COLLEGE et LYCEE RAPONDA WALKER EXAMEN DE SYNTHESE février 2013

SERIE C Epreuve de mathématiques durée : 4 heures coef : 4

EXERCICE 1 : (5 points)

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
<< soit p un nombre premier et *a* un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p >>.

1. p est un nombre premier impair.

a/ Montrer qu'il existe un entier naturel k , non nul, tel que $2^k \equiv 1 \; [p]$

b/ Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \; [p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n , alors $2^n \equiv 1 \; [p]$.

c/ Soit b tel que $2^b \equiv 1 \; [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1 \; [p]$ alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.

On prend pour p un facteur premier de A (p divise A).

a/ Justifier que $2^q \equiv 1 [p]$

b/ Montrer que p est impair.

c/ Soit b tel que $2^b \equiv 1 \; [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

Montrer en utilisant la question **1.** que b divise q. En déduire que b = q.

d/ Montrer que q divise p – 1, puis montrer que $p \equiv 1 [2q]$

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres inférieurs à 400 et qui sont de la forme 34m+1, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307.

En déduire que A_1 est premier.

EXERCICE 2 : (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit les points A, A', B, et B' d'affixes respectives $z_A = 1-2i,\ z_{A'} = -2+4i,\ z_B = 3-i,\ z_{B'} = 5i$

1. a/ Placer les points A, A', B, et B' dans le plan complexe. Montrer que ABB'A' est un rectangle.

b/ Soit s la symétrie orthogonale telle que : $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. On note (Δ) son axe. Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.

c/ On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z.

Montrer que : $z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\bar{z} + 2i - 1$.

2. Soit g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\bar{z} + 5 - i$.

a/ On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plans complexe.

b/ Soit Ω le point d'affixe $z_\Omega = 1+i$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2

Montrer que C et D sont les images respectives de A' et B' par h.

c/ Donner l'écriture complexe de l'homothétie réciproque h^{-1} de h.

3. On pose $f = h^{-1} \circ g$

a/ Déterminer l'écriture complexe de f.

b/ Déterminer l'expression analytique de f.

c/ L'application f admet-elle des points invariants ?

<u>**PROBLEME**</u> : (10 points)

Dans ce problème n est un entier naturel et on considère la famille de fonctions f_n définies sur $[0;+\infty[$ comme suit :

$$\begin{cases} f_n(x)=1-x^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ f_n(0)=1 \end{cases}$$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, et on note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n.

<u>**Partie A**</u> : Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction f_0.

1 a/ Etudier la continuité de f_0 en 0 et son comportement en $+\infty$

b/ Etudier le comportement du rapport $\dfrac{f_0(x)-1}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Que peut-on conclure pour la fonction f_0 en 0 et la courbe (C_0) ?

2. a/ Justifier la dérivabilité de f_0 sur $]0;+\infty[$.

Calculer $f_0'(x)$ puis $f_0''(x)$ pour tout nombre réel appartenant à $]0;+\infty[$.

b/ Etudier successivement les variations de f_0' et de f_0 et dresser le tableau de variations de f_1.

3. Tracer la courbe (C_0), son asymptote et la tangente au point $O'(0;1)$

<u>Partie</u> B :La seconde partie est consacrée à l'étude des fonctions f_n lorsque $n\geq 1$.

1 a/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0.

b/ Etudier le comportement de f_n en $+\infty$.

2 a/ Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0;+\infty[$.

Démontrer que $f_n'(x) = x^n g_n(x)$ où g_n est une fonction définie sur $]0;+\infty[$.

b/ Etudier les variations de la fonction g_n et en déduire le signe de $g_n(x)$.

c/ Dresser le tableau de variations de f_n.

Partie C : La troisième partie porte sur les courbes (C_n) lorsque $n \geq 1$.

1. Quelle est la tangente à (C_n) en O, ~~origine du repère~~ ?

2. Etudier la position relative des courbes (C_{n+1}) et (Cn) pour $n \geq 1$.

Quelle est la position de (C_1)par rapport à toutes les autres courbes (C_n) ?

3. On admet que pour tout x de $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$, $-\frac{1}{2}x^4 + \frac{x^3}{3} \leq \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{3}$.

Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \right]$.

Que peut-on conclure pour (C_1) ?

4. Tracer (C_1) dans le même repère que (C_0).

fin