MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

REPUBLIQUE GABONAISE
UNION-TRAVAIL-JUSTICE

LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO
Tél : 55 21 73 FAX : 55 12 02 BP : 236 PORT-GENTIL

BAC BLANC MARS 2012
Epreuve de MATHEMATIQUES

Série :C∝E
Durée :4h
Coef : 5

EXERCICE 1 (4 points)

1° On considère l'équation : (E) $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

a)Déterminer un couple d'entiers relatifs (u ; v) tel que $6u + 7v = 1$ .En déduire une solution particulière de (E).

b)Résoudre l'équation (E) .

2° Soit ($O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}$) un repère orthonormé de l'espace et (P) le plan d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.
On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan ($O ; \vec{i} ; \vec{j}$).
Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels que l'on précisera.

3° On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x , y et z sont des entiers naturels.

a)Montrer que l'entier y est impair.

b) On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d) En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

EXERCICE 2 (5points) Les questions 1°, 2° et 3° sont indépendantes.

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct ($O , \vec{u} , \vec{v}$).

1° On donne les points : $A\binom{2}{0}$, $B\binom{1}{1}$, $C\binom{-2}{-1}$, $A'\binom{3}{10}$, $B'\binom{4}{6}$ et $C'\binom{-3}{-1}$.

Soit f l'application affine du plan telle que : f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'.

a) Démontrer que f est bijective.

b) Déterminer l'expression analytique de f.

c) Déterminer une équation de la droite (D') image par f de la droite (D) d'équation $y = 2x + 3$.

2° Soit g l'application affine du plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x - 2 \end{cases}$

a) Démontrer que g est bijective.

b) Déterminer l'écriture complexe de g et en déduire que g est un antidéplacement.

c) Déterminer l'ensemble des points du plan invariants par g et en déduire la nature de g.

d) Déterminer les éléments caractéristiques de g ; **(On donnera une équation cartésienne de son axe (Δ)).**

3) a) Déterminer l'ensemble (C) des points M du plan d'affixe z telle que $\left|(1+i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

b) Soit h la transformation du plan d'écriture complexe $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.

c) Déterminer E antécédent de O par h. En utilisant h retrouver l'ensemble (C).

PROBLEME (11 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + 2 - \ln(1 + e^x)$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité graphique étant 1 cm.

Partie A : ETUDE DE LA FONCTION f.

1°a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

b) Montrer que $f(x) = 2 - \ln(1 + e^{-x})$ pour tout réel x, puis en déduire la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la droite (D) d'équations $y = x + 2$ est une asymptote à (C) .

d) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

2°a) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution réelle unique α.

c) calculer la valeur exacte de α puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

3° a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse α.

b) Construire (D), (T) et (C) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie B : ETUDE D'UNE SUITE.

On considère la suite (U_n) avec $n \geq 1$ définie par $U_n = \frac{1}{e+1} + \frac{1}{e^2+1} + \ldots + \frac{1}{e^n+1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{e^p+1}$

1° Montrer que la suite (U_n) est croissante.

2° Etudier le sens de variation de la dérivée f ' sur IR.

3° Soit a un réel quelconque .En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction f respectivement sur $[a - 1, a]$, puis sur $[a, a + 1]$, et en utilisant la question précédente montrer que : $f(a + 1) - f(a) \leq f'(a) \leq f(a) - f(a - 1)$.

4° En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a : $f(n + 1) - f(1) \leq U_n \leq f(n) - f(0)$.

5°a) Montrer que la suite (U_n) est convergente.

b) Soit L la limite de (U_n) en $+\infty$.Montrer que $\ln(1 + e) - 1 \leq L \leq \ln 2$.

Partie C : ETUDE D'UNE FONCTION INTEGRALE.

Soit F la fonction définie sur $[\alpha, +\infty[$ par $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$.

1°a) Justifier que F est bien définie sur $[\alpha, +\infty[$.

b) Montrer que $F(x) \geq 0$ pour tout réel $x \geq \alpha$.

2°a) Montrer que F est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) Etudier le sens de variation de F.

3°a) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, on a $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1 + t) \leq t$.

b) En déduire que $f(x) \geq 2 - \frac{1}{e^x}$ pour tout réel x.

4°a) Montrer que $F(x) \geq 2x - \frac{1}{e^{\alpha}}$ pour tout réel $x \geq \alpha$.

b) En déduire la limite de F en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de F.

Partie D : ETUDE D'UNE SUITE INTEGRALE..

On considère la suite (V_n) avec $n \geq 1$ définie par $V_n = \int_{0}^{n} \ln(1 + e^{-t})\,dt$.

1°a) Justifier l'existence de la suite (V_n) .

b) Montrer que la suite (V_n) est positive pour tout $n \geq 1$.

c) Interpréter V_n comme l'aire d'un domaine D que l'on définira clairement.

2°a) Montrer que (V_n) est une suite croissante.

b) Démontrer que pour $n \geq 1$, on a : $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-n}(e^{-n} - 4) \leq V_n \leq 1 + e^{-n}$.

c) En déduire que (V_n) est convergente. Soit L' cette limite.

d) Montrer que $\frac{3}{4} \leq L' \leq 1$.

Bac Blanc Mars 2012

1° a) $6(-1)+7(1)=1$.

Le couple $(-1;1)$ vérifie $6u+7v=1$ or

$6(-1)+7(1)=1 \Rightarrow$

$6(-57)+7(57)=57$ ainsi

le couple $(-57;57)$ est une solution de (E) $6x+7y=57$

b) Résolvons l'équation (E)

$6x+7y=57 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+7y=57 \\ 6(-57)+7(57)=57 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 6x+7y=6(-57)+7(57)$

$\Leftrightarrow 6(x+57)=7(-y+57)$

$\Leftrightarrow$ 7 divise $6(x+57)$

or 6 et 7 sont premiers entre eux donc 7 divise $x+57$ d'après le théorème de Gauss ainsi il existe un entier relatif k tel que

$x+57=7k$ et $x=-57+7k$

avec $6(x+57)=7(-y+57)$

on a $6\times 7k=7(-y+57)$

et $6k=-y+57$

par suite $y=-6k+57$

d'où $x=-57+7k$
$y=57-6k$

$S=\{(-57+7k\,;\,57-6k)\,k\in\mathbb{Z}\}$

<u>Rq</u> on peut trouver aussi

$x=-57-7k$ et $y=57+6k$.

$S=\{(-57-7k\,;\,57+6k),k\in\mathbb{Z}\}$

2° (P) $6x+7y+8z=57$

Le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ a pour équation $z=0$ d'où le système $\begin{cases} 6x+7y+8z=57 \\ z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+7y=57 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=-57+7k \\ y=57-6k \\ z=0 \end{cases}$

$x,y,z\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{57}{7}\leq k\leq\frac{57}{6}$

$\Rightarrow 8{,}14 < k < 9{,}5$

on trouve pour unique valeur de k l'entier naturel 9 et alors le point $(6;3;0)$ est le seul point de coordonnées entiers naturels appartenant aux deux plans.

$3°$ $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (P) \Leftrightarrow 6x+7y+8z=57$

a) $6 \equiv 0 [2]$ $7 \equiv 1 [2]$ $8 \equiv 0 [2]$

et $57 \equiv 1 [2]$ donc

si $M \in (P)$ on a $y \equiv 1 [2]$

ainsi l'entier y est impair.

b) on pose $y = 2p+1$

$\begin{cases} y = 2p+1 \\ 6x+7y+8z=57 \end{cases} \Rightarrow$

$6x+7(2p+1)+8z = 57 \Rightarrow$

$6x+14p+7+8z = 57$

or $6x \equiv 0 [3]$ $14p+7 \equiv 2p+1 [3]$ et $57 \equiv 0 [3]$

$8z \equiv 2z [3]$

donc $2p+1+2z \equiv 0 [3]$ et

$2(p+z) \equiv -1 [3]$ avec $-1 \equiv 2 [3]$

on a $2(p+z) \equiv 2 [3]$ mais

2 et 3 sont premiers entre eux

d'où $p+z \equiv 1 [3]$ par conséquent le reste dans la division euclidienne de $p+z$ par 3 est égal à 1.

c) on pose $p+z = 3q+1$

$y = 2p+1$

$6x+7y+8z = 57 \Rightarrow$

$6x+7(2p+1)+8(3q+1-p) = 57$

$6x+14p+7+24q+8-8p=57$

$6x+6p+24q = 42$

d'où $\boxed{x+p+4q=7}$

x, p et q étant des entiers naturels on a :

$0 \leq x \leq 7$ $0 \leq p \leq 7$ et

$0 \leq 4q \leq 7$ et $0 \leq q \leq \frac{7}{4}$

d'où $\boxed{q=0 \text{ ou } q=1}$

b) pour $q=0$ avec $p+z=1$ on a

$\begin{cases} p=0 \\ z=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=1 \\ z=0 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} q=0 \\ p=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} q=0 \\ p=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases}$

pour $q=1$ on a $\begin{cases} x+p=3 \\ p+z=4 \end{cases}$

et $p \in \{1; 2; 3\}$

$p=1$	$p=2$	$p=3$
$x=2$	$x=1$	$x=0$
$y=3$	$y=5$	$y=7$
$z=3$	$z=2$	$z=1$

les points de (P) concernés sont

$\{(7;1;1); (6;3;0); (2;3;3);$
$(1;5;2); (0;7;1)\}$

II

1° $A\binom{2}{0}$ $B\binom{1}{1}$ $C\binom{-2}{-1}$ $\overrightarrow{AB}\binom{-1}{1}$ $\overrightarrow{AC}\binom{-4}{-1}$

$A'\binom{3}{10}$ $B'\binom{4}{6}$ $C'\binom{-3}{-1}$ $\overrightarrow{A'B'}\binom{1}{-4}$ $\overrightarrow{A'C'}\binom{-6}{-11}$

a) Montrons que f est bijective.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

$\det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -4 & -11 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$

L'image par f du repère (A, B, C) est le repère (A', B', C') donc f est bijective.

b) Déterminons l'expression analytique de f.

Soit φ l'application linéaire associée à f. Avec $f(A)=A'$, $f(B)=B'$ et $f(C)=C'$

on a :

$\begin{cases} \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} \\ \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{j} \\ -4\varphi(\vec{i}) - \varphi(\vec{j}) = -6\vec{i} - 11\vec{j} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(\vec{i}) = \vec{i} + 3\vec{j} \\ \varphi(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j} \end{cases}$ $M\binom{x}{y}$ $M'\binom{x'}{y'}$ $\overrightarrow{AM}\binom{x-2}{y}$ $\overrightarrow{A'M'}\binom{x'-3}{y'-10}$

$f(M) = M' \Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'} \Leftrightarrow$

$(x-2)\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j}) = (x'-3)\vec{i} + (y'-10)\vec{j}$

$(x-2)(\vec{i} + 3\vec{j}) + y(2\vec{i} - \vec{j}) = (x'-3)\vec{i} + (y'-10)\vec{j}$

$(x+2y-2)\vec{i} + (3x-y-6)\vec{j} = (x'-3)\vec{i} + (y'-10)\vec{j}$

$\begin{cases} x'-3 = x+2y-2 \\ y'-10 = 3x-y-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+2y+1 \\ y' = 3x-y+4 \end{cases}$

donc l'expression analytique de f est $\begin{cases} x' = x+2y+1 \\ y' = 3x-y+4 \end{cases}$

c) Déterminons (D') image par f de (D) $y = 2x+3$

$M(x,y) \in (D) \Leftrightarrow y = 2x+3$

$\begin{cases} x' = x+2(2x+3)+1 \\ y' = 3x-(2x+3)+4 \end{cases}$ $\begin{cases} x' = 5x+7 \\ y' = x+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = 5x+7 \\ -5y' = -5x-5 \end{cases} \Leftrightarrow x' - 5y' = 2$

d'où (D') est la droite d'equati[on] cartésienne $\boxed{x - 5y - 2 = 0}$

2° $g \begin{cases} x' = y+4 \\ y' = x-2 \end{cases}$

a) Montrons que g est bijective.

Le déterminant du système $\begin{cases} x' = 0x + y + 4 \\ y' = x + 0y - 2 \end{cases}$ est $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc l'application affine g est bijective.

b) Ecriture complexe de g.

$x' + iy' = y + 4 + i(x-2)$

$x' + iy' = i(x - iy) + 4 - 2i$

$z' = i\bar{z} + 4 - 2i$ donc l'écriture complexe de g est $\boxed{z' = i\bar{z} + 4 - 2i}$. Elle est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = |i| = 1$ donc g est un antidéplacement.

c) Points invariants par g.

$g(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+4 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-4 \\ y = x-2 \end{cases}$

$\Rightarrow x - 4 = x - 2 \Leftrightarrow 4 = 2$ absurde.

ainsi g n'admet pas de point invariant.

g est alors un antidéplacement sans point invariant et on en déduis que g est une symetrie glissée.

d) Eléments caracteristiques de g

$g(O) = O'$ avec $O\binom{0}{0}$ et $O'\binom{4}{-2}$

Soit I le milieu de $[OO']$ on a $I\binom{2}{-1}$

$I \in (\Delta)$ et $g(I) = I'$ avec $I'\binom{3}{0}$

L'axe (Δ) est la droite (II') de vecteur directeur $\overrightarrow{II'}\binom{1}{1}$ et d'equation cartesienne $x - y - 3 = 0$

Ainsi g est la symetrie glissée d'axe (Δ) $x - y - 3 = 0$ et de vecteur $\overrightarrow{II'}\binom{1}{1}$.

3° a) Déterminons l'ensemble (C) des points $M(z)$ tq $\left|(1+i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

on a : $\left|(1+i\sqrt{3})\left(z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2(1+i\sqrt{3})}\right)\right| = 1$

$\Leftrightarrow |1+i\sqrt{3}|\left|z + \frac{(3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{8}\right| = 1$

$\Leftrightarrow 2\left|z + \frac{6-2i\sqrt{3}}{8}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \left|z + \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \left|z - \left(-\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow MK = \frac{1}{2}$ avec $K\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow M \in \mathcal{E}(K; \frac{1}{2})$

ainsi l'ensemble (C) cherché est le cercle de centre $K\left(-\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

b) $h : z' = (1+i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

$z' = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

$z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

h est la similitude directe du plan de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe

$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3+i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Determinons l'antécédent E de O par h.

$h^{-1}(O) = E \Leftrightarrow O = h(E) \Leftrightarrow$

$(1+i\sqrt{3})z_E + \frac{3+i\sqrt{3}}{2} = 0 \Longleftrightarrow$

$(1+i\sqrt{3})z_E = -\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

$\Longleftrightarrow z_E = -\frac{3+i\sqrt{3}}{2(1+i\sqrt{3})} = -\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

L'antécédent de O par h est le point E d'affixe $-\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

Par ailleurs

$\left|(1+i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1$

$\Longleftrightarrow OM' = 1 \Leftrightarrow M' \in \mathcal{E}(O; 1)$

$\Leftrightarrow h(M) \in \mathcal{E}(O, 1) \Longleftrightarrow$

$M \in h^{-1}(\mathcal{E}(O; 1)) \Leftrightarrow$

$M \in \mathcal{E}(h^{-1}(O); \frac{1}{2}) \Leftrightarrow$

$M \in \mathcal{E}(E; \frac{1}{2}) = (C)$ car

h^{-1} est la similitude directe de centre Ω, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$; de plus $h^{-1}(O) = E$ et $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

A

Problème

S

Etude de la fonction f

1°) a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) Sur $\mathbb{R}$; $2-\ln(1+e^{-x}) = 2-\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right) = 2-\left(\ln(1+e^{x})-\ln e^{x}\right) = x+2-\ln(1+e^{x}) = f(x)$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2-\ln(1+e^{-x}) = 2$.

La droite d'équation $y=2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-(x+2)] = \lim_{x\to-\infty} -\ln(1+e^{x}) = 0$.

Donc la droite D d'équation $y = x+2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$

d) Sur $\mathbb{R}$ on a $-\ln(1+e^{x}) \leq 0$ (car $1+e^{x} \geq 1$) alors $\mathcal{C}$ en dessous de D sur $\mathbb{R}$

2° a) Sur $\mathbb{R}$; $f'(x) = 1-\frac{e^{x}}{e^{x}+1} = \frac{1}{e^{x}+1}$.

a)

x	$-\infty$ α 0 $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $2-\ln 2$ ↗ 2

b) f est derivable et strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$; elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty, 2[$. Comme $0 \in]-\infty, 2[$, alors l'équation $f(x)=0$ admet bien une solution unique α telle que $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) * Valeur exacte de α.

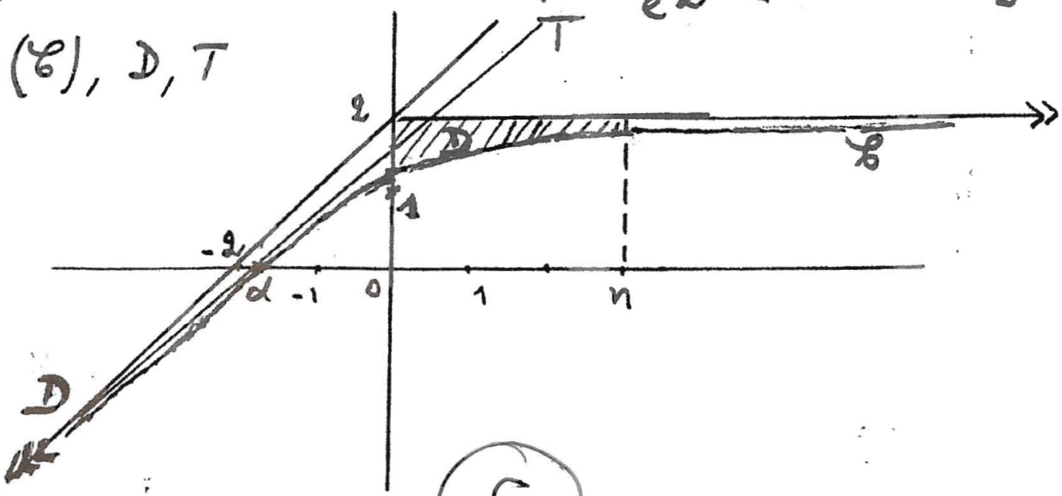
$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \ln(1+e^{-\alpha}) = 2 \Leftrightarrow 1+e^{-\alpha} = e^{2} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\ln(e^{2}-1)}$

** $\boxed{\alpha = -1{,}85}$

3°) a) Equation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse α.

T: $y = \frac{1}{e^{\alpha}+1}(x-\alpha)$ ou encore T: $y = \frac{e^{2}-1}{e^{2}}\left[x+\ln(e^{2}-1)\right]$

b) Construction de $(\mathcal{C})$, D, T



S

$\boxed{B}$

6

I) Etude d'une suite:

1°) Pour $n \geq 1$; $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{e^{n+1}+1} > 0 \Rightarrow (U_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

2°) Sur $\mathbb{R}$; $f''(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$: D'où f' décroissante sur $\mathbb{R}$

3°) D'après la question précédente, f' est décroissante sur $[a-1, a]$ et sur $[a; a+1]$.

Donc si $x \in [a-1, a]$ on a $f'(a) \leq f'(x) \leq f'(a-1)$

si $x \in [a; a+1]$ on a: $f'(a) \leq f'(x) \leq f'(a+1)$

Finalement. f dérivable sur $[a-1, a]$ ...., d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[a-1, a]$ et sur $[a; a+1]$ on a:

$$f'(a) \leq f(a) - f(a-1) \leq f'(a-1) \qquad (1)$$

$$f'(a+1) \leq f(a+1) - f(a) \leq f'(a) \qquad (2)$$

Des inégalités (1) et (2) on tire pour tout réel a:

$$\boxed{f(a+1) - f(a) \leq f'(a) \leq f(a) - f(a-1)}$$

4°) En remplaçant dans l'inégalité précédente a respectivement par $1, \dots, n$ on obtient:

$a=1 \qquad \cancel{f(2)} - f(1) \leq f'(1) \leq \cancel{f(1)} - f(0)$

$a=2 \qquad \cancel{f(3)} - \cancel{f(2)} \leq f'(2) \leq \cancel{f(2)} - \cancel{f(1)}$

$\vdots$

$a=n \qquad f(n+1) - \cancel{f(n)} \leq f'(n) \leq f(n) - \cancel{f(n-1)}$

En sommant membre à membre ces n inégalités on obtient:

pour $n \geq 1$: $\boxed{f(n+1) - f(1) \leq U_n \leq f(n) - f(0)}$ car $f'(1) + \dots + f'(n) = U_n$.

5°) a) D'après la question 1°) (U_n) est croissante et d'après la question précédente la suite (U_n) est majorée par ~~$f(n)$~~ $\lim(f(n) - f(0)) = \ln 2$

Finalement la suite (U_n) est convergente. (5)

b°) $\lim [f(n+1) - f(1)] \leq \lim U_n \leq \lim (f(n) - f(0)) \Rightarrow \boxed{\ln(1+e) - 1 \leq l \leq \ln 2}$

(6)

C Étude d'une fonction intégrale : (7)

1°) a) b) Si $x \geq \alpha$ on a $f(x) \geq f(\alpha) = 0$; donc si $\alpha \leq x$ alors $\int_\alpha^x f(t)\,dt \geq 0$

Dérivabilité de F

2°) a) Sur $[\alpha, +\infty[$ on a $F'(x) = f(x)$ avec $f(x) \geq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$.

b) Donc F strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$

3°) a) En étudiant sur $[0, +\infty[$ les fonctions $u : t \mapsto \ln(1+t) - t$ et $v : t \mapsto t - \frac{t^2}{2} - \ln(1+t)$ on obtient les tableaux de variations suivants

t	0	$+\infty$
$u'(t)$	$-$	
$u(t)$	-1 ↘	

$\left(u'(t) = \frac{-t}{1+t} \right)$

t	0	$+\infty$
$v'(t)$	$-$	
$v(t)$	0 ↘	

$v'(t) = \frac{-t^2}{1+t}$

Comme $u(t)$ et $v(t)$ sont négatifs sur $[0, +\infty[$ alors on a bien pour $t \geq 0$: $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$

b) Dans l'inégalité précédente en remplaçant t par e^{-x} (car $e^{-x} > 0$) on obtient sur $\mathbb{R}$:

$$\ln(1+e^{-x}) \leq e^{-x}$$

$$-\ln(1+e^{-x}) \geq -e^{-x}$$

$$2 - \ln(1+e^{-x}) \geq 2 - e^{-x}$$

soit $$f(x) \geq 2 - \frac{1}{e^x}$$

4°) a) D'après l'inégalité précédente : $\int_\alpha^x f(t)\,dt \geq \int_\alpha^x (2 - e^{-t})\,dt$

$$F(x) \geq [2t + e^{-t}]_\alpha^x$$

$$F(x) \geq \left(2x - \frac{1}{e^\alpha}\right) + \left(e^{-x} - 2\alpha\right)$$

$$F(x) \geq \left(2x - \frac{1}{e^x}\right) + \left(e^{-x} + 2\ln(e^2 - 1)\right)$$

Donc si $x \geq \alpha$ on a $F(x) \geq 2x - \frac{1}{e^\alpha}$ (car $e^{-x} + 2\ln(e^2-1) > 0$)

8

b) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \frac{1}{e^{\alpha}}\right) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

5°) Tableau de variation de f:

x	α	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	
$F(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

Partie D

IV) Etude d'une suite intégrale:

1°) $V_n = \int_0^n \ln(1+e^{-t})dt = \int_0^n [2 - f(t)]dt.$

a) $t \mapsto 2 - f(t)$ continue sur $[0;n]$ et V_n est bien définie.
b) $1+e^{-t} \geq 1$ et $\ln(1+e^{-t}) \geq 0$ et $V_n \geq 0$

Comme sur $[0,+\infty[$ on a $2 \geq f(t)$ alors pour $n \geq 1$; V_n représente en ~~unité~~ cm^2; l'aire du domaine D limité par l'asymptote d'équation $y = 2$; la courbe $\mathcal{C}$, les droites d'équation $x=0$ et $x=n$.

2°) a) Croissance de la suite $(V_n)_{n \geq 1}$

Pour $n \geq 1$; $V_{n+1} - V_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-t})dt \geq 0$ car $\ln(1+e^{-t}) \geq 0$.

D'où la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est croissante

b) Dans les inégalités de la question III-3-a) en remplaçant t par $e^{-x} > 0$ on obtient

$$e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq \ln(1+e^{-x}) \leq e^{-x}$$

D'où $$\int_0^n \left(e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2}\right)dx \leq V_n \leq \int_0^n e^{-x}dx$$

Donc pour $n \geq 1$, on trouve $\left[-e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^n \leq V_n \leq \left[-e^{-x}\right]_0^n$

Finalement pour $n \geq 1$: $\boxed{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-n}(e^{-n} - 4) \leq V_n \leq 1 - e^{-n}}$ ≤ 1 car $e^{-n} > 0$

c) La suite (V_n) étant croissante et majorée par 1 alors elle est convergente

d°) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$ alors on a bien $\frac{3}{4} \leq l \leq 1$

8