de M par la translation de vecteur $\vec{V}$ en fonction de l'affixe z du point M

4. Vérifier que la droite (D') est globalement invariante par cette transformation.

5. Démontrer que $F \circ F$ est égale à la translation de vecteur $2\vec{V}$.

<u>**Problème**</u> : |*Equation différentielle, Fonction logarithme, Intégrale et Suites* **(11 points)**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Equation différentielle

Dans cette partie, on se propose de résoudre le problème suivant : trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, s'annulant pour x=1 et vérifiant la propriété : pour tout x>0, xf'(x)-3f(x)=3lnx (E)

Où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Trouver toutes les fonctions polynômes p du troisième degré telles que, pour tout x réel : xp'(x)-3p(x)=0

2. Soit une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que f(1)=0 soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par la relation f(x)= $x^3h(x)$.

a. Calculer h(1).

b. Calculer f'(x) en fonction de h'(x) et de h(x).

c. Montrer que f vérifie la propriété (E) si et seulement si, pour tout x>0,

$$h'(x) = \frac{3}{x^4}\ln x.$$

d. On suppose que f vérifie la propriété (E). Montrer que h est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x)=\int_1^x \frac{3}{t^4}\ln t\,dt$. Déterminer h(x) à l'aide d'une intégration par parties.

3. Montrer qu'il existe une fonction f et une seule solution du problème posé et en donner l'expression.

Partie B : Etude de la fonction f puis étude d'une suite

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\ln x-\frac{1}{3}$.

1. a. Etudier les variations de f.
 b. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
 c. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2. Construire dans un repère orthogonal (unités: 10 cm en abscisses, 5 cm en ordonnée), la courbe représentative (C) de f sur l'intervalle]0, 1].

3. Soit λ un réel strictement positif.
 a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln t\,dt$
 b. En déduire $I(\lambda)=\int_\lambda^1 f(t)dt$. Donner une interprétation graphique du résultat.
 c. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} I(\lambda)$

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 a. Soit k un entier tel que $1\le k\le n-1$.
Montrer que : $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt\le \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$
 b. En déduire les inégalités :
$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\le \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt\le \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$. (1) qu'on peut écrire aussi sous la forme : $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\le I\left(\frac{1}{n}\right)\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$
 c. En utilisant la courbe (C) et en prenant n=10, interpréter graphiquement cet encadrement.

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
 a. Déduire des inégalités (1) l'encadrement : $I\left(\frac{1}{n}\right)\le S_n\le I\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$
 b. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \lambda f(\lambda)$ et prouver alors que $\lim\limits_{n\to +\infty} S_n=\frac{3}{4}$

6. Dans cette question on se propose d'utiliser les résultats ci-dessus pour déterminer la limite de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel non nul, par : $u_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.
 a. Montrer en utilisant un raisonnement par récurrence que :
$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

b. Justifier, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

c. En déduire que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2,

$$S_n=\frac{1}{12n^4}\left[n(n+1)\right]^2-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)-\frac{1}{3}$$

d. A partir du résultat précédent, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ puis la limite de la suite (u_n)

2

30

INSTITUTION IMMACULEE CONCEPTION AVRIL 2009

BACCALAUREAT BLANC 1 ère SESSION MATHEMATIQUES

Terminale C Coefficient : 5 Durée : 4 HEURES

¤¤

EXERCICE 1 : (3 points)

Pour chaque proposition, une seule réponse est correcte . Le candidat indiquera le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte est comptée 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

1. Le nombre complexe $(1-i\sqrt{3})^{2009}$ a pour argument :

a) $-\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$

2. Soit $z = 1 + e^{i2\theta} (z \neq 0)$. Alors, on a :

a) $Re(z) = cos^2\theta$ b) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ c) $Im(z^2) = \sin 4\theta$

3. On pose $a = \cos\frac{\pi}{9} - isin\frac{\pi}{9}$. Alors $1 + a + a^2 + \ldots + a^8$ est égal à :

a) $\frac{1}{1-a}$ b) $\frac{2}{1-a}$ c) 0

4. En base douze, l'entier naturel écrit $\overline{2\alpha 12}$ vaut

a) $\overline{1101111111}$ en base 2 b) $2 \times 12^2 + 10 \times 12 + 2$ c) 4 910 en base 10.

5. Dans l'espace orienté, les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$, où $\vec{u}(1;2;0)$ et $\vec{v}(-1;3;2)$ sont :

a) ~~(5 ; 4; −2)~~ (4; −2; 5) b) $(-3;4;2)$ c) $(-1;3;5)$

6. On considère la suite complexe définie par : $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$.

Alors la suite réelle $(|z_n|)_n$:

a) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ b) est convergente

c) est arithmétique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 2 : (4 points)

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers 12n + 5 et 5n + 2 sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation (E) : 101x + 42y = 2, où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Vérifier, en utilisant la question 1., que 101 et 42 sont premiers entre eux.
   b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que 101u + 42v = 1, puis une solution (x_0, y_0) de (E).
   c) Déterminer les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$
3. Soit (O ; I, J, K) un repère orthonormé de l'espace. On donne le vecteur $\vec{n}(101;42;15)$ et le point $A(8;-5;24)$.
   a) Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées (x ; y ; z) tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

b) Soit (D) la droite intersection de (Π) avec le plan d'équation z = 64.

Déterminer tous les points de (D) à coordonnées entières appartenant [- 50 ; 100].

<u>EXERCICE 3 : (6 points)</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 1 cm).

1. On note A, B et C les points d'affixes respectives 2i, $-1+4i$ et $5+2i$.

a) Déterminer l'affixe du point G, barycentre des points pondérés (A, 2), (B, 1) et (C, 1).

b) Déterminer l'affixe de l'image H du point B par la rotation de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{6}$.

On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie s d'axe (AB) et la composée $f = t \circ s$.

On désigne par A' et B' les images respectives de A et B par f.

2. Calculer les affixes de A' et B' et placer les points A, B, C, A' et B' sur une figure.
3. On rappelle que l'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes avec $|a| = 1$.

A tout point M d'affixe z, f associe le point M' d'affixe z'.

Justifier que f est un antidéplacement et démontrer que : $z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{38-6i}{5}$.

4. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. La transformation f est-elle une symétrie ?
5. On appelle E le point d'affixe $3+6i$, (Δ) la médiatrice de [BE] et s ' la symétrie d'axe (Δ).

a) Montrer que les droites (AB) et (Δ) sont parallèles ; Déterminer $s \circ s'$.

b) Montrer que $f \circ s'$ est la translation, notée t', de vecteur KC, où K est le point 1 + 5i. En déduire que $f = t' \circ s'$.

<u>EXERCICE 4 : (7 points)</u>

1. Soit f la fonction $x \mapsto \tan x$ définie de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(x)$, où $(f^{-1})'$ est la dérivée de f^{-1}.

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $A_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$.

a) Calculer $A_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

b) Trouver une relation de récurrence entre A_n et A_{n+1}. En déduire A_n.

c) Trouver la limite de A_n lorsque n tend vers +∞ (On cherchera à majorer A_n par une intégrale simple dont la limite est nulle quand n tend vers +∞ .

3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $B_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$

a) Démontrer que la suite (B_n) est positive et décroissante ;

b) Pour tout naturel n, calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan^{n+1} x$.

En déduire que :

- pour tout n non nul : $B_n + B_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ (1)

1MAC -D

- pour tout n non nul : $\frac{1}{2(n+1)} \leq B_n \leq \frac{1}{n+1}$;
- la limite de (B_n) est 0 ;

4. Pour n entier naturel non nul, on pose $g(n) = B_{n+4} - B_n$.
   a) Calculer g(n) en fonction de n, en utilisant la relation (1) de la question 3.b).
   b) Vérifier que la fonction $x \mapsto \ln(cosx)$ est définie et dérivable sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer sa dérivée. Calculer B_1
   c) Calculer la somme $g(1) + g(5) + g(9) + \; ... + g(4k-3)$ en fonction de B_1 et B_{4k+1}, où k est un entier naturel non nul.
   d) En déduire la limite de la somme $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \; ... + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

---------------------------------------BON TRAVAIL---

21

Collège CALASANZ
BAC BLANC

2011- MATHEMATIQUES
Série : C
Durée : 4 heures
Coeff. : 5

Pendant la résolution des exercices, tout résultat non établi par le candidat peut être admis pour la suite

Exercice 1 (3 points)

Soit n un nombre entier naturel non nul et x un nombre réel différent de $2\pi.k$, $k \in \mathbb{Z}$

On pose $S = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$

1. Ecrire S sous la forme $r e^{i\theta}$ où r et θ sont des réels à préciser
2. Déterminer le module et un argument de S
3. Factoriser l'expression $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$
4. Résoudre dans IR l'équation (E) : $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = 0$

Exercice 2 (4 points)

Partie A

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation d'inconnue (x ; y) (E) : $11x - 16y = 1$

1. Montrer à l'aide d'un théorème que cette équation admet au moins une solution
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E)
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E)

Partie B

Dans cette partie, on recherche le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{16} - 1$

1. Montrer que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{16} - 1$
2. Soit (x ; y) un couple quelconque d'entiers naturels solution de l'équation (E), montrer que : $(10^{11x} - 1) - 10(10^{16y} - 1) = 9$
3. Montrer que $10^{16} - 1$, divise $10^{16y} - 1$
4. En déduire l'existence de deux nombres entiers naturels X et Y tels que :
   $(10^{11} - 1)X - (10^{16} - 1)Y = 9$
5. Montrer que tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et $10^{16} - 1$ divise 9
6. Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{16} - 1$

Exercice 3 (4 points)

Soit $(u_n)_{n \in IN^*}$ une suite définie par la donnée de ses deux premiers termes u_1 et u_2, et par relation de récurrence : $u_{n+1} = a\,u_n + b\,u_{n-1}$; (1) (a et b étant des nombres réels fixés)

a) Calculer u_3, u_4 et u_5 et en fonction de u_1, u_2, a et b

b) On suppose : $a^2 + 4b > 0$;

1°) Déterminer deux nombres réels α et β tels que $\alpha + \beta = a$ et $\alpha\beta = -b$

2°) On définit les suites $(v_n)_{n \geq 2}$ et $(w_n)_{n \geq 2}$ par $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha\,u_n$ et $w_{n+1} = u_{n+1} - \beta\,u_n$, pour tout entier naturel non nul n

- Montrer que $(v_n)_{n \geq 2}$ et $(w_n)_{n \geq 2}$ sont des suites géométriques dont on précisera les premiers termes et la raison
- Exprimer v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_1 ; u_2, α, β et n
- En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_1 ; u_2, α, β et n

c) On suppose : $a^2 + 4b = 0$

1°) Montrer que la relation (1) peut s'écrire : $u_{n+1} - \alpha u_n = \alpha(u_n - \alpha u_{n-1})$

2°) On pose : $u_n = \alpha^n s_n$

- Montrer que la suite $(s_n)_{n \in IN^*}$ est une suite arithmétique
- En déduire l'expression de s_n, puis celle de u_n en fonction de u_1 ; u_2, α et n

Exercice 4 (6 points)

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une fonction dérivable sur [a ; b] telle que $f(a) = 0$. La fonction dérivée f ' de f est continue sur [a ; b] et vérifie la relation : pour tout $x \in [a ; b]$, $0 \leq f'(x) \leq 1$

Partie A

Le but de cette partie est de démontrer que : $\int_a^b (f(t))^3\,dt \leq \left(\int_a^b f(t)dt\right)^2$

1. Soit h la fonction de la variable réelle définie sur [a ; b] par :
   pour tout $x \in [a ; b]$, $h(x) = 2\int_a^x f(t)\,dt - (f(x))^2$
   a) Justifier que h est dérivable sur [a ; b], et calculer la dérivée h ' de h
   b) Déterminer le sens de variation de h et en déduire que pour tout $x \in [a ; b]$, $h(x) \geq 0$
2. Soit g la fonction définie sur [a ; b] par : pour tout $x \in [a ; b]$,
   $g(x) = f(x) \,.\, h(x)$
   a) Calculer g(a)
   b) Etudier le sens de variation de g sur [a ; b]
   c) Déterminer le signe de g (x) suivant les valeurs de x
3. Soit φ la fonction définie pour tout $x \in [a ; b]$ par, pour tout $x \in [a ; b]$,
   $\varphi(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)^2 - \int_a^x (f(t))^3\,dt$
   a) Démontrer que φ est une primitive de la fonction g sur [a ; b]
   b) Calculer $\varphi(a)$ et déterminer le signe de $\varphi(x)$ pour tout $x \in [a ; b]$
   c) En déduire que : $\int_a^b (f(t))^3\,dt \leq \left(\int_a^b f(t)dt\right)^2$

Partie B : Application

Soit f la fonction définie sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ par $f(t) = \frac{1}{2}\tan t$

1. Soit $x \in]0 ; \frac{\pi}{4}]$

   Démontrer que pour tout $t \in [0 ; x]$ on a : $0 \leq f'(t) \leq 1$
2. Calculer $\int_0^x \tan t \; dt$ et $\int_0^x tan^3(t)dt$
3. Déduire de la partie A ;

   que : $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\tan^2 x + \ln(\cos x)\right) \leq \frac{1}{4}\ln^2(\cos x)$

   puis que : $\tan^2 x \leq (2\ln(\cos x) - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

Exercice 5 (3 points)

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé (O , I , J)
Soit A (3 ; 1) un point de (P) et f l'application de (P) dans (P) d'expression analytique : $\begin{cases} x = \frac{1}{5}(4x - 2y + 1) \\ y = \frac{1}{15}(-x + 13y + 1) \end{cases}$

1. Déterminer les coordonnées des points O' , I' et A' images des points O , I et A par f
2. Démontrer que pour tout point M d'image M' par f , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.
3. Déterminer (E) , ensemble des points invariants par f
4. On considère le point $\Omega(\frac{3}{5} ; \frac{1}{5})$
   a) Déterminer l'image de Ω par f
   b) Démontrer que $\Omega \in (AA')$, puis que $\Omega \in (OO')$
5. Déduire de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de f

DIRECTION D'ACADEMIE PROVINCIALE
DE LA NGOUNIE

REPUBLIQUE GABONAISE
Union-Travail-Justice

BACCALAUREAT BLANC PROVINCIAL
Session : Avril 2011

EPREUVE DE MATHEMATIQUES : Série : C

Durée : 4 heures **Coefficient : 5**

EXERCICE I UN EXEMPLE D'UTILISATION DU THEOREME DE GAUSS (4,5points)

Soit n un entier naturel non nul. Le but de l'exercice est de démontrer que :
si p est un entier naturel tel que $(n+1)(n+2)\times\ldots\times(2n-1)(2n)$ est divisible par 2^p alors $p \leq n$.

1.) On pose : $a_n = 1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)$, $b_n = 2\times4\times6\times\ldots\times(2n)$

a) Montrer que $b_n = 2^n \times n!$. $b_n =$ [illegible] (0,75pt)

b) Montrer que $a_n \times b_n = (2n)!$.(0,75 pt) 2^n α

c) En déduire que $a_n \times 2^n \times n! = (2n!)$. $n! =$ (0,25 pt)

2.) On pose : $c_n = (n+1)(n+2)\times\ldots\times(2n-1)(2n)$.

a)Démontrer que : $c_n = \frac{(2n!)}{n!}$ (0,5pt)

b) En déduire que : $c_n = \frac{a_n\times2^n\times n!}{n!}$ (0,25pt)

c) Montrer alors que c_n est divisible par 2^n. (0,25pt)

3. a) Justifier que a_n est un entier naturel impair. (0,5pt)

b) En déduire que : si p est un entier naturel tel que $(n+1)(n+2)\times\ldots\times(2n-1)(2n)$ est divisible par 2^p alors $p \leq n$. (0,75pt)

EXERCICE II : NOMBRES COMPLEXES ET APPLICATIONS (6 pts)

C désigne l'ensemble des nombres complexes

A- On considère l'application f de C dans C définie par : $f(z) = z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45$.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une unique solution réelle α et une unique solution pure β que l'on déterminera. (1,25 pt)

2. Démontrer qu'il existe un couple (ρ, q) des nombres complexes que l'on déterminera tel que pour tout élément z de C : $f(z) = (z-\alpha)(z-\beta)(z^2 + \rho z + q)$. (1,25 pt)

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$. (0,5 pt)

B- Soit A, B, C, D des points du plan complexe d'affixes respectives $3i$, $1-2i$, $2-i$, -3.

1°) Montrer qu'il existe une rotation $\mathfrak{R}$ qui transforme A en B et C en D. On précisera son centre ainsi que le cosinus et le sinus d'une mesure en radian de son angle. (1 pt)

2°) Montrer qu'il existe une homothétie H qui transforme A en B et D en C. On précisera son centre et son rapport. (1 pt)

3°) Quelle est la nature géométrique de $\mathfrak{R}o$H ?
Déterminer ses éléments caractéristiques. (1 pt)

$\cos t + \sin t = -1$
$= \cancel{\sin}(\frac{\pi}{2} - t)$

XERCICE III : Barycentrisation et lignes de niveau **(4 pts)**

- 1°) Résoudre l'équation $1+\cos t+\sin t=0$. $t \in \mathbb{R}$ **(0,25 pt)**

2°) Considérons trois points pondérés $(A,1)$; $(B,\cos t)$; $(C,\sin t)$. Pour quelle valeurs de t élément de. $-\pi;\pi]$ existe-t-il un point **G barycentre** des points pondérés $(A,1)$; $(B,\cos t)$; $(C,\sin t)$? **(0,75 pt)**

3°) Etablir que si $\overrightarrow{AM}=\cos t.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}=\sin t.\overrightarrow{AC}$, alors le point M est barycentre des points pondérés $(A,1-\cos t)$, $(B,\cos t)$ et $(A,1-\sin t)$; $(C,\sin t)$. **(0,5 pt)**

établir que

4°) Si $\frac{MA}{MB}=\sin t$ alors M est barycentre des points A et B affectés des coefficients **1** et **-sint** avec $t \neq k\pi$. ε Z. **(0,25 pt)**

5°) On suppose que la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}})=-\frac{\pi}{4}$

Déterminer et construire l'ensemble des points M. **(0,75 pt)**

- On considère le triangle ABC tel que AB = 7 ; BC = 4 ; AC = 5. (L'unité est le cm). Soit I milieu de $[BC]$.

1°) Montrer que $AI=\sqrt{33}$. **(0,5 pt)**

2°) Soit le point M du plan. Pour quelle valeur de α. $\alpha\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\vec{u}$ ndépendant du point M. Déterminer le vecteur $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$. **(0,5 pt)**

3°) Déterminer et construire l'ensemble $(\wp)$ des points M du plan tels que $-2MA^2+MB^2+MC^2=-58$. **(0,5 pt)**

XERCICE IV **DETERMINER LA VALEUR D'INTEGRALE AU MOYEN D'UNE SUITE (5,5pts)**

In considère la fonction f_n définie sur [0; 1], pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par : $\begin{cases} f_n(x) = x^2(\ln x)^n \text{ si } 0 < x \leq 1; \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

In se propose de déterminer la valeur de l'intégrale : $L_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

PARTIE A

.)Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^n = 0$ $(On\ pourra\ poser\ X = \ln x)$. **(0, 5pt)**

) En déduire, pour tout entier naturel **p≥ 1**, limite en 0 de $x^p(\ln x)^n$ est égale à 0. **(0,5pt)**

) Montrer que f_n est dérivable en 0. (On précisera son nombre dérivé) **(0,5pt)**

PARTIE B

ioit t un élément de [0; 1]. On pose : $I_n(t) = \int_t^1 f_n(x)dx$ et $L_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

.a) Justifier, sans calculer que $I_n(t)$ et L_n existent. **(0,5pt)**

b) Montrer que la fonction qui à $t \to L_n - I_n(t)$ est la primitive de f_n sur [0,1] qui s'annule en 0. **(0,5pt)**

.. On considère la fonction f_n définie sur[0,1], pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, par $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{x^3}{9}, si\ 0 < x \leq 1 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

a) Etudier la dérivabilité de F sur[0,1] . **(0,75pt)**

b) En déduire que F est une primitive de f_1 sur [0,1], puis calculer I_1. **(0,5 pt + 0,5 pt)**

. Soit φ_n la fonction définie sur]0,1] par : $\varphi_n = -\frac{1}{3}t^3(\ln t)^n$.

a) Justifier que φ_n est prolongeable par continuité en 0. (0,5pt)

b) Justifier à l'aide d'une intégration par parties que tout t $\in [0,1]$:

$$I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3} I_n(t).$$ (0,75pt)

c) En déduire que $L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n$. (On admettra que pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{t \to 0} I_n(t) = L_n$) (0,5pt)

d) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1, L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$. (0,75pt)

N.B : LA PROPRETE DE LA PRESENTATION, LA CONCISION ET RIGUEUR DANS LA REDACTION INTERVIENDRONS DANS L'APPRECIATION DES COPIES ; L'USAGE DU CORRECTEUR LIQUIDE EST FORTEMENT DECONSEILLE. UN RESULTAT NON ETABLI PEUT SERVIR DANS LA SUITE

$\frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}$ $(\ln x)^n$

$u(x) = \frac{n!}{nx}$

$= \frac{x}{n+1}(\ln x)^{n+1}$

30

INSTITUTION IMMACULEE CONCEPTION
BACCALAUREAT BLANC

2010 – 1 – MATHEMATIQUES
Terminale C
Coefficient: 5
Durée: 4 heures

EXERCICE 1: (3 points)

a) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers relatifs tels que $65x = 28y$.

b) On note (E) l'équation $65x - 28y = 1$.
Justifier l'existence d'une solution de (E) formée de deux entiers relatifs, puis trouver tous les couples d'entiers relatifs solutions de (E).

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $65x - 28y = 3$.

EXERCICE 2 : (5 points)

Dans le plan orienté, le carré ABCD est de sens indirect et le carré AEFG de sens direct tel que $AB = AE = a$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}}) = \frac{\pi}{3}$.
Soit R le point tel que ABRE soit un parallélogramme ; on désignera par O son centre.
La FIGURE JOINTE que l'on complétera au cours des questions sera rendue à la fin de la composition.

1- En utilisant la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, démontrer que les droites (BG) et (DE) sont perpendiculaires et que $BG = DE$.

2- On désigne par I le point d'intersection de (BG) et (DE), H le projeté orthogonal de A sur (DE) et K le projeté orthogonal de A sur (BG).

a) Démontrer que $r(H) = K$

b) En déduire que AHIK est un carré.

3- Soit s la similitude directe qui transforme A en G et R en F.

a) Démontrer que le triangle EAB est équilatéral et que ABRE est un losange.

b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

4- On cherche à construire le centre Ω de la similitude s.

a) Soit J le point tel que AGJ soit un triangle équilatéral de sens direct. Déterminer et construire l'ensemble (C_1) des points M tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MG}}) = \frac{\pi}{6}$.

b) Soit P le barycentre des points pondérés $(A; -1)$ et $(G; 3)$.
Démontrer que l'ensemble (C_2) des points M du plan tels que $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est le cercle de centre P et de rayon $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) En déduire la construction du point Ω.

PROBLEME :(12 points)

On considère la fonction f de la variable réelle x telle que :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} & si \ \ x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} + 1 & si \ \ x > 0 \end{cases}$$

On désigne (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Première partie :

1- a) Etudier les variations de la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x) = x - \ln x$.

b) En déduire que pour tout x de $]0;+\infty[$, on a : $x - \ln x \neq 0$.

2- a) Démontrer que l'ensemble de définition D de f est $D = [-1;+\infty[$.

b) Démontrer que f est continue sur D.

3- a) Etudier la dérivabilité de f en 0 ; interpréter géométriquement les résultats obtenus.

b) Etudier la dérivabilité de f en -1 à droite.

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

d) Construire la courbe (C) en prenant **2 centimètres** pour unité graphique.

Deuxième partie :

4- Soit g la restriction de f à l'intervalle $K = [-1;0]$ et (C_0) la courbe représentative de g dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$; on pose $l = f(K)$

a) Justifier que g admet une bijection réciproque que l'on notera g^{-1}.

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}, puis construire sa courbe représentative (Γ) dans le même repère que (C).

c) Montrer que pour tout x appartenant à L, on a : $g^{-1}(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

d) Calculer l'intégrale suivante $\int_{-1}^{0}[g^{-1}(x)]dx$.

5- Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ), la droite Δ d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

a) Calculer $\mathcal{A}$.

b) En déduire l'aire du domaine plan compris entre les courbes (C_0) et (Γ).

Troisième partie :

6- On désigne par u un nombre complexe non nul. Etablir que :

$$\left(\arg u = \frac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} Re(u) = Im(u) \\ Im(u) < 0 \end{cases}.$$

7- Pour tous nombres réels x et y tels que $0 < y < 1$, on considère le nombre complexe z défini par : $z = x + i\frac{y-1}{1+\sqrt{-y^2+2y}}$ avec $i^2 = -1$.

Soit (Γ') l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que : $\arg u = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Soit $M(x\,;y)$ un point du plan. Etablir que :

$$(M \in (\Gamma')) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{1+\sqrt{1-(y-1)^2}} \\ 0 < y < 1 \ et - 1 < x < 0 \end{cases}.$$

b) En déduire que $(M \in (\Gamma')) \Leftrightarrow (y = g^{-1}(x) + 1)$

Ainsi, l'ensemble (Γ') est l'image par la translation t de vecteur $\overrightarrow{e_2}$ d'une partie de la courbe (Γ) que l'on précisera.

c) En déduire que (Γ') est l'image d'une partie de la courbe (C_0) par l'application $h = t \circ s_\Delta$, composée de la translation t et de la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ: $y = x$. Pourquoi h est-elle une symétrie glissée ?

d) A partir des expressions analytiques de t et de s_Δ, montrer que $h \circ h$ est une translation, puis déterminer le vecteur de h.

e) Déterminer enfin l'axe de h.

71 G BONFOU

INSTITUTION IMMACULEE CONCEPTION **BAC BLANC 2011**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES **TERMINALE C** **DUREE : 4 H**

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Dans une urne, il y a six jetons indiscernables au toucher, cinq sont blancs, le sixième porte l'inscription « gagnant ». On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne.

Proposition 1 : « La probabilité pour que le deuxième jeton soit gagnant sachant que le premier est blanc est $\frac{5}{6}$ ».

2) Soit l'équation « $x^2 + y^2 \equiv 0[3]$, où x et y sont des entiers naturels.

Proposition 2 : « Il existe au moins un couple d'entiers $(x\,;y)$ solution sans que x et y soient multiples de 3 ».

3) On sait que la fonction $f : x \longmapsto \tan\frac{x}{2}$ définie sur $]-\pi\,;\,\pi[$ admet une bijection réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3 : « f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et le nombre dérivé de f^{-1} en -1 est 1 ».

Exercice 2 : (4 points)

1- On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation : **(1)** $ax + by = 60$,
a et b étant des entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$. On pose $d = PGCD(a\,;b)$.

a) On suppose que l'équation **(1)** a au moins une solution $(x_0\,;\,y_0)$. Montrer que d divise 60

b) On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution à l'équation (1).

2- On considère l'équation : **(2)** $24x + 36y = 60$, x et y entiers relatifs.

a) Donner le $PGCD$ de 24 et 36. Simplifier l'équation **(2)**.

b) Trouver une solution évidente pour l'équation **(2)** et résoudre cette équation.

c) Enumérer tous les couples $(x; y)$ solutions de **(2)** tels que $-10 \leq x \leq 10$.
Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5

d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, représenter l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M de coordonnées $(x\,;y)$ telles que : $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

e) Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions $(x\,;y)$ de l'équation **(2)** appartiennent à $(\mathcal{E})$.

Comment peut-on caractériser l'ensemble (S) des couples $(x\,;y)$ de nombres réels solutions de l'équation **(2)** ?

Exercice 3 : (4 points)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $f(x) = \ln|x| - \frac{\ln|x|}{x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1- a) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) Etudier les limites de f aux bornes de D ainsi que les branches infinies de $(\mathcal{C})$.

c) Justifier que f est dérivable en tout point de D et que l'on a : pour tout x de D,

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ avec $g(x) = \ln|x| + x - 1$.

2- a) Etudier les variations de g.

b) Démontrer que, pour tout x élément de $]-\infty; 0[$, $g(x) < 0$.

c) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

3- a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

c) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 4 : (4 points)

Pour tout entier n, on considère la fonction numérique de la variable réelle x définie pour tout x différent de 1 par : $f_n(x) = \frac{5^x}{(1-x)^n}$. On pose $I_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)dx$.

1°) a) Expliquer pourquoi I_n a bien un sens.

b) Etablir que $I_n \geq 0$ pour tout entier naturel n.

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

d) La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

2°) a) En utilisant le sens de variation de $x \longmapsto 5^x$ sur l'intervalle $[-1; 0]$, montrer que l'on a pour tout entier naturel n : $\frac{1}{5(1-x)^n} \leq f_n(x) \cancel{\frac{1}{(1-x)^n}} \cdot \frac{1}{(1-x)^n}$

b) Etablir alors que pour tout entier naturel n $(n \geq 2)$: $\frac{1}{5(n-1)}\left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}\left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right]$.

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

3°) a) Calculer la dérivée de f_n et vérifier que pour tout réel x de $[-1; 0]$: $f'_n(x) = (\ln 5)f_n(x) + nf_{n+1}(x)$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $(\ln 5)I_n + nI_{n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

c) Calculer alors la limite de $(nI_{n+1})_{n\geq 0}$.

Exercice 5 : (5 points)

Dans le plan orienté (P), on considère un carré de sens direct ABCD de centre O et on pose $AB = a$ avec $a > 0$.

Partie A :

Soit I, J, K et E les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [AD].

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = a^2$.

1- a) Démontrer que : $(M \in (\Gamma)) \Leftrightarrow (MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ME^2 = 2a^2)$.

b) Justifier que le point O est l'isobarycentre des points I, J, K, E et que $(M \in (\Gamma)) \Leftrightarrow \left(MO^2 = \frac{a^2}{4}\right)$

2- Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et s la symétrie orthogonale d'axe (AB).

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR, DE LA RECHERCHE

SCIENTIFIQUE, DE L'INNOVATION ET DE LA CULTURE

****

LYCEE D'APPLICATION NELSON MANDELA

B.P. 940 / Tél. : 73 80 21

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

25 de chaque

REPUBLIQUE GABONAISE

Union – Travail – Justice

BAC BLANC 2011

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Série : C

Durée : 4 heures

Coefficient : 5

Exercice 1 (4 points)

On considère les fonctions numériques f, g et h définies par :

$$\begin{cases} f(x) = (x^2+x)\ln|x| \;\; si\; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} g(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \;\; si\; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} h(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} \;\; si\; x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

I.1/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f, g et h au point $x_0 = 0$. (1,5 points)

2/ Montrer que : $\forall x \geq 0, \ln(x^2+1) \leq x^2$. *En déduire que*: $\forall x \in [0,1], g(x) \leq x$. (0,75 pts).

II. Lors d'un examen oral de mathématiques, chaque candidat devra tirer une des trois enveloppes identiques dans une urne. Les trois enveloppes contiennent, l'une la fonction f, l'autre la fonction g et la troisième la fonction h. Le candidat étudiera la continuité et la dérivabilité en $x_0 = 0$ de la fonction qu'il aura choisie. On suppose les tirages équiprobables.

1. Calculer la probabilité pour qu'un candidat donné tire une enveloppe contenant une fonction continue et dérivable en $x_0 = 0$. (0.25 pts)
2. Au tour d'un candidat Lambda, connu déjà de son examinateur qu'il ne peut répondre qu'à la question concernant la fonction f, il lui est accordé de procéder par tirages successifs sans remise jusqu'à obtenir la fonction f. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais éffectués par le fameux candidat.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X. (0.5 pts)
   b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. (0.5 pts)
   c) Construire la courbe de la fonction de répartition de X. (0.5 pts)

EXERCICE 2 (4 points)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Pour tout n, on pose : $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e (\ln t)^n dt$.

1. a/ Montrer que $I_1 = -1$. (0.5 pts)

   b/ Démontrer que pour tout n, on a $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e$. (0.75 pts)

   c/ Prouver alors que, pour tout n, on a : $I_n = \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)e - 1$. (1 pt)

2. a/ Démontrer que $0 \leq \int_1^e (\ln t)^n dt \leq e - 1$. (0.5 pts)

   b/ En déduire que $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$. (0,25 pts)

   c/ Que peut – on déduire pour la suite (I_n) ? (0,5 pts)

3. Pour tout n, on pose : $S_n = \frac{1}{0!} + \frac{(-1)}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$.

   Déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n). (0,5 pts)

EXERCICE 3 (8 points)

Le plan P orienté est muni d'un repère (O, $\vec{u}, \vec{v}$) orthonormal direct. A est le point de P d'affixe non nul a. Le point M du plan a pour affixe z de module |z| et $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

PARTIE A

Dans cette partie on suppose que |a| = 1. On pourra poser a = $\cos\theta + i\sin\theta$ où $\theta \in [0; 2\pi[$.

On considère l'application f de P dans P qui, au point M associe le point M' d'affixe z' avec : $z' = a^2\bar{z} + ai$.

1) a. Préciser l'ensemble E_1 décrit par le point A lorsque Θ varie dans l'intervalle [0 ; 2π[. (0,25 pt)
   b. A partir du point A, construire le point O'= f(O). (0,5 pt)
   c. Montrer que le milieu I du segment [O O'] est invariant par f. (0,5 pt)

2) a. Montrer que f est la composée de la symétrie orthogonale d'axe (O, $\vec{u}$) et d'un déplacement (1 pt)

   b. Quelle est alors la nature de f ? (0,5 pt)

3) Lorsque Θ varie dans [0 ; 2π[, déterminer :

   a. L'ensemble E_2 des points I (milieu de [O O']). (1 pt)

   b. L'ensemble E_2 des points A' = f(A). (1 pt)

PARTIE B

Dans cette partie $|a|$ différent de 1. g est l'application de P dans P qui, au point M, associe le point M_1 d'affixe $z_1 = a^2\bar{z}$. On admet que la symétrie orthogonale d'axe (OA) qui au point M, associe le point M_2 d'affixe z_2 qui a pour écriture complexe $z_2 = \frac{a}{\bar{a}}\bar{z}$

1) a. Déterminer la nature de g o S. (1 pt)
   b. En déduire une décomposition de g sous la forme d'une composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie. (0,75 pt)

2) Soit M_0 un point de P distinct de O. On définit dans P, une suite de points M_n par : pour tout entier naturel, $M_{n+1} = g(M_n)$

a. Trouver une relation entre OM_{n+1} et OM_n puis exprimer OM_n en fonction de OM_0. (1 pt)

b. Etudier suivant la position du point A dans le plan P, la limite éventuelle de OM_n quand n tend vers $+\infty$. (0,5 pt)

EXERCICE 4 (4 points)

1) On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation : (E_1) : ax + by = 60 ; a et b sont des entiers naturels tels que $ab \neq 0$ et on notera d le PGCD de a et b.
   a. On suppose que l'équation (E_1) a au moins une solution (x_0 ;y_0). Démontrer que d divise 60. (0,25 pt)
   b. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution (x_0 ;y_0) à l'équation (E_1). (0,5 pt)
2) On considère l'équation (E_2) : 24x + 36y = 60 où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Donner le PGCD de 24 et 36 puis simplifier (E_2). (0,5 pt)
   b. Trouver une solution évidente de (E_2) et résoudre cette équation. On appelle S l'ensemble des couples (x ; y) solution de (E_2). (0,75 pt)
   c. Enumérer tous les couples (x ; y) de S tels que $-10 \leq x \leq 10$. Donner parmi eux ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5. (0,75 pt)
   d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 1 cm) représenter l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de coordonnées (x ; y) tels que : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ (0,5 pt)
   e. Démontrer que les points ayant pour coordonnées les solutions (x ; y) de (E_2) appartiennent à $\mathcal{E}$. (0,5 pt).
      Comment peut - on caractériser S ? (0,25 pt)

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

Lycée Paul INDJENDJET GONDJOUT

Département de Mathématiques

REPUBLIQUE GABONAISE
UNION-JUSTICE-TRAVAIL

BACCALAUREAT BLANC 2003

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

SERIE C **DUREE : 4 heures**

EXERCICE 1(5 points)

Dans un plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que AB = AC et $(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = \frac{\pi}{4}$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\widehat{\vec{CA},\vec{CI}}) = -\frac{\pi}{2}$.

Pour la figure , que l'on complètera en traitant les questions, on prendra AB = 5 cm.

1. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On note $f = r_C \circ r_A$.
   a) Déterminer les images par f de A et de B.
   b) Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure.

2. a) Montrer que les droites (AB) et (OC) sont parallèles.
   b) En écrivant $(\widehat{\vec{OB},\vec{AC}}) = (\widehat{\vec{OB},\vec{OC}}) + (\widehat{\vec{OC},\vec{AB}}) + (\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})$, donner une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{OB},\vec{AC}})$.
   c) Déduire des questions précédentes la nature du quadrilatère ABOC.

3. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B On appelle C' l'image de C par s. Soit H le milieu du segment [BC]. On note H' l'image de H par s.
   a) Donner une mesure de l'angle de s. Montrer que C' appartient à la droite (OA).
   b) Donner l'image par s du segment [OA] et montrer que H'est le milieu du segment [OB].
   c) Montrer que (C'H') $\perp$ (OB). En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC

EXERCICE 2 (5 points)

On considère un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) On désigne par $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre A (a , 0) et de rapport k, $k > 0$.

Soit M ($z = x + i\,y$). On note $M_1(z_1) = \mathcal{H}(M)$.

Donner l'expression de z_1 en fonction de z, a et k.

b) On désigne par $\mathcal{R}$ la rotation de centre O et d'angle θ . On appelle u le nombre complexe de module 1 et d 'argument θ.

Soit $\mathcal{T} = \mathcal{R} \circ \mathcal{H}$. On note $M' = \mathcal{T}(M)$.

Soit $z' = x' + i\,y'$ l'affixe de M'.

Démontrer que $z' = k\,u\,z + a\,u\,(1-k)$.

Indiquer la nature de la transformation $\mathcal{T}$.

Déterminer l'affixe de son point invariant I lorsque $\mathcal{T}$ n'est pas la transformation identique.

2. On suppose dans la suite que $u = i$ et $a = 5$.

Calculer les coordonnées (α , β) du point I en fonction de k.

Déterminer l'ensemble des points I lorsque k décrit l'ensemble des réels positifs.

(On remarquera que $\alpha + k\,\beta = 0$).

Déterminer les points I dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.

3. On suppose maintenant $u = i$, $a = 5$ et $k = 3$.

Calculer les coordonnées du point M' en fonction des coordonnées de M .

Soit P le point de coordonnées (3, 2). Déterminer l'ensemble des points M tels que les trois points M, M' et P soient alignés.

PROBLEME (10 points)

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonction f_n avec $n \in \mathbb{N}^*$, définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}$$

La représentation graphique de f_n dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal est notée C_n ***(unité : 2 cm)***.

A. Etude des variations de f_n.

1. Soit , pour tout naturel n non nul, la fonction g_n définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g_n(x) = x^2 - n + n \ln x .$$

a) Etudiez g_n ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Montrez que $g_n(x) = 0$ admet une solution unique notée α_n et que cette solution est dans $[1 ; 3]$.

2. Montrez que, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'_n(x) = \dfrac{g_n(x)}{x^2}$ et déduisez-en le sens de variation de f_n.

3. a) Etudiez les limites de f_n en 0 et en $+\infty$.

b) Montrez que la droite $\mathcal{D}_n$ d'équation $y = x - n$ est asymptote à la courbe C_n.

c) Etudiez la position de C_n par rapport à $\mathcal{D}_n$.

B. Etude des cas particuliers n = 1 et n = 2.

1 α_n étant le nombre défini en **A.1.**, montrez que $\alpha_1 = 1$ et que $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.

2. a) En utilisant les règles sur les inégalités et les encadrements de α_2 précédent, montrer que $f_2(\alpha_2) \geq -1,24$.

b) En utilisant le sens de variation de f_2, montrez que : $f_2(\alpha_2) \leq -1,10$.

3. Donner les tableaux de variation de f_1 et f_2.

4. Représentez dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ puis les courbes C_1 et C_2.

5. Calculez, en cm^2, la valeur exacte de l'aire S_1 de la partie du plan comprise entre C_1 et les droites d'équations $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

C. Etude des positions relatives des courbes C_n.

1. Pour tout naturel n non nul et pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, calculez $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
Calculez la limite en $+\infty$ de cette différence.

2. Soit d la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$d(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

a) Etudiez d, précisez ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Déduisez de la question précédente que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique β et que β appartient à l'intervalle $]0 ; 1[$.

c) Montrez que, pour tout entier naturel n non nul, $f_n(\beta) = \beta$.

3. A l'aide des résultats obtenus dans la question 1. et 2. de cette partie **C.**, établissez que toutes les courbes C_n se coupent en un point A.

Précisez les positions relatives de C_n et de C_{n+1}.

BAC BLANC session de juin 2009 TC 1,2 Mardi, 9/06/ 2009

Epreuve de mathématiques

Durée : 4 heures

Département de mathématiques

Problème : (11 points)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Le but du problème est d'étudier la limite de cette suite.

Partie A) : Expression de u_n à l'aide d'une intégrale

1) Calculer $J = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt$

2) Pour tout entier $k \geq 1$, on pose :

$K = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos kt dt$

A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $K = \frac{1}{k^2}$

3) Pour tous t de $[0;\pi]$ et $n \geq 1$, on pose :

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos(nt)$$

Utiliser les questions précédentes pour en déduire l'égalité :

$$u_n = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) D_n(t) dt$$

Partie B) : Etude de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) D_n(t) dt$$

1) a) vérifier que, pour tous réels a et b : $2 \sin b \cos a = \sin(a+b) - \sin(a-b)$

b) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tous $n \geq 1$ et $t \in]0;\pi[$, on a :

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

c) On considère la fonction g définie sur $[0;\pi]$ par :

$$\begin{cases} g(0) = -1 \\ g(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad si\ t \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que g est continue en 0.

On rappelle que : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$I_n = \int_0^{\pi} g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, dt$$

2) a) Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .On pose : $h(x) = \frac{\sin x}{x}$

Montrer que h est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et que sa fonction dérivée h' est du signe de la fonction Φ définie par : $\Phi(x) = x - \tan x$.

b) Etudier le signe de Φ en étudiant ses variations.

c) En déduire que la fonction h est décroissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, puis que : $x \geq \sin x$.

d) On admet que : $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$

Démontrer que, pour tout $t \in [0;\pi]$, on a :

$-\frac{\pi}{2} \leq g(t) \leq -\frac{1}{2}$. (on pourra poser $x = \frac{t}{2}$ dans une double inégalité)

3) a) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, dt$$

Calculer α_n.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{\pi}{2} \alpha_n \leq I_n \leq \frac{\pi}{2} \alpha_n$$

En déduire la limite de la suite (I_n).

Partie C) : limite de la suite (u_n)

Conclure à partir des questions précédentes concernant la convergence et la limite de la suite (u_n).

Bon courage !

BAC BLANC **session de juin 2009** **TC 1.2** Mardi, 9/06/ 2009

Epreuve de mathématiques

Durée : 4 heures

Département de mathématiques

Consignes :

*La **présentation** de la copie (lisibilité de l'écriture, aération du texte, ...), la **clarté** et la **concision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice1 : *Probabilités, probabilités conditionnelles, indépendance, espérance mathématique (5 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher, numérotées 1, 2 et 3.

On tire une boule de l'urne, on note son numéro x et on la remet dans l'urne; puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans l'urne.

Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

A chaque éventualité $(x;y)$, on associe le point M du plan de coordonnées $(x;y)$. On note (D) le disque de centre O et de rayon 1,7.

1) Placer dans le plan les points $M(x;y)$ correspondant aux différentes éventualités de cette expérience aléatoire. Quel est le cardinal de l'univers Ω associé ?

2) On considère les événements suivants :

A : « le point M est sur l'axe des abscisses »

B : « le point M est sur le cercle de centre O et de rayon 1 »

Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$, où P désigne l'équiprobabilité sur l'univers Ω.

3) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque éventualité $(x;y)$, associe la somme x^2+y^2.

a) Déterminer la loi de X, puis calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

On rappelle : $E(X)=\sum_{i=1}^{p} x_i P(X=x_i)$.

b) Soit C l'événement : « le point M appartient au disque (D) ». Montrer que : $P(C)=\frac{4}{9}$.

4) On effectue n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan. On désigne par Y la variable aléatoire donnant le nombre de points appartenant à (D) à l'issue des n tirages.

a) Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale ; préciser ses paramètres.

b) Soit $0 \le k \le n$. Quelle est la probabilité que l'on ait k points appartenant à (D) ?

c) Donner $E(Y)$ et $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$

Exercice 2 : ***Applications affines (4 points)***

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On admettra les résultats suivants :

a) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application du plan dans lui-même soit affine est que son expression analytique soit de la forme :

$$\begin{cases} x' = ax+by+c \\ y' = a'x+b'y+c' \end{cases}$$

a, b, c, a', b', c' étant des nombres réels donnés.

b) Une application affine admettant l'expression analytique de la forme précédente est une transformation affine si et seulement si le nombre $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ est différent de zéro ;

1) Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), pour tout nombre réel α, on considère l'application plane f_α qui, à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = (\alpha+1)x - y \\ y' = (\alpha+2)x - 2y \end{cases}$$

Montrer soigneusement que f_α est une application affine.

2) a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α est bijective.

b) Déterminer α pour que la composée $f_\alpha \circ f_\alpha$ soit égale à l'identité du plan.

3) Déterminer l'ensemble des points invariants par f_α (on discutera suivants les valeurs de α).

4) Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de f_1

Bon courage !

Lycée d'Application Nelson Mandela
Département de Mathématiques

BACCALAUREAT BLANC – Mai 2010

MATHEMATIQUES : SERIE : C
Durée : 4 heures Coéf. : 5

ERXERCICE 1 : (5 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'application affine f du plan dans lui –même qui au point $M\binom{x}{y}$, associe le point $M'\binom{x'}{y'}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}ax + \frac{4}{5}by + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}bx + \frac{3}{5}ay + \frac{6}{5}\ ; \end{cases}$$

a et b sont deux réels non nuls et on note φ l'application vectorielle associée à f.

Partie A :

1) a- Déterminer $\varphi(\vec{\imath})$ et $\varphi(\vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   b- Montrer que f est une transformation du plan.
2) On désigne par $N\binom{a}{b}$ un point du plan.
   a- Déterminer l'ensemble (E_1) des points N pour que f soit un déplacement.
   b- Déterminer l'ensemble (E_2) des points N du plan pour que f soit un anti – déplacement.

Partie B :

Dans la suite on prend on prend a = b = 1.

1) f est – elle un déglacement ou un anti – déplacement ?
2) Quel est l'ensemble des points invariants par f ? En déduire la nature exacte de f.
3) Déterminer l'expression analytique de fof.
4) Déterminer le vecteur $\vec{V}$ et la droite (D) de vecteur directeur $\vec{V}$ tels que f = sot = tos, t étant la translation de vecteur $\vec{V}$ et s la symétrie orthogonale d'axe (D).

Exercice 2 (3pts)

1) Etablir que quels que soient a , b , c appartenant à $\mathbb{N}^*$ tels que bc > a :
   PGCD(a, b) = PGCD(b , bc-a).
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, PGCD $(5n^3-n, n+2)$ = PGCD(n+2, 38).
3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que n+2 divise $5n^3 - n$.
4) Quelles sont les valeurs possibles de PGCD$(5n^3-n, n+2)$?

PROBLEME (12pts)

Partie A (3pts)

On donne un entier naturel n strictement positif et on considère une équation différentielle :

$(E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

1) On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h , définies et dérivables sur IR , vérifient pour tout réel x : $g(x) = h(x)e^{-x}$.
   a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout réel x, $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$
   b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?
2) Soit φ une fonction dérivable sur IR .
   a) Montrer que φ est une solution de (E_n) si et seulement si φ – g est une solution de l'équation (F) : $y' + y = 0$
   b) Résoudre (F).
   c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).
   d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant f(0) =0.

Partie B :(3,5 pts)

Le but de cette partie est de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$ (on rappelle: $0! = 1$).

1) On pose pour tout réel x ,$f_{0(x)=} e^{-x}$ et $f_{1(x)=} xe^{-x}$.

a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.

b) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la partie A, montrer par récurrence que, pour tout réel x et tout entier n ≥ 1 :

$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

2)- Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$. (on ne cherchera pas à calculer I_n).

a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout élément de [0 ; 1] , l'encadrement $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$. En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$ puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b) Montrer pour tout entier naturel k non nul, l'égalité $I_k - I_{k-1} = -\frac{1}{k!} e^{-1}$.

c) Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que $I_n = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!}$.

d) En déduire finalement que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

Partie C :(2,5pts)

Le but de cette partie est d'étudier le comportement des suites de termes généraux $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$ (pour x > 0) et $h'(n) = \frac{n^n}{n!}$.

1) Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.
   a) Montrer par récurrence sur n que , pour tout entier n supérieur ou égale à k ,
   $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$.
   b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal k , $\frac{x^n}{n!} \leq (\frac{x}{k})^n \times \frac{k^k}{k!}$.
   c) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

2) a- En remarquant que $\frac{n^{n-1}}{n!} = \frac{n}{n} \times \frac{n}{n-1} \times ... \times \frac{n}{3} \times \frac{n}{2}$, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$.
   b- En déduire que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Partie D : (2,5pts)

1) Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 0$,on a :
   $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
2) On dispose de n boules numérotées de 1 a n . On les tire successivement et on les place toutes au hasard dans n boîtes (chaque boîte pouvant contenir de o à n boules) .
   a) On désigne par P_n la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule.
   Montrer que $P_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{h'(n)}$.
   b) En utilisant 1 – D, montrer que pour n > 0, on a : $\frac{P_n}{P_{n+1}} \geq 2$.
   En déduire que $P_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
   c) Quelle est la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$? Ce résultat est – il prévisible ?

Collège BESSIEUX
Libreville

BAC BLANC (Session d'Avril 2 010)

Épreuve de Mathématiques
Série : C
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$, on considère la courbe (Γ) telle que : $(\Gamma) = \left\{ M(x,y) \in (P) / x^2 - y^2 = 1 \text{ et } x > 0 \right\}$.

1. a) Quelle est la nature de (Γ) ?
   b) Donner la représentation graphique de (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité : 2 cm.
2. a) Montrer que si M appartient à (Γ), il existe un unique réel t tel que :
$$\begin{cases} x + y = e^t \\ x - y = e^{-t} \end{cases}.$$
   b) En déduire une représentation paramétrique de (Γ).
3. Soit S la transformation du plan (P) dans lui-même qui, à tout $M(x ; y)$, associe le point $M'(x' ; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$.
   a) Montrer que S est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
   b) Déterminer une équation cartésienne de la courbe (Γ'), image de (Γ) par S.
4. On considère le point M_1 de paramètre $t = \ln 2$ et le point M_2 symétrique de M_1 par rapport à l'axe des abscisses.
   a) Montrer que les points $N_1 = S(M_1)$ et $N_2 = S(M_2)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
   b) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\Sigma)$ en unités d'aire de la surface (Σ) limitée par $[ON_1]$, $[ON_2]$ et l'arc $\widehat{N_1N_2}$ de (Γ').
   c) En déduire l'aire $\mathcal{A}(\Pi)$ de la surface (Π) limitée par $[OM_1]$, $[OM_2]$ et l'arc $\widehat{M_1M_2}$ de (Γ).

Exercice 2 (4 points)

I. On donne l'équation différentielle (E) : $y'' = -y$.

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E).
   b) Déterminer les solutions particulières f et g vérifiant : $f(0) = 5$, $f'(0) = 0$, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 3$.
2. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 4 + 5\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   a) Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   b) En déduire la nature de $(\mathscr{C})$.

II. Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A(-1 ; 0), I(4 ; 0) et l'ellipse $(\mathscr{E})$ de centre I, dont un sommet est A et un foyer est le point O.

1. a) Déterminer les trois autres sommets de $(\mathscr{E})$.
   b) Calculer l'excentricité de $(\mathscr{E})$, puis donner une équation de la directrice $(\mathscr{D})$ associée au foyer O dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c) Déterminer une équation de $(\mathscr{E})$ dans le repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$, puis montrer que $(\mathscr{E}) = (\mathscr{C})$, $(\mathscr{C})$ étant la courbe du I. 2).

2. À tout réel θ de l'intervalle $[0;\pi]$, on associe l'équation : $z^2 - 2(4+5\cos\theta)z + (4\cos\theta+5)^2 = 0$

a) Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

b) Lorsque θ appartient à l'intervalle $]0;\pi[$, on note z_1 la solution de l'équation dont la partie imaginaire est positive, et z_2 l'autre solution. Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Donner en fonction de θ, les coordonnées de M_1 et M_2 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c) En déduire le lieu des points M_1, puis celui des points M_2 lorsque θ décrit l'intervalle $]0;\pi[$.

Problème (11 points)

Les parties B et C sont indépendantes.

Pour les représentations graphiques de ce problème, l'unité choisie est 2 cm ; il convient de placer l'axe des ordonnées suffisamment à gauche de la feuille de papier millimétré afin de réserver 16 cm pour le demi-axe des abscisses positives.

Partie A Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x(1-\ln x)$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$. On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. a) Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0.
   b) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   c) Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. a) Étudier la limite de f en $+\infty$.
   b) Étudier les variations de f, puis dresser le tableau des variations complet de f.
4. a) Écrire une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse e.
   b) Tracer (T) et $(\mathscr{C})$ en précisant la tangente au point O.

Partie B Calcul intégral : calcul d'aire et étude d'une fonction définie par une intégrale.

1. On désigne par α et x des nombres réels strictement positifs.
   Calculer l'intégrale $\int_\alpha^x f(t)dt$, à l'aide d'une intégration par parties.
2. Soit α un nombre réel strictement positif et $\mathscr{A}(\alpha)$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = e$.
   a) Montrer que $\mathscr{A}(\alpha) = 4\left|\int_\alpha^e f(t)dt\right|$. (On distinguera deux cas : $\alpha \leq e$ et $\alpha \geq e$)
   Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α.
   b) Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.
   c) Déterminer α tel que : $\alpha > e$ et $\mathscr{A}(\alpha) = e^2$.
3. Soit x un réel de $[0;+\infty[$. Prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^x f(t)dt$.
4. Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
   Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et préciser sa fonction dérivée.
   Quelle est la limite de F en 0 ?

5. a) Déduire du B 1. que : pour $x > 0$, $F(x) - F(1) = \frac{x^2}{4}(3 - 2\ln x) - \frac{3}{4}$.

b) Calculer la limite de $\frac{x^2}{4}(3 - 2\ln x) - \frac{3}{4}$ quand x tend vers 0.

En déduire la valeur de F(1), puis montrer que si $x > 0$, alors :
$F(x) = \frac{x^2}{4}(3 - 2\ln x)$.

Partie C Étude d'une famille de fonctions

À tout réel k, on associe la fonction f_k définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_k(0) = 0\text{, et si } x > 0,\quad f_k(x) = x(k - \ln x).$$

On désigne par $(\mathscr{C}_k)$ la courbe représentative de f_k dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit a un réel strictement positif, A_k le point de $(\mathscr{C}_k)$ d'abscisse a et (T_k) la tangente à $(\mathscr{C}_k)$ au point A_k.
   a) Déterminer l'ordonnée du point d'intersection de (T_k) avec l'axe des ordonnées.
   b) En déduire que, lorsque k décrit $\mathbb{R}$, les tangentes (T_k) sont concourantes en un même point de l'axe $(O, \vec{j})$.
2. a) Montrer que l'homothétie de centre O et de rapport e^k transforme la courbe $(\mathscr{C}_0)$ en la courbe $(\mathscr{C}_k)$.
   b) Vérifier que la courbe $(\mathscr{C}_1)$ est la courbe $(\mathscr{C})$ tracée au A 4.b).
   c) Par quelle transformation usuelle, la courbe $(\mathscr{C}_0)$ se déduit-elle de $(\mathscr{C}_1)$?
   d) Construire $(\mathscr{C}_0)$ sur la même figure que $(\mathscr{C}_1)$ ainsi que ses tangentes en ses points d'abscisses $\frac{1}{e}$ et 1.
3. Déduire, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le tracé de $(\mathscr{C}_2)$ de celui de $(\mathscr{C}_0)$ sur la même figure que $(\mathscr{C}_0)$ et $(\mathscr{C}_1)$, puis construire les tangentes à $(\mathscr{C}_2)$ en ses points d'abscisses e, e^2 et 1.
   On fera apparaître sur le graphique le point d'intersection des tangentes aux courbes $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ aux points de ces courbes d'abscisse 1.

COLLEGE NOTRE DAME DE QUABEN
L'HIRONDELLE
LA MESSAGÈRE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

BAC BLANC 2010
Mathématiques Série C
Coef : 5 Durée : 4 heures

EXERCICE 1(5 points)

1. Soit la suite (u_n), définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$.

a) Soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

2. On considère deux dés, notés A et B. le dé A comporte trois faces rouge et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

On choisit un dé hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si o obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.

On désigne par A_n l'événement « on utilise le dé A au n^ième^ lancer », par $\overline{A_n}$ l'événement contraire de A_n, par R_n l'événement « on obtient rouge au n^ième^ lancer » et par $\overline{R_n}$ l'événement contraire de R_n, par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.

a) Déterminer a_1.

b) Déterminer r_1 ; (pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.)

c) Montrer que $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.

d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $A_{n+1} = (R_n \cap A_n) \cup (\overline{A}_n \cap \overline{R}_n)$.

e) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer a_n en fonction de n.

f) en déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$

EXERCICE 2(5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle isocèle tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) =$

Soit I le point tel que le triangle CAI soit rectangle et isocèle avec $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$.

Pour la figure, que l'on complètera en traitant les questions, on prendra AB = 5 cm.

1. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = r_A \circ r_C$.
   a) Déterminer les images par f de A et de B.
   b) Démontrer que f est une rotation dont précisera l'angle. On désigne par O son centre.
   c) Démontrer que ABOC est un losange.

2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' limage de C par s, H le milieu du segment $[BC]$ et H' son image par s.
   a) Donner une mesure de l'angle de s. Montrer que C' appartient à la droite (OA).
   b) Donner l'image par s du segment $[OA]$ et montrer que H' est le milieu de $[OB]$.
   c) Montrer que $(C'H')$est perpendiculaire à (OB). En déduire que C' est centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

PROBLEME (10 points)

On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=1 \\ f(x)=\frac{t-1}{lnt} \quad si \ t \in]0\,;1[\end{cases}$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Le but du problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale :

$$\int_1^1 ft)dt$$

A – Etude de f

1. a) Montrer que f est continue en 0 et en 1.
   b) Montrer que f est dérivable sur]0 ; 1[.
   Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ a le même signe que $\varphi(t)$, où φ est la fonction définie sur]0 ; 1[par :
   $$\varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}.$$
   c) Etudier les variations de φ ; en déduire le signe de f'.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
3. a) Prouver que, pour tout élément u de $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$:
   $$0 \le \frac{1}{1-u} - (1+u) \le 2u^2$$
   En déduire que : $0 \le -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \le \frac{2u^3}{3}$.
   b) Soit g la fonction définie sur]0 ; 1[par :
   $$g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$
   Prouver, que pour tout élément h de $\left[-\frac{1}{2}\,;0\right]$:
   $$0 \le g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \le \frac{2h^2}{3}$$
   En déduire que g est dérivable en 1 et préciser $g'(1)$.
   c) En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ (unité graphique 10 cm).

B – Calcul de l'intégrale I

Pour tout élément x de $]0;\ 1]$, on pose : $I(x) = \int_x^1 f(t)dt$ et $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt$.

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales.)

1. Soit K la fonction définie sur $]0;\ 1]$ par :

$$K(x) = J(x^2) - J(x).$$

   a) Montrer que K est dérivable sur $]0;\ 1]$ et que

$$K'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - 2f(x^2)].$$

   b) Prouver que, pour tout élément x de $]0;\ 1]$:

$$f(x) - 2f(x^2) = -xf(x).$$

   c) En déduire que, pour tout élément x de $]0;\ 1]$:

$$I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\,lnt}\, dt. \ (1)$$

2. Calculer la dérivée de la fonction $\Psi : t \mapsto \ln(-\ln t)$ sur $]0;\ 1]$.

   En déduire que, pour tout élément x de $]0\,;1[$:

$$\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\,lnt}\, dt = \ln x. \ (2)$$

3. Prouver que, tout élément $0 < t < x < 1$: $0 \leq -\frac{1}{\ln t} \leq -\frac{1}{lnx}$.

   En déduire que, pour tout élément x de $]0\,;1[$:

$$0 \leq \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \leq -\frac{x}{\ln x}. \ (3)$$

4. A partir de (1), (2) et (3), déterminer la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 0.
5. Etablir que, pour tout élément x de $]0;\ 1]$:

$$I - I(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

   En déduire que $0 \leq I - I(x) \leq x$.

6. Prouver finalement que $I = \ln 2$.