L. E. R. N. B. ANNEE SCOLAIRE 2005 / 2006

BACCALAUREAT BLANC SESSION D'AVRIL 2006
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
SERIE : C - E
DUREE : 4 HEURES

EXERCICE1 (5 points)

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On lance à la fois deux dés parfaits D_1 et D_2 et on note le nombre marqué sur la face supérieur de chacun d'eux lorsqu'ils sont retombés.

Sur les faces du dé D_1, sont marqués : $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, -1, 1, $\sqrt{3}$, -2.

Sur les faces du dé D_2, sont marqués : 1, -1, $\sqrt{3}$, 0, 1, $\frac{1}{2}$.

On note α le nombre relevé sur le dé D_1 et β celui relevé sur D_2.
On définit les transformations f et g du plan (P) d'écritures complexes respectives :
$z' = az + 1 + i$ et $z' = a\bar{z} + i$ avec $a = \alpha + i\beta$.
1. a. Calculer la probabilité pour que f soit une similitude plane directe.
On rappelle que :
- tout déplacement est une similitude directe de rapport 1 ;
- toute homothétie de rapport non nul λ est une similitude directe de rapport $|\lambda|$

b. Calculer la probabilité pour que g soit un antidéplacement.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A :" f est une rotation d'angle droit"
B : " f est une homothétie"
C : " f est une similitude plane directe de centre I"
3. On donne $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ et on pose $h = gof$
   a. Déterminer la nature de h.
   b. Préciser les éléments caractéristiques de h
   c. Déterminer les coordonnées du centre et les sommets de l'image de l'ellipse (E) d'équation cartésienne : $x^2 + 4y^2 = 2$ par h^{-1}.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(6 ; 0) et B(3, $\sqrt{3}$). Soit R_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et R_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Un point quelconque M a pour coordonnées (x ; y).

1. On pose $M_1(x_1 ; y_1) = R_1(M)$ et $M_2 (x_2 ; y_2) = R_2(M)$. Déterminer les expressions analytiques de R_1 et de R_2.

2. a. Démontrer que l'application composée R_2oR_1 est une rotation dont on déterminera le centre Ω et l'angle θ.

b. Soit M'(x' ; y') tel que $M' = R_2oR_1(M)$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

c. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que M' appartienne à la droite d'équation $y = x - 6$.

3. Soit s la réflexion d'axe passant par A et B.

a. Démontrer qu'il existe deux réflexions s_1 et s_2 par rapport à des droites (D_1) et (D_2) telles que : $R_1 = s o s_1$ et $R_2 = s_2 o s$. En déduire que $R_2 o R_1 = s_2 o s_1$

b. Déterminer les équations cartésiennes de (D_1) et (D_2).

c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (D_1) et (D_2) et retrouver les résultats du 2.a.

PROBLEME (10 points)

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(t) = \frac{t-1}{\ln t}$ si $t \in]0 ; 1[$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Le but du problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)dt$.

PARTIE A

I- 1. Démontrer que f est continue en 0 et en 1

2. Démontrer que f est dérivable sur $]0 ; 1[$. Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ a le même signe que $\varphi(t)$ où φ est la fonction définie sur $]0 ; 1[$ par $\varphi(t) = -1 + \frac{1}{t} + \ln t$.

3. Etudier les variations puis le signe de φ. En déduire le signe de f'.

4. Etudier la dérivabilité de f en 0. Que peut – on en déduire pour la tangente à (C) au point O ?

II- 1. Prouver que pour tout élément u de $[0, \frac{1}{2}]$: $0 \leq \frac{1}{1-u} - (1 + u) \leq 2u^2$. En déduire que :

$0 \leq -\ln(1-u) - (u + \frac{u^2}{2}) \leq \frac{2u^3}{3}$

2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; 1[$ par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a. Prouver que pour tout h de $[\frac{-1}{2} ; 0]$: $0 \leq g(1 + h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}$.

Indications : utiliser la dernière inégalité du 1. puis remarquer que $g(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ et faire le changement de variable $h = -u$.

b. Déterminer alors la limite de $\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ quand h tend vers 0. En déduire que g est dérivable en 1 et préciser $g'(1)$.

3. En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

III- Tracer la courbe (C) : unité graphique 10 cm.

PARTIE B *(Calcul de l'intégrale I)*

Pour tout x de $]0 ; 1]$, on pose : $\mathbf{I}(x) = \int_x^1 f(t)dt$ et $\mathbf{J}(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt$. On ne cherchera pas à calculer ces intégrales ; on admet que J est dérivable sur $]0 ; 1]$ et $\mathbf{J}'(x) = -\frac{f(x)}{x}$

1. Soit K la fonction définie sur]0 ; 1] par : $K(x) = J(x^2) - J(x)$
   a. Montrer que K est dérivable sur]0 ; 1] et que $K'(x) = \frac{1}{x}[\,f(x) - 2f(x^2)]$.
   b. Prouver que pour tout x de]0 ; 1], on a : $f(x) - 2f(x^2) = -\,xf(x)$ et que $K'(x) = -\,f(x)$.
   c. En déduire que pour tout x de]0 ; 1] : $\mathbf{I}(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$ **(1)**
2. a. Calculer la dérivée de la fonction $\psi : t \mapsto \ln(-\ln t)$ sur]0 ; 1[.
   b. En déduire que pour tout x de]0 ; 1[, on a : $\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln t}dt = \ln 2$ **(2)**
3. a. Prouver que pour tout x de]0 ; 1[et tout élément t de]0 ; x[, on a : $0 \leq \frac{-1}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}$.
   b. En déduire que pour tout x de]0 ; 1[, on a : $0 \leq \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \leq \frac{-x}{\ln x}$ **(3)**
4. A partir de **(1), (2), (3)**, déterminer la limite de $\mathbf{I}(x)$ quand x tend vers 0.
5. a. Etablir que pour tout x de]0 ; 1], $\mathbf{I} - \mathbf{I}(x) = \int_0^x f(t)dt$.
   b. En déduire que $0 \leq \mathbf{I} - \mathbf{I}(x) \leq x$ et que $\mathbf{I} = \mathbf{\ln 2}$

CORRIGE-TYPE BAC BLANC 2006

MATHEMATIQUES SERIE: C

EXERCICE 1

1. Etablissons les résultats possibles à l'aide d'un tableau:

$\beta \backslash \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	1	$\sqrt{3}$	-2
1	$(\frac{\sqrt{3}}{2};1)$	$(0,1)$	$(-1;1)$	$(1;1)$	$(\sqrt{3};1)$	$(-2;1)$
-1	$(\frac{\sqrt{3}}{2};-1)$	$(0,-1)$	$(-1;-1)$	$(1;-1)$	$(\sqrt{3};-1)$	$(-2;-1)$
$\sqrt{3}$	$(\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3})$	$(0;\sqrt{3})$	$(-1;\sqrt{3}$	$(1;\sqrt{3})$	$(\sqrt{3};\sqrt{3})$	$(-2;\sqrt{3})$
0	$(\frac{\sqrt{3}}{2};0)$	$(0;0)$	$(-1;0)$	$(1;0)$	$(\sqrt{3};0)$	$(-2;0)$
1	$(\frac{\sqrt{3}}{2},1)$	$(0,1)$	$(-1;1)$	$(1;1)$	$(\sqrt{3};1)$	$(-2;1)$
$\frac{1}{2}$	$(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$	$(0;\frac{1}{2})$	$(-1;\frac{1}{2})$	$(1,\frac{1}{2})$	$(\sqrt{3};\frac{1}{2})$	$(-2;\frac{1}{2})$

Le cardinal de l'univers Ω est 36. Les dés étant parfaits, les conditions d'équiprobabilité sont réunies.

0,50

a). Soit S: l'évènement "f est une similitude plane directe". Card S = 35 d'où $\boxed{P(S) = \frac{35}{36}}$ car $S = \Omega \setminus \{(0,0)\}$ 0,50

b) Soit G l'évènement: "g est un antidéplacement"

Card G = 6 car $G = \{(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}); \overset{(2)}{(0,1)}; (0,-1); (-1;0); (1,0)\}$

$\boxed{P(G) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$ 0,50

2. Probabilité de chacun des évènements:

A: "f est une rotation d'angle droit"

$A = \{\overset{(2)}{(0,1)}; (0;-1)\}$; Card A = 3. et $\boxed{P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}}$ 0,50

B : " f est une homothétie "

f est une homothétie si $\operatorname{Im} a = 0$ et $\alpha \neq 1$

$B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right); (-1; 0); (1; 0); (\sqrt{3}; 0)\ (-2, 0) \right\}$; Card B = 5

$\boxed{P(B) = \frac{5}{36}}$ 0,50

C : " f est une similitude directe de centre I "

$C = S \setminus \{(1; 0)\}$; Card = 34 d'où $\boxed{P(C) = \frac{34}{36}}$ 0,50

3- $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ donc $a = 1 - i$; $h = g \circ f$.

a) $M(z) \xrightarrow{f} M'(z')$

$z' = (1-i)z + 1 + i$

$M(z) \xrightarrow{g} M'(z')$

$z' = (1-i)\bar{z} + i$

$h = g \circ f$: $z' = (1-i)\left[\overline{(1-i)z + 1 + i}\right] + i = 2\bar{z} - i$ 0,50

b) Les éléments caractéristiques de h sont :

* rapport : 2
* centre : $\Omega\left(-\frac{2}{3}i\right)$ 0,25
* angle : $0\ [2\pi]$.

c) coordonnées du centre et sommets de (E) : $x^2 + 4y^2 = 2$ par h^{-1}

$h : \begin{cases} x' = 2x \\ y' = -2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow h^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' \\ y = \frac{1}{2}(-y' - 1) \end{cases}$ 0,25

$(E') = h^{-1}(E) : \left(\frac{1}{2}x'\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}(-y'-1)\right)^2 = 2 \Leftrightarrow (E') : \frac{x'^2}{4} + (y'+1)^2 = 2$

$\Leftrightarrow (E') : \frac{x^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$ 0,50

Le centre a pour coordonnées $(0; -1)$ dans $(O; \vec{u}; \vec{v})$ 0,50

Coordonnées des sommets : $(-2\sqrt{2}, 0)$; $(2\sqrt{2}, 0)$; $(0; -1-\sqrt{2})$; $(0; -1+\sqrt{2})$

$R_2 \circ R_1$ est la rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$ et de centre $\Omega\begin{pmatrix} 9-3\sqrt{3} \\ -3+3\sqrt{3} \end{pmatrix}$

b/ Expression de x' et y' en fonction de x et y avec $M' = R_2 \circ R_1(M)$.

$$z' = e^{i\frac{5\pi}{6}} z + 3+3\sqrt{3} + i(-3+3\sqrt{3})$$

On trouve $\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 3 + 3\sqrt{3} \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 + 3\sqrt{3} \end{cases}$ 0,50

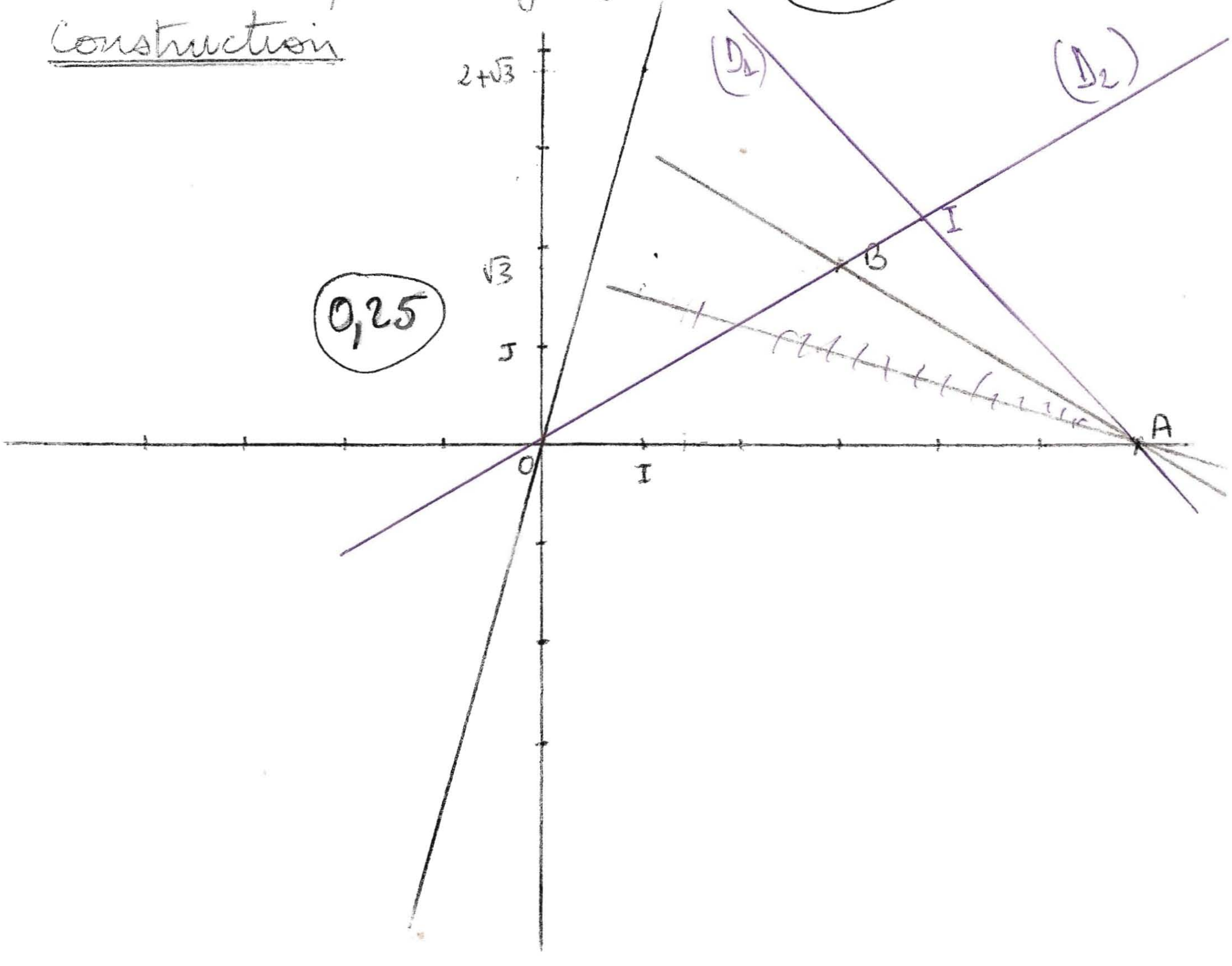
c/ $(D) : y = x - 6$

$M'(x';y') \in (D) \Leftrightarrow y' = x' - 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 + 3\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 3 + 3\sqrt{3} - 6$

$\Leftrightarrow y = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}x = (2+\sqrt{3})x$

D'où l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $M' \in (D)$ est la droite d'équation $y = (2+\sqrt{3})x$. 0,50

Construction



EXERCICE 2

$A(6;0)$; $B(3;\sqrt{3})$ dans le repère orthonormé (O,I,J).

R_1 : rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$

R_2 : rotation de centre B et angle $\frac{2\pi}{3}$.

1) $M_1 = R_1(M)$; $M_2 = R_2(M)$ avec $M(x;y)$; $M_1(x_1;y_1)$; $M_2(x_2,y_2)$

Expressions analytiques de R_1 et R_2.

$M_1 = R_1(M) \Leftrightarrow \dfrac{z_1 - z_A}{z - z_A} = e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} z + (1 - e^{i\frac{\pi}{6}}) z_A$.

On trouve $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 6 - 3\sqrt{3} \\ y_1 = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 \end{cases}$ 0,50

$M_2 = R_2(M) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} z + (1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}) z_B$

on trouve $\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 6 \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ 0,50

2) a/ Démontrons que $R_2 \circ R_1$ est une rotation :

R_1 et R_2 étant deux rotations d'angles respectifs $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ et $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ avec $\theta_1 + \theta_2 = \frac{5\pi}{6} \neq 0$, alors $R_2 \circ R_1$ est une rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$. 0,25

Détermination du centre :

Ecriture complexe de $R_2 \circ R_1$

$M_1 = R_1(M) \Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} z + (1 - e^{i\frac{\pi}{6}}) z_A$

$R_2(M_1) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} \left(e^{i\frac{\pi}{6}} z + (1 - e^{i\frac{\pi}{6}}) z_A\right) + (1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}) z_B$.

On trouve $z' = e^{i\frac{5\pi}{6}} z + 3 + 3\sqrt{3} + i(-3 + 3\sqrt{3})$ 0,25

Soit ω l'affixe du centre $\omega = \dfrac{3 + 3\sqrt{3} + i(-3 + 3\sqrt{3})}{1 - e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

$\omega = 9 - 3\sqrt{3} + i(-3 + 3\sqrt{3})$ 0,25

3) a) Démontrons qu'il existe deux réflexions s_1 et s_2 par rapport à des droites (D_1) et (D_2) telles que $R_1 = s \circ s_1$ et $R_2 = s_2 \circ s$.

Soit (D_1) l'image de (AB) par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{12}$ et s_1 la réflexion d'axe (D_1). s étant la réflexion d'axe (AB), on a : $s \circ s_1$ est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$; par conséquent $R_1 = s \circ s_1$

Soit (D_2) l'image de (AB) par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a $R_2 = s_2 \circ s$. 0,50

Déduction : $R_2 \circ R_1 = (s_2 \circ s) \circ (s \circ s_1) = s_2 \circ (s \circ s) \circ s_1 = s_2 \circ s_1$ 0,25

car $s \circ s = Id$.

b) Equations cartésiennes de D_1 et D_2 :

- Equation de D_1 :

Soit $M(x;y) \in D_1 \setminus \{A\}$; $(\widehat{\vec{AB};\vec{AM}}) = \frac{\pi}{12} [\pi]$.

$$\frac{z_{\vec{AM}}}{z_{\vec{AB}}} = r e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + k\pi\right)} \qquad k \in \mathbb{Z},\ r \in]0;+\infty[$$

$$\frac{z-6}{-3+i\sqrt{3}} = r(-1)^k e^{-\frac{i\pi}{12}} \Leftrightarrow z = 2\sqrt{3}\, r(-1)^k e^{-\frac{i\pi}{12}}(-3+i\sqrt{3}) + 6$$

$$\Leftrightarrow z = 2\sqrt{3}\, r(-1)^k e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{6}\right)} + 6$$

$$\Leftrightarrow z = 2\sqrt{3}\, r(-1)^k e^{i\frac{3\pi}{4}} + 6$$

d'où $\begin{cases} x = 2\sqrt{3}(-1)^k r \cos\frac{3\pi}{4} + 6 \\ y = 2\sqrt{3}(-1)^k r \sin\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-6}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{y}{\sin\frac{3\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow y = \tan\frac{3\pi}{4}(x-6) = -x+6$ D'où :

$(D_1) : y = -x + 6$ 0,50

• Equation cartésienne de (D_2).

$M \in (D_2) \setminus \{B\} \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BM}}) = \frac{\pi}{3} [\pi]$

$$\frac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = r e^{i(\frac{\pi}{3} + k\pi)} \qquad r \in]0; +\infty[; \; k \in \mathbb{Z}$$

$$z = 3 + i\sqrt{3} + (3 - i\sqrt{3}) r (-1)^k e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3}\, r(-1)^k \cos\frac{\pi}{6} \\ y = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\, r(-1)^k \sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

d'où $\frac{x-3}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{y - \sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow y = \sqrt{3} + \tan\frac{\pi}{6}(x-3) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$

d'où (D_2): $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$ (0,50)

c) Coordonnées du point d'intersection I de (D_1) et (D_2).

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3} x \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3} x \\ \frac{\sqrt{3}}{3} x = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 9 - 3\sqrt{3} \\ y_I = -3 + 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$I \begin{pmatrix} 9 - 3\sqrt{3} \\ -3 + 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\quad I = \Omega$ (0,25)

PROBLEME (10 points)

f définie sur $[0, 1]$ par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \text{ si } t \in]0; 1[\end{cases}$

$I = \int_0^1 f(t)\,dt.$

PARTIE A

I - 1. Démontrons que f est continue en 0 et en 1

• $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t-1}{\ln t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{-1}{\ln t} = 0 = f(0)$ d'où f est continue en 0. (0,25)

• $\lim\limits_{t \to 1} f(t) = \lim\limits_{t \to 1} \frac{1}{\frac{\ln t}{t-1}} = \frac{1}{1} = 1 = f(1)$ d'où f est continue en 1 (0,25)

2- Démontrons que f est dérivable sur $]0;1[$

0,25

$t \mapsto t-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0;1[$

$t \mapsto \ln t$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ en particulier sur $]0;1[$

et $\forall t \in]0;1[$, $\ln t \neq 0$ d'où

$t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} = f(t)$ est dérivable sur $]0;1[$ comme quotient de fonctions dérivables

Calcul de $f'(t)$.

0,25

$\forall t \in]0;1[$, $f'(t) = \frac{\ln t - \frac{1}{t}(t-1)}{(\ln t)^2} = \frac{-1 + \frac{1}{t} + \ln t}{(\ln t)^2} = \frac{\varphi(t)}{(\ln t)^2}$

$\forall t \in]0,1[$, $(\ln t)^2 > 0$ donc le signe de $f'(t)$ est celui de $\varphi(t)$.

3- Variations et signe de φ.

0,50

φ est dérivable sur $]0;1[$ et $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t^2}$

$\forall t \in]0;1[$, $\varphi'(t) < 0$ d'où φ est strictement décroissante sur $]0;1[$. $\forall t \in]0;1[$, $\varphi(t) > \varphi(1) \Rightarrow$

0,25

$\varphi(t) > 0$. d'où $\forall t \in]0;1[$, $f'(t) > 0$

4- Dérivabilité de f en 0.

0,50

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t-1}{t \ln t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t-1}{\ln t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} = +\infty$

f n'est pas dérivable en 0. Mais (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

II- 1- * Prouvons que $\forall u \in [0, \frac{1}{2}]$, $0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2$

0,50

On veut montrer que $0 \leq \frac{u^2}{1-u} \leq 2u^2$

On a : $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2} \leq -u \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1-u \leq 1$

$\Leftrightarrow \forall u \in [0;\frac{1}{2}]$; $1 \leq \frac{1}{1-u} \leq 2 \Leftrightarrow u^2 \leq \frac{u^2}{1-u^2} \leq 2u^2$

d'où $\forall u \in [0;\frac{1}{2}]$, $0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2$

* Déduction :

En intégrant sur $[0;u]$ les inégalités précédentes, on a :
$0 \leq \int_0^u \frac{dt}{1-t} - \int_0^u (1+t)dt \leq \int_0^u 2t^2 dt$ on obtient successivement

$0 \leq \left[-\ln(1-t)\right]_0^u - \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_0^u \leq \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^u$ et

$0 \leq -\ln(1-u) - \left(u+\frac{u^2}{2}\right) \leq \frac{2u^3}{3}$. 0,25

2. Soit g définie sur $]0;1[$, par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a) Prouvons que pour tout $h \in [-\frac{1}{2};0]$, $0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}$

On a $g(1+h) = \frac{1}{f(1+h)} = \frac{\ln(1+h)}{h}$; $g(1) = \frac{1}{f(1)} = 1$

On veut montrer que $0 \leq \frac{\ln(1+h)}{h} - 1 + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}$

Posons $h = -u$. donc $u = -h$.

$\forall h \in [-\frac{1}{2};0]$; $-h \in [0;\frac{1}{2}]$ donc :

0,50 $0 \leq -\ln(1+h) + h - \frac{h^2}{2} \leq -\frac{2}{3}h^3$.

si $h = 0$, $-\ln(1+0) + 0 - \frac{0}{2} = 0$

si $h \neq 0$ on a : $0 \leq \frac{\ln(1+h)}{h} - 1 + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}$

d'où $\forall h \in [-\frac{1}{2};0]$, $0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}$

b) Déterminons $\lim_{h\to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h}$

On a : $0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3} \Leftrightarrow -\frac{h}{2} \leq g(1+h) - g(1) \leq \frac{2h^2}{3} - \frac{h}{2}$

0,25 $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{g(1+h)-g(1)}{h} \leq \frac{2h}{3} - \frac{1}{2}$

$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2}{3}h - \frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ d'où $\lim_{h\to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = -\frac{1}{2}$

• Déduisons que g est dérivable en 1

En posant $x = 1+h$, $h = x-1$, si $h \to 0$ alors $x \to 1$

0,25 $\lim_{h\to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$. D'où g est dérivable en 1 et $g'(1) = -\frac{1}{2}$

3. Déduisons-en que f est dérivable en 1

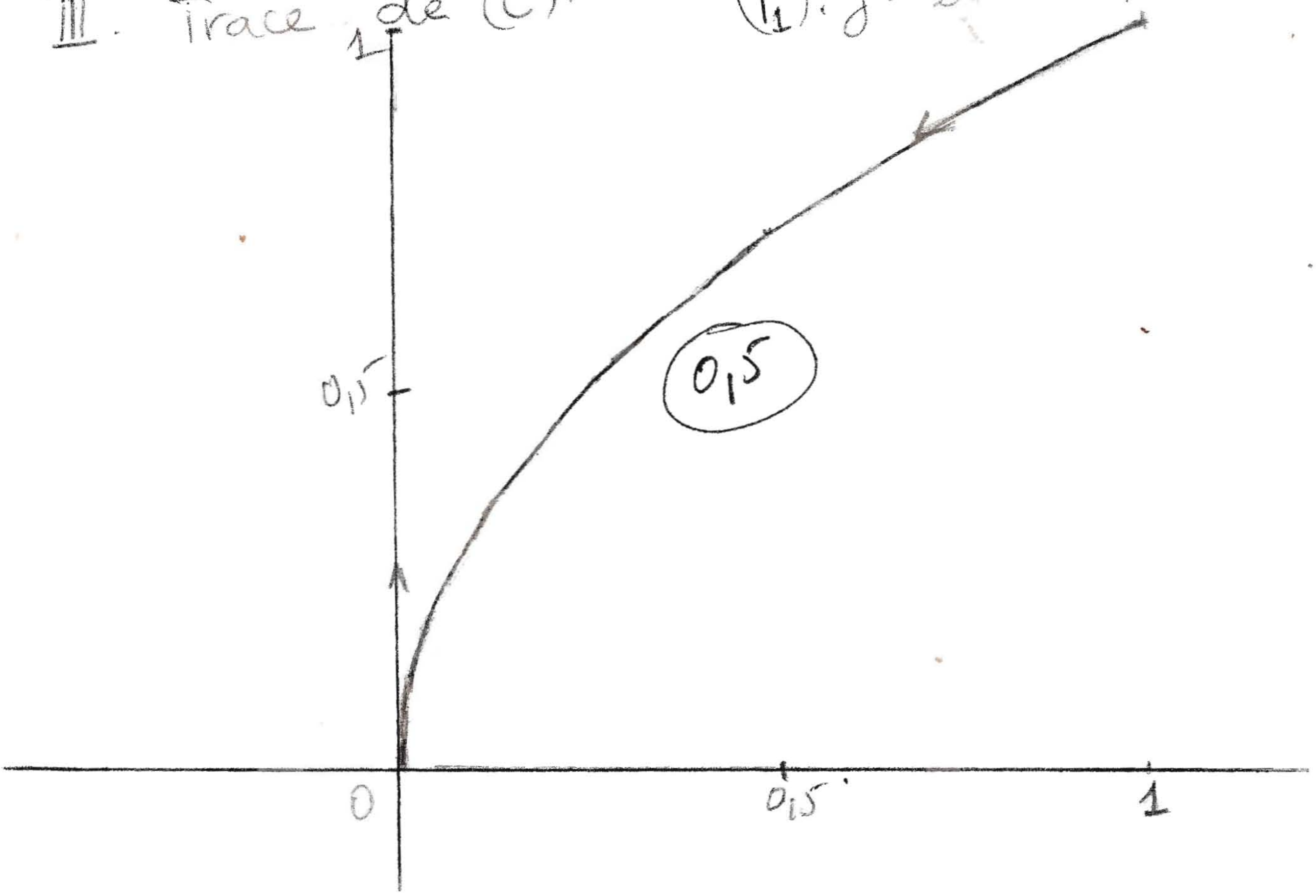
0,5

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(1)}}{x-1} = -\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)f(x)f(1)} = -\frac{1}{2}$$

Si $x \to 1$, alors $f(x) \to f(1) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$.

D'où f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

III. Tracé de (C). $(T_1) : y = \frac{1}{2}(x+1)$



PARTIE B. Calcul de I.

$\forall x \in]0;1]$; $I(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$ et $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$;

$J'(x) = -\frac{f(x)}{x}$.

1- Soit $K :]0,1] \to \mathbb{R}$ par $K(x) = J(x^2) - J(x)$

a) Montrons que K est dérivable sur $]0;1]$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est
$x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$ est continue sur $[0;1]$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;1]$ donc $x \mapsto \frac{x-1}{x\ln x}$ est continue sur $]0;1]$

sur $]0;1]$ comme produit de fonctions continues sur $]0;1]$. Alors $x \mapsto J(x)$ est dérivable sur $]0;1]$
$x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0;1]$
$x \mapsto J(x^2)$ est dérivable sur $]0;1]$ comme composée de fonctions dérivables.

0,50 D'où $x \mapsto K(x)$ est dérivable sur $]0;1]$ comme somme de fonctions dérivables et on a :

$\forall x \in]0;1]$, $K'(x) = 2x J'(x^2) - J'(x) = 2x\left(\frac{-f(x^2)}{x^2} + \frac{f(x)}{x}\right)$

$K'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - 2f(x^2)\right)$.

b) Prouvons que, $\forall x \in]0;1]$, on a $f(x) - 2f(x^2) = -x f(x)$

0,25 On a : $f(x) - 2f(x^2) = \frac{x-1}{\ln x} - \frac{2(x^2-1)}{2\ln x} = \frac{x - x^2}{\ln x} = -x\frac{(x-1)}{\ln x}$

d'où $f(x) - 2f(x^2) = -x f(x)$

Montrons que $K'(x) = -f(x)$

0,25 On a : $K'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - 2f(x^2)\right) = \frac{1}{x}\left(-x f(x)\right) = -f(x)$.

d'où $K'(x) = -f(x)$.

c) Déduisons que $\forall x \in]0;1]$ $I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$. (1)

0,50 On a : $I(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$ donc $I'(x) = -f(x) = K'(x)$.

$\Rightarrow I(x) = K(x) = J(x^2) - J(x) = -[J(x) - J(x^2)]$

D'où $I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{f(t)}{t}\,dt$ d'où

$\forall x \in]0;1]$; $I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$.

0,50 2. a) Calcul de la dérivée de $\psi : t \mapsto \ln(-\ln t)$

$\forall t \in]0;1[$, $\psi'(t) = \frac{1}{t\ln t}$.

b) Déduction : $\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \left[\ln(-\ln t)\right]_{x^2}^{x} = \ln(-\ln x) - \ln(-\ln x^2)$

$\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln t}dt = -\ln(-\ln x) + \ln(-\ln x^2) = -\ln\left(\frac{-\ln x}{-\ln x^2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

0,50

$\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln t}dt = \ln 2 \cdot (2)$

3- a) Prouvons que $\forall x \in]0;1[$ et $\forall t \in]0;x[$ on a :

$0 \leq \frac{-1}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}$

0,50

$\forall t \in]0,x[, \ \ln t \leq \ln x \Rightarrow \frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \Rightarrow -\frac{1}{\ln t} \leq -\frac{1}{\ln x}$

d'où $0 \leq \frac{-1}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}$

b) En intégrant cette double inégalités entre x^2 et x on a : $0 \leq \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}[t]_{x^2}^{x}$

0,5

$\Rightarrow 0 \leq \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{x^2-x}{\ln x}$; $x - x^2 - x = -x^2 \leq 0 \Rightarrow$
$x - x^2 \leq x$

donc $-x \leq x^2 - x$ donc $\forall x \in]0;1[$, $(\ln x < 0)$ et

$\frac{x^2-x}{\ln x} \leq \frac{-x}{\ln x}$ d'où $0 \leq \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \leq \frac{-x}{\ln x} \cdot (3)$

4- Limite de $I(x)$ en 0.

$I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}dt = \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} + \int_{x^2}^{x} \frac{-dt}{t\ln t}$

D'après (2) et (3), on a. $\int_{x^2}^{x} \frac{-dt}{t\ln t} = \ln 2$ et $0 \leq \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \leq \frac{-x}{\ln x}$

0,50

$I(x) = \ln 2 + \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}$. or $0 \leq \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \leq \frac{-x}{\ln x} \Rightarrow$

$\lim_{x\to 0} \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} = 0$ $\left(\lim_{x\to 0} \frac{-x}{\ln x} = 0\right)$.

d'où $\lim_{x\to 0} I(x) = \ln 2$.

5- a) Etablissons que $\forall x \in]0;1]$ $I - I(x) = \int_0^x f(t)dt$

$I - I(x) = \int_0^1 f(t)dt - \int_x^1 f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$. d'où

$I - I(x) = \int_0^x f(t)dt$. 0,50

b) Déduisons que $0 \leq I - I(x) \leq x$.

On a : $0 \leq t \leq x$ et f croissante donc $0 \leq f(t) \leq f(x)$.

$0 \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x f(x)dx \Rightarrow 0 \leq \int_0^x f(t)dt \leq x f(x)$.

donc $0 \leq I - I(x) \leq x f(x)$.

$x \in]0;1[\Rightarrow -1 < x-1 < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\ln x} < \frac{-1}{\ln x} \Rightarrow$

0,25
1

$0 \leq \frac{x(x-1)}{\ln x} \leq \frac{-x}{\ln x} < x$ d'où $0 \leq I - I(x) \leq x$

Montrons que $I = \ln 2$.

$0 \leq I - I(x) \leq x \Rightarrow I(x) \leq I \leq x + I(x)$

$\lim_{x \to 0} x + I(x) = \ln 2 = \lim_{x \to 0} I(x)$. d'où $\boxed{I = \ln 2}$ 0,25