D8

BAC BLANC 2003

Série C **Durée : 4 H**
Coéf :5

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 **(5 points)**

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .
On imagine n sacs de jetons S_1 , . . . , S_n .
Au départ , le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jetons blancs , et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc .
On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs , effectués de la façon suivante :
- Première étape : on tire au hasard 1 jeton de S_1 .
- Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2 et on tire , au hasard , un jeton de S_2 .
- Troisième étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2 , on tire au hasard , un jeton de S_3 . . . . et ainsi de suite . . .

S_1 S_2 S_3

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note Ek l'événement : « le jeton sorti de S_k est blanc »
et $\overline{E_k}$ l'événement contraire .

1°) **a)** Déterminer la probabilité de E_1 , notée $P(E_1)$ et les probabilités conditionnelles :
$P(E_2 / E_1)$ et $P(E_2 / \overline{E_1})$.
En déduire la probabilité de E_2 , notée $P(E_2)$.
b) Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de E_k est notée P_k .
Justifier la relation de récurrence suivante : $P_{k+1} = \frac{1}{3} P_k + \frac{1}{3}$.

2°) Etude d'une suite (U_k) :

$k \geq 1$

On note (U_k) la suite définie par $U_1 = \frac{1}{3}$ et pour tout $k \geq$ $U_{k+1} = \frac{1}{3} U_k + \frac{1}{3}$.

a) On considère la suite (V_k) définie par , pou tout élément k de IN* , $V_k = U_k - \frac{1}{2}$.
Démontrer que (V_k) est une suite géométrique .
b) En déduire l'expression de U_k en fonction de k . Montrer que la suite (U_k) est convergence et préciser sa limite .

3°) Dans cette question , on suppose que n = 10 .
Déterminer pour quelles valeurs de k on a : $0{,}4999 \leq P_k \leq 0{,}5$.

EXERCICE 2 **(5 points)**

1°) Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis appliquée à l'intervalle [k , k + 1] ($k \in$ IN*) que :
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} .$$

2°) On note U la suite définie sur IN* par : $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ . \ . \ . + \frac{1}{n}$.

Utiliser 1°) pour montrer que : $\forall n \in$ IN* , $U_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq U_n$.

3°) A l'aide de 2°) démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln U_n}{U_n}$

4°) On pose , pour $n \in$ IN* , $V_n = U_n - \ln n$.
Démontrer que la suite V est décroissante , puis qu'elle est convergente .

5°) Montrer que $\forall k \in$ IN* : $\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{u}{k(k+u)} du$ (écrire $\frac{u}{k(k+u)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+u}$) .

En déduire que : $\forall n \in$ IN* , $V_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{u}{k(k+u)} du + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

6°) A l'aide de 5°) montrer que : $\forall n \in$ IN* , $V_n \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)$.

(minorer chaque intégrale en remarquant que $\forall u \in [\,0\,;\,1\,]$, $\frac{u}{k(k+1)} \leq \frac{u}{k(k+u)}$) .

7°) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (remarquer que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$).

En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n \geq \frac{1}{2}$.

PROBLEME **(10 points)**

Sauf pour les notations , les trois parties du problèmes sont indépendantes .
P est un plan orienté muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$; $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ; i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Les affixes des points de P étant toujours données par rapport au repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, f et g sont les deux applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définies , $\forall z \in \mathbb{C}$, par :

$$\begin{cases} f(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i \\ g(z) = z^3 + 2 - 2i \end{cases}$$

Partie I

1°) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z vérifiant $g(z) = 0$.
Représenter les points dont les affixes sont les nombres trouvés et démontrer que ces points forment un triangle équilatéral .

2°) Démontrer qu'il existe un et un seul réel r , que l'on déterminera , qui vérifie $f(r) = 0$.
Déterminer les deux nombres complexes a et b de façons à avoir : $f(z) = (z - r)(z^2 + az + b)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

3°) Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = 0$.
Démontrer que les points dont les affixes sont les solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan P .

4°) A , B , C sont les points de P dont les affixes respectives sont : $-1 + 3i$, $1 + i$, -4 .
Déterminer l'affixe du barycentre G des points A , B , C affectés respectivement des coefficient 4 , 3 , 5 .

5°) On désigne par h l'application de P vers IR qui à tout point M de P associe le réel :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$.

Calculer h (C) . Exprimer h(M) en fonction de $\|\overrightarrow{MG}\|^2$ et h(G) . Déterminer et dessiner l'ensemble des points M de P qui vérifient $h(M) = 18$.

Partie II

A tout point M de P d'affixe z on associe le point M' de P d'affixe $f(z) - g(z)$.

1°) Déterminer les coordonnées (x' , y') de M' dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ en fonction des coordonnées (x , y) de M dans le même repère .

2°) A , B , C sont des points définis au I – 4°) . Donner une équation de l'ensemble (H_1) des points M de P tels que O , B et M' soient alignés . Démontrer que (H_1) est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes .

3°) Donner une équation de l'ensemble (H_2) des points M de P tels que O , I et M' soient alignés , I étant le centre de gravité de A , B , C . Démontrer que (H_2) est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes : on pourra , par exemple , donner une équation de (H_2) sous la forme $y = \varphi(x)$.

4°) Démontrer qu'un point M est commun à (H_1) et (H_2) si et seulement si , M' est confondu avec O .
Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = g(z)$.
En déduire les points communs à (H_1) et (H_2). Construire (H_1) et (H_2) dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Partie III

Un mobile du plan P a son affixe $z(t)$ donnée , en fonction du temps t , par : $z(t) = f(it) + 10 - 6i$,
quand t décrit l'intervalle [0 ; 2] de IR . On notera M(t) le point correspondant à l'instant t .

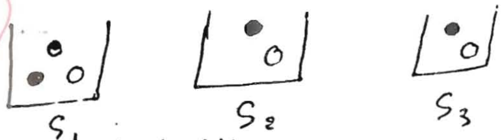
1°) Déterminer les coordonnées (x(t), y(t)) de M(t) dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, ainsi que les coordonnées dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ du vecteur vitesse du mobile à l'instant t .

2°) Faire un tableau indiquant les variations de x et de y en fonction de t .

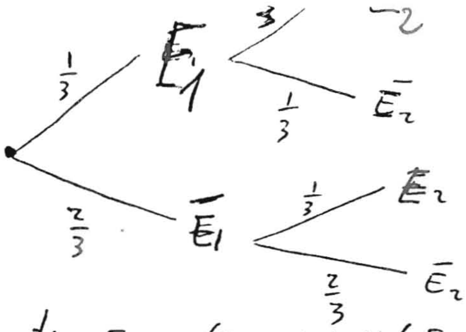
3°) Construire les points de la trajectoire du mobile correspondant aux valeurs : 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1 , $\frac{7}{4}$, 2 du réel t et un vecteur directeur des tangentes à la trajectoire pour les valeurs : 0 , $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{4}$, 2 .

Tracer la trajectoire pour $t \in [0\,;2]$.

EXERCICE 1 (4)



Bai blanc



1- a. Voir l'arbre de probabilité :

0,25

$P(E_1) = \frac{1}{3}$ $\quad P(E_2 | E_1) = \frac{2}{3}$ 0,25

$P(\bar{E}_1) = \frac{2}{3}$ $\quad P(E_2 | \bar{E}_1) = \frac{1}{3}$ 0,25

E_1 et $\bar{E}_1$ forment un système complet d'événements $E_2 = (E_2 \cap E_1) \cup (E_2 \cap \bar{E}_1)$

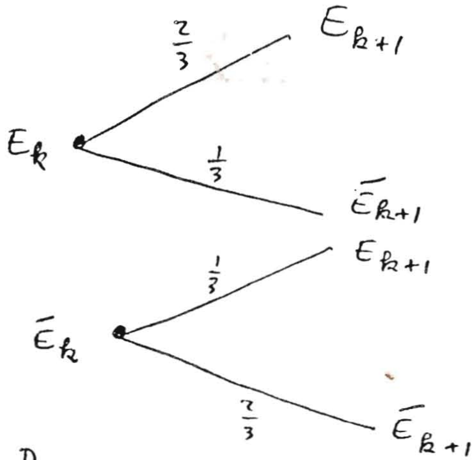
D'après la formule des probabilités totales on a :

$P(E_2) = P(E_2 \cap E_1) + P(E_2 \cap \bar{E}_1)$

$= P(E_2|E_1) \times P(E_1) + P(E_2|\bar{E}_1) \times P(\bar{E}_1)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

$\boxed{P(E_2) = \frac{4}{9}}$ 0,5



b) $1 \leq k \leq n$ $\quad P_k = P(E_k)$

E_k et $\bar{E}_k$ forment un système complet d'événements.

$E_{k+1} = (E_{k+1} \cap E_k) \cap (E_{k+1} \cap \bar{E}_k)$

$P(E_{k+1} \cap E_k) = P(E_{k+1} | E_k) \times P(E_k) = \frac{2}{3} P_k$

$P(E_{k+1} | \bar{E}_k) = P(E_{k+1} | \bar{E}_k) \times P(\bar{E}_k) = \frac{1}{3} P(\bar{E}_k) = \frac{1}{3}(1 - P_k)$

$P_{k+1} = P(E_{k+1}) = \frac{2}{3} P_k + \frac{1}{3}(1 - P_k) = \frac{2}{3} P_k - \frac{1}{3} P_k + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} P_k + \frac{1}{3}$

d'où la relation de recurrence $\boxed{P_{k+1} = \frac{1}{3} P_k + \frac{1}{3}}$ 0,75 avec $1 \leq k \leq n$

2°) $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{k+1} = \frac{1}{3} u_k + \frac{1}{3} \end{cases}$ et $v_k = u_k - \frac{1}{2}$ $\quad v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

a) Démontrons que (v_k) est une suite géométrique $v_1 = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$

$v_{k+1} = u_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} u_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} u_k - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}(u_k - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3} v_k$ 0,5

d'où (v_k) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = -\frac{1}{6}$ 0,25

b) $v_k = v_1 q^{k-1} = (-\frac{1}{6})(\frac{1}{3})^{k-1} = (-\frac{1}{6})(\frac{1}{3})^{-1} \times (\frac{1}{3})^k = -\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^k$ 0,25

$u_k = v_k + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{3})^k)$ 0,25 $\quad 0 < \frac{1}{3} < 1$

$\lim_{k \to +\infty} (\frac{1}{3})^k = 0$ donc $\lim_{k \to +\infty} u_k = \frac{1}{2}$ 0,25

3°) $n = 10$ $\quad P_k = u_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^k$ avec $1 \leq k \leq 10$ 0,5

$0,4999 \leq P_k \leq 0,5 \Rightarrow 0,4999 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^k \leq 0,5 \Rightarrow 0 \leq (\frac{1}{3})^k \leq 2 \times 10^{-4}$

$k \geq -\frac{\ln 0,0002}{\ln 3}$ $\quad k \geq 7,75$ avec $1 \leq k \leq 10$ on a $\boxed{k \in \{8; 9; 10\}}$

Exercice 2 (5) 1° Mq $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

l'inégalité des accroissements finis.

Considerons la fonction $f(t) = \ln t$ avec $t > 0$.
f est derivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(t) = \frac{1}{t}$ de plus $\forall t \in [k, k+1]$
$k < t < k+1$ et $k > 0$ donne $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ donc d'après l'inég.
0,75 des accroissements finis appliqués à $[k; k+1]$ avec $k \leq k+1$ on a
$\frac{1}{k+1}(k+1-k) \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{k}(k+1-k)$ or $f(k+1) = \ln(k+1)$
$f(k) = \ln(k)$
donc $\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*}$

2°) Soit u la suite definie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

Mq $u_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$.

d'après 1°... pour $k = 1$ $\quad \frac{1}{2} \leq \ln 2 - \ln 1 \leq 1$

$k = 2$ $\quad \frac{1}{3} \leq \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$

$\vdots$

0,5 $\quad k = n$ $\quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$

Par addition membre à membre de ces n inégalités et après simplification on a : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

or $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} - 1$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n}$

3°) Determinons $\lim_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{u_n}$

0,25 • D'après 2° $u_n \geq \ln(n+1)$ or $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

• $u_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n \Rightarrow 1 + \frac{1}{(n+1)u_n} - \frac{1}{u_n} \leq \frac{\ln(n+1)}{u_n} \leq 1$

car $u_n > 0$

or $\lim (n+1)u_n = +\infty$; $\lim \frac{1}{(n+1)u_n} = 0$; $\lim \frac{1}{u_n} = 0$ donc par encadrement $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{u_n} = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \times \frac{\ln(n+1)}{U_n} \right) = 1 \text{ car}$$ (2

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}}$$

0,5

$= 1$ puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 0$

$\lim_{+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{+\infty} \ln n = +\infty$

d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{U_n} = 1}$

4°) $V_n = U_n - \ln n$, $n \in \mathbb{N}^*$ Mq V est decroissante.

$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - \ln(n+1) - U_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n)$

or d'après 1° $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n)$ donc

$V_{n+1} - V_n \leq 0$ et $V_{n+1} \leq V_n$ et la suite (V_n) est decroissante. 0,25

D'après 2°) $U_n \geq \ln(n+1) \geq \ln n$ donc $V_n \geq 0$. 0,25

La suite (V_n) est decroissante et minorée par 0 donc

0,25 elle converge.

5°) Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{u}{k(k+u)} du$.

$\forall u \in [0;1]$ $\frac{u}{k(k+u)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+u}$ donc

$$\int_0^1 \frac{u}{k(k+u)} du = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+u}\right) du = \left[\frac{1}{k}u - \ln(k+u)\right]_0^1 =$$

0,5 $$= \frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln k) = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$

d'où $\boxed{\int_0^1 \frac{u}{k(k+u)} du = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}}$.

Déduisons de 5° que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{u}{k(k+u)}\,du + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (5

avec $v_n = u_n - \ln n$ et $\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} + \int_0^1 \frac{u}{k(k+u)}\,du$

$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ on a : $\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} + \int_0^1 \frac{u}{k(k+u)}\,du$

et $v_n = u_n - \ln n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 \frac{u}{k(k+u)}\,du + \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}\right) - \ln n$$

0,5

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{u}{k(k+u)}\,du + \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} - \ln n$$

or d'après la relation de Chasles $\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1)$

donc $v_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{u}{k(k+u)}\,du + \ln(n+1) - \ln n$

$$\boxed{v_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{u}{k(k+u)}\,du + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \forall n \geq 1}$$ car $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

6°) A l'aide de 5°) montrons que $\forall n \geq 1$ $\quad v_n \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)$

$\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$ donc $v_n \geq \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{u}{k(k+u)}\,du$

$\forall u \in [0;1]$ $\quad u \leq 1 \Rightarrow k+u \leq k+1 \Rightarrow k(k+u) \leq k(k+1) \Rightarrow \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k(k+u)}$

$\forall k \geq 1$

et alors $\frac{u}{k(k+1)} \leq \frac{u}{k(k+u)}$ Ainsi $\int_0^1 \frac{u}{k(k+u)}\,du \geq \int_0^1 \frac{u}{k(k+1)}\,du$

1,5 $v_n \geq \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{u}{k(k+u)}\,du \geq \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{u}{k(k+1)}\,du$ donc $v_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$

et alors $\boxed{v_n \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}}$ car $\frac{1}{k(k+1)}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{k(k+1)}$

7°) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

0,1

car $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

avec $v_n \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\lim \sum \frac{1}{k(k+1)} = 1$ et (v_n) convergente

0,25 on a : $\boxed{\lim v_n \geq \frac{1}{2}}$

Problème (11)

I 1° Déterminons le module et un argument de chacun des nombres complexes z tq $g(z) = 0$ avec $g(z) = z^3 + 2 - 2i$.

$g(z) = 0 \iff z^3 = -2 + 2i \iff z^3 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

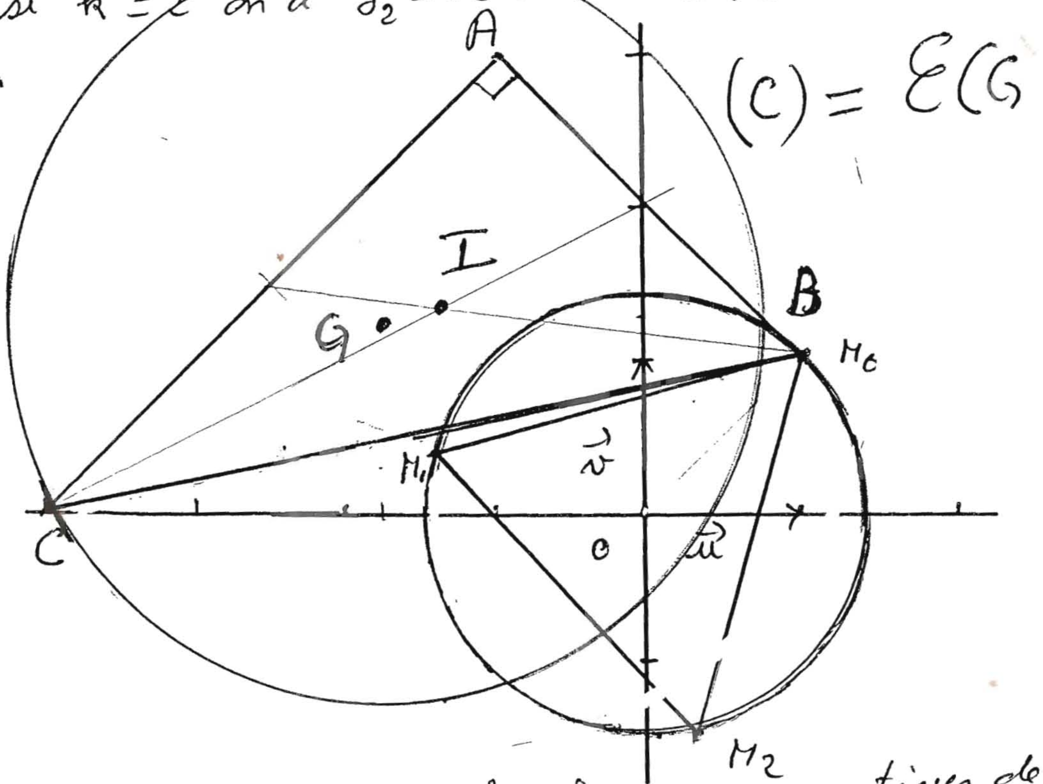
Les solutions sont de la forme $z_k = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k \in \{0; 1; 2\}$

0,5

si $k = 0$ on a $z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $|z_0| = \sqrt{2}$ et $\arg z_0 = \frac{\pi}{4}$

si $k = 1$ on a $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $|z_1| = \sqrt{2}$; $\arg z_1 = \frac{11\pi}{12}$

si $k = 2$ on a $z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{19\pi}{12}} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ et $|z_2| = \sqrt{2}$; $\arg z_2 = -\frac{5\pi}{12}$



$(C) = \mathcal{E}CG$

M_0, M_1 et M_2 sont les images respectives de z_0 ; z_1 et z_2.

Montrons que le triangle $M_0M_1M_2$ est équilatéral.

Il suffit de montrer que $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} - \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} - \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1\right)}{e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right)} = \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1}$$

$$= \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1\right)}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1} = e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} + 1$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ donc}$$

$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ Ainsi on a $M_0M_1 = M_0M_2$ et $(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}) = \frac{\pi}{3}$ et le triangle $M_0M_1M_2$ est équilatéral (de sens direct)

2°) • Determinons un réel r tel que $f(r)=0$ avec

$f(z)=z^3+4(1-i)z^2-2(2+7i)z-16+8i$

$f(r)=0 \iff r^3+4(1-i)r^2-2(2+7i)r-16+8i=0$

$\iff r^3+4r^2-4r-16+i(-4r^2-14r+8)=0$

$\iff \begin{cases} r^3+4r^2-4r-16=0 \\ -4r^2-14r+8=0 \end{cases} \iff \begin{cases} r^3+4r^2-4r-16=0 & (1) \\ 2r^2+7r-4=0 & (2) \end{cases}$

avec (2) $2r^2+7r-4=0$ $\Delta=81>0$ $r_1=\frac{-7-9}{4}=\frac{-16}{4}=-4$

$r_2=\frac{-7+9}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

avec (1) et $r_1=\frac{1}{2}$ on a $(+\frac{1}{2})^3+4(+\frac{1}{2})^2-4(+\frac{1}{2})-16= \quad \neq 0$

$r_2=-4$ on a $(-4)^3+4(-4)^2-4(-4)-16=-64+64+16-16=0$

r_1 ne vérifie pas et $r_2=-4$ vérifie donc $\boxed{r=-4}$ est l'unique solution réelle de $f(z)=0$.

• Determinons a et b tq $f(z)=(z+4)(z^2+az+b)$

<u>Methode de Hörner</u>

	1	$4-4i$	$-4-14i$	$-16+8i$
-4	//////	-4	$16i$	$+16-8i$
	1	$-4i$	$-4+2i$	0

$a=-4i$ $b=-4+2i$ et

$f(z)=(z+4)(z^2-4iz-4+2i)$

3°. Resolvons l'équation $f(z)=0$

$z+4=0$ ou $z^2-4iz-4+2i=0$

$z=-4$ $\Delta=(-4i)^2-4(-4+2i)=-16+16-8i=-8i$

Soit $\delta=x+iy$ tq $\delta^2=\Delta$ on a $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2+y^2=8 \\ 2xy=-8 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=0 & (1) \\ x^2+y^2=8 & (2) \\ xy<0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$$
$2x^2 = 8$

$x^2=4$ et $x=2$ ou -2

$$\begin{cases} -x^2+y^2=0 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$$
$2y^2=8$

$y^2=4$ $y=2$ ou -2

$xy<0$ donc x et y sont de signes contraires

$\delta = 2-2i$ ou $\delta' = -2+2i$

avec $\delta = 2-2i$ on a $z_2 = \frac{4i-2+2i}{2}$; $z_3 = \frac{4i+2-2i}{2}$

$z_2 = -1+3i$ $\quad z_3 = 1+i$

d'où $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{z_1=-4;\ z_2=-1+3i\ ;\ z_3=1+i\}}$

- Montrons que le triangle ABC est rectangle en A où A, B, C sont les images de $z_2=-1+3i$; $z_3=1+i$ et $z_1=-4$

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{-4-(-1+3i)}{1+i-(-1+3i)} = \frac{-4+1-3i}{1+i+1-3i} = \frac{-3-3i}{2-2i} = -\frac{3}{2}\,\frac{1+i}{1-i} =$$

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = -\frac{3}{2}\,\frac{i\,(1-i)}{1-i} = -\frac{3}{2}i \quad \text{et } \arg\left(-\frac{3}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi].$$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ donc le triangle ABC est rectangle en A.

4) A, B et C sont les points d'affixes $-1+3i$; $1+i$ et -4.

Determinons l'affixe de $G = \text{bar}\{(A;4);(B;3);(C;5)\}$

$$z_G = \frac{4z_A+3z_B+5z_C}{4+3+5} = \frac{4(-1+3i)+3(1+i)+5(-4)}{12}$$

$$z_G = \frac{-4+12i+3+3i-20}{12} = \frac{-21+15i}{12} = -\frac{21}{12}+\frac{15}{12}i$$

$$\boxed{z_G = \frac{-7}{4}+\frac{5}{4}i}$$

5°) $h : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(M) = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$

$h(C) = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} + 2\,\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CC} + 3\overrightarrow{CC}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 3\times5+3\times1 = 18$

car $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$. $\boxed{h(C)=18}$

Exprimons $h(M)$ en fonction de MG^2 et de $h(G)$. (4

$$h(M) = \vec{MA}\cdot\vec{MB} + 2\vec{MB}\cdot\vec{MC} + 3\vec{MC}\cdot\vec{MA}$$
$$= (\vec{MG}+\vec{GA})\cdot(\vec{MG}+\vec{GB}) + 2(\vec{MG}+\vec{GB})\cdot(\vec{MG}+\vec{GC}) + 3(\vec{MG}+\vec{GC})\cdot(\vec{MG}+\vec{GA})$$
$$= 6MG^2 + \vec{MG}(3\vec{GB}+4\vec{GA}+5\vec{GC}) + \vec{GA}\cdot\vec{GB} + 2\vec{GB}\cdot\vec{GC} + 3\vec{GC}\cdot\vec{GA}$$
$= 6MG^2 + h(G)$ car $3\vec{GB}+4\vec{GA}+5\vec{GC}=\vec{0}$ avec $G = \text{bar}\{(A;4);(B;3);(C;5)\}$.

$$h(G) = \vec{GA}\cdot\vec{GB} + 2\vec{GB}\cdot\vec{GC} + 3\vec{GC}\cdot\vec{GA}$$

donc $\boxed{h(M) = 6MG^2 + h(G)}$

$G\begin{pmatrix}-\frac{7}{4}\\ \frac{5}{4}\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$

$\vec{GA}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{7}{4}\end{pmatrix}$ $\vec{GB}\begin{pmatrix}\frac{11}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ $\vec{GC}\begin{pmatrix}-\frac{9}{4}\\ -\frac{5}{4}\end{pmatrix}$

$$\vec{GA}\cdot\vec{GB} = \frac{33}{16} - \frac{7}{16} = \frac{26}{16} = \frac{13}{8}$$
$$2\vec{GB}\cdot\vec{GC} = 2\left(-\frac{99}{16}+\frac{5}{16}\right) = -\frac{94}{8}$$
$$3\vec{GC}\cdot\vec{GA} = 3\left(-\frac{27}{16}-\frac{35}{16}\right) = -\frac{93}{8}$$

$$h(G) = \frac{13}{8} - \frac{94}{8} - \frac{93}{8} = -\frac{174}{8} = -\frac{87}{4}$$

$$h(M) = 6MG^2 - \frac{87}{4} = 18 \Leftrightarrow 6MG^2 = 18 + \frac{87}{4} = \frac{159}{4}$$

$$MG^2 = \frac{159}{6\times4} = \frac{53}{8} \Longleftrightarrow M \in \mathscr{C}\left(G;\sqrt{\frac{53}{8}}\right)$$

Comme le point C vérifie $h(C) = 18$, le point C appartient à cet ensemble qui est le cercle de de centre G passant par C. Appelons (C) cet ensemble on a

$$\boxed{\begin{gathered}(C) = \mathscr{C}\left(G;\sqrt{\frac{53}{8}}\right)\\ (C) = \mathscr{C}(G;\,GC)\end{gathered}}$$

II $M(z) \longmapsto M'(z')$ avec $z' = f(z) - g(z)$.

$$f(z) - g(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i - z^3 - 2 + 2i$$

$$f(z) - g(z) = 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 18 + 10i$$

1°) Déterminons les coordonnées de $M'(x', y')$ en fonction de celles de $M(x, y)$.

$$z' = x' + iy' = 4(1-i)(x+iy)^2 - 2(2+7i)(x+iy) - 18 + 10i$$

$$z' = x' + iy' = (4-4i)(x^2 - y^2 + 2ixy) - (4+14i)(x+iy) - 18 + 10i$$

$$= 4x^2 - 4y^2 + 8ixy - 4ix^2 + 4iy^2 + 8xy - 4x - 4iy - 14ix + 14y - 18 + 10i$$

$$z' = x' + iy' = -18 + 4x^2 - 4y^2 + 8xy - 4x + 14y + i(8xy - 4x^2 + 4y^2 - 4y - 14x + 10)$$

donc $\boxed{\begin{cases} x' = 4x^2 - 4y^2 + 8xy - 4x + 14y - 18 \\ y' = 8xy - 4x^2 + 4y^2 - 4y - 14x + 10 \end{cases}}$

2°) Déterminons une équation de l'ensemble (H_1) des points M tels que O, B et M' soient alignés. $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

O, B et M' alignés $\iff \det(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM'}) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & x' \\ 1 & y' \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff y' - x' = 0$$

$$\iff \cancel{8xy} - 4x^2 + 4y^2 - 4y - 14x + 10 - 4x^2 + 4y^2 - \cancel{8xy} + 4x - 14y + 18 = 0$$

$$\iff -8x^2 + 8y^2 - 18y - 10x + 28 = 0$$

$$\iff -4x^2 + 4y^2 - 9y - 5x + 14 = 0$$

$$\boxed{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (H_1) \iff -4x^2 + 4y^2 - 9y - 5x + 14 = 0}$$

Rq $-4x^2 + 4y^2 - 9y - 5x + 14 = 0 \iff x^2 - y^2 + \frac{9}{4}y + \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} = 0$

Demontrons que (H_1) est une hyperbole et precisons le centre et les asymptôtes.

(H_1) : $x^2-y^2+\frac{9}{4}y+\frac{5}{4}x-\frac{7}{2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{5}{4}x\right)-\left(y^2-\frac{9}{4}y\right)-\frac{7}{2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{8}\right)^2-\frac{25}{64}-\left[\left(y-\frac{9}{8}\right)^2-\frac{81}{64}\right]-\frac{7}{2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{8}\right)^2-\left(y-\frac{9}{8}\right)^2-\frac{25}{64}+\frac{81}{64}-\frac{224}{64}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{8}\right)^2-\left(y-\frac{9}{8}\right)^2=\frac{21}{8}$

$M(x,y)\in(H_1) \Longleftrightarrow \dfrac{\left(x+\frac{5}{8}\right)^2}{\frac{21}{8}}-\dfrac{\left(y-\frac{9}{8}\right)^2}{\frac{21}{8}}=1$

$M(x,y)\in(H_1) \Leftrightarrow \dfrac{\left(x+\frac{5}{8}\right)^2}{\sqrt{\frac{21}{8}}^2}-\dfrac{\left(y-\frac{9}{8}\right)^2}{\sqrt{\frac{21}{8}}^2}=1$ Soit $\Omega\begin{pmatrix}-\frac{5}{8}\\ \frac{9}{8}\end{pmatrix}$ et

$M(X,Y)$ dans le repere $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ on a $\begin{cases}X=x+\frac{5}{8}\\ Y=y-\frac{9}{8}\end{cases}$ et $\begin{cases}x=X-\frac{5}{8}\\ y=Y+\frac{9}{8}\end{cases}$

$M\binom{X}{Y}\in(H_1) \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{\sqrt{\frac{21}{8}}^2}-\dfrac{Y^2}{\sqrt{\frac{21}{8}}^2}=1$ donc (H_1) est une hyperbole de centre $\Omega_1\left(-\frac{5}{8};\frac{9}{8}\right)$ et d'asymptotes les droites d'equations $Y=X$ et $Y=-X$ dans le repere $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ (et d'équations dans $(O,\vec{i},\vec{j})$: $y=x+\frac{7}{4}$ et $y=-x+\frac{1}{2}$)

Rq $a=b=\sqrt{\frac{21}{8}}$ donc (H_1) est une hyperbole equilatère d'axe focal $(\Omega,\vec{i})$ et $e=\sqrt{2}$

3°) Donner une equation de l'ensemble (H_2) des points M tels que O, I et M' soient alignes où I est le centre de gravité de ABC.

$z_I=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{-1+3i+1+i-4}{3}=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}i$

$O\,I\,M'$ alignés $\Leftrightarrow \det(\vec{OI},\vec{OM'})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-\frac{4}{3} & x'\\ \frac{4}{3} & y'\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}y'-\frac{4}{3}x'=0$

$\Leftrightarrow y'+x'=0 \Leftrightarrow 16xy+10y-18x-8=0$

$\Leftrightarrow 8xy+5y-9x-4=0$

$\Leftrightarrow y(8x+5)=9x+4 \Leftrightarrow y=\dfrac{9x+4}{8x+5}$ $\left(\forall x\neq-\frac{5}{8}\right)$

(H_2) admet une équation de la forme $y=\dfrac{9x+4}{8x+5}$ (fonction homographique) donc (H_2) est une hyperbole de centre $\Omega_2\left(-\frac{5}{8};\frac{9}{8}\right)$ et d'asymptôtes les droites d'equations $x=-\frac{5}{8}$ et $y=\frac{9}{8}$.

$(H_1)\cap(H_2) \iff O\,B\,M'$ alignes et $O\,I\,M$ alignes

$\iff M' \in (OB)$ et $M' \in (OI) \iff M' \in (OB)\cap(OI) = \{O\}$

$\iff M' = O$. Ainsi M commun à $(H_1)\cap(H_2) \iff M' = O$

- Resolvons l'equation $f(z) = g(z) \iff f(z) - g(z) = 0$

$\iff 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 18 + 10i = 0 \iff 2(1-i)z^2 - (2+7i)z - 9 + 5i = 0$

$\Delta = -13 - 84i$, Soit $\delta = x + iy$ tq $\delta^2 = \Delta$ on a $\begin{cases} x^2 - y^2 = -13 \\ x^2 + y^2 = 85 \\ 2xy = -84 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = -13 \\ x^2 + y^2 = 85 \end{cases}$; $2x^2 = 72$; $x^2 = 36$; $x = 6$ ou -6

$\begin{cases} -x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 + y^2 = 85 \end{cases}$; $2y^2 = 98$; $y^2 = 49$; $y = 7$ ou -7

$xy < 0$ donc $\delta = 6 - 7i$ ou $\delta' = -6 + 7i$

$\boxed{z_1 = \frac{-9}{4} + \frac{5}{4}i \text{ et } z_2 = 1 + i}$

$S = \{z_1 = -\frac{9}{4} + \frac{5}{4}i \,;\, z_2 = 1 + i\}$

$M \in (H_1)\cap(H_2) \iff M' = O \iff x' = 0$ et $y' = 0 \iff f(z) = g(z)$ donc

$(H_1)\cap(H_2) = \{M_1(-\frac{9}{4} ; \frac{5}{4}) ; M_2(1 ; 1)\}$

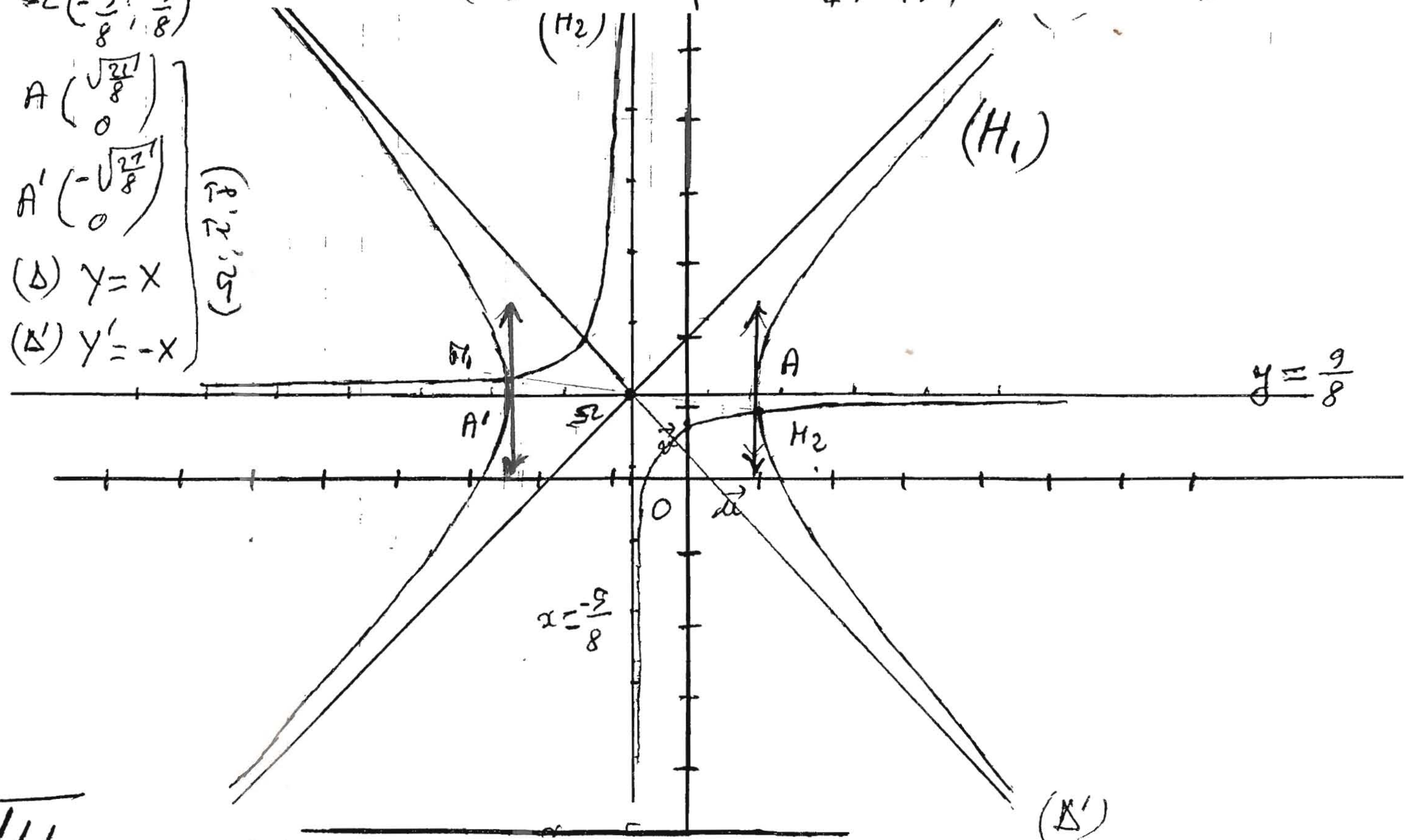
$\Omega(-\frac{5}{8} ; \frac{9}{8})$

$A\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{27}{8}} \\ 0 \end{pmatrix}$

$A'\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{27}{8}} \\ 0 \end{pmatrix}$

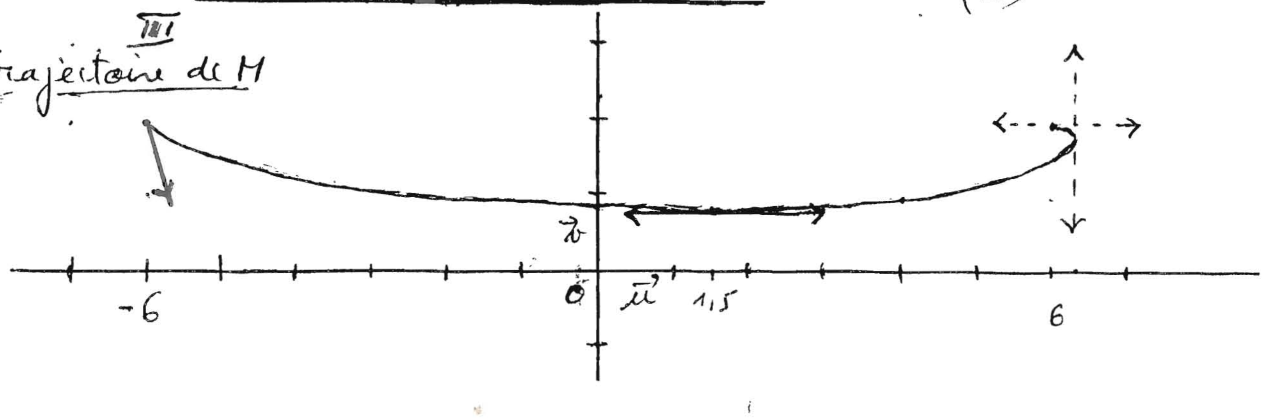
$(\Delta)\ Y = X$

$(\Delta')\ Y' = -X$



III

Trajectoire de M



1) $z(t) = f(it) + 10 - 6i \qquad t \in [0;2]$

$z(t) = (it)^3 + 4(1-i)(it)^2 - 2(2+7i)\,it) - 16 + 8i + 10 - 6i$

$z(t) = -it^3 + 4(1-i)(-t^2) - 4it + 14t - 16 + 8i + 10 - 6i$

$z(t) = -it^3 - 4t^2 + 4it^2 - 4it + 14t - 6 + 2i$

$z(t) = -4t^2 + 14t - 6 + i(-t^3 + 4t^2 - 4t + 2)$

donc $\begin{cases} x(t) = -4t^2 + 14t - 6 \\ y(t) = -t^3 + 4t^2 - 4t + 2 \end{cases}$ 0,25 et $\vec{v}\begin{cases} x'(t) = -8t + 14 \\ y'(t) = -3t^2 + 8t - 4 \end{cases}$ 0,25

2° $x'(t) = 0 \iff -8t + 14 = 0 \iff t = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

	0		$\frac{7}{4}$		2
x'		+	0	−	

$y'(t) = 0 \iff -3t^2 + 8t - 4 = 0 \quad \Delta = 16 > 0$

$t_1 = \frac{-8-4}{-6} = \frac{12}{6} = 2 \qquad t_2 = \frac{-8+4}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$

	0		$\frac{2}{3}$		2
y'		−	0	+	0 −

Tableau des variations conjointes de x et y

t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{7}{4}$	2
$x'(t)$	14	+	8,66	+	0	− −2
$x(t)$	−6 ↗		1,5 ↗		6,25 ↘	6
$y(t)$	2 ↘		0,8 ↗		1,8 ↗	2
$y'(t)$	−4	−	0	+	0,8 +	0

1

Tableau de valeurs et Vecteurs directeurs demandés.

cf fig P. 7

t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{7}{4}$	2
x	−6	0	1,5	4	6,25	6
y	2	0,8	0,8	1	1,8	2
x'	14		8,66	6	0	−2
y'	−4		0	1	0,8	0

• Demontrons que (H_1) est une hyperbole et precisons le centre et les asymptôtes.

$$(H_1) : x^2 - y^2 + \frac{9}{4}y + \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} = 0 \iff \left(x^2 + \frac{5}{4}x\right) - \left(y^2 - \frac{9}{4}y\right) - \frac{7}{2} = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{25}{64} - \left[\left(y - \frac{9}{8}\right)^2 - \frac{81}{64}\right] - \frac{7}{2} = 0$$

$$\iff \left(x+\frac{5}{8}\right)^2 - \left(y - \frac{9}{8}\right)^2 - \frac{25}{64} + \frac{81}{64} - \frac{224}{64} = 0 \iff \left(x + \frac{5}{8}\right)^2 - \left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{21}{8}$$

$$M(x, y) \in (H_1) \iff \frac{\left(x + \frac{5}{8}\right)^2}{\frac{21}{8}} - \frac{\left(y - \frac{9}{8}\right)^2}{\frac{21}{8}} = 1$$

$M(x, y) \in (H_1) \iff \dfrac{\left(x+\frac{5}{8}\right)^2}{\sqrt{\frac{21}{8}}^2} - \dfrac{\left(y - \frac{9}{8}\right)^2}{\sqrt{\frac{21}{8}}^2} = 1$ Soit $\Omega\begin{pmatrix}-\frac{5}{8}\\ \frac{9}{8}\end{pmatrix}$ et

$M(X, Y)$ dans le repere $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ on a $\begin{cases} X = x + \frac{5}{8} \\ Y = y - \frac{9}{8} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = X - \frac{5}{8} \\ y = Y + \frac{9}{8} \end{cases}$

$M\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \in (H_1) \iff \dfrac{X^2}{\sqrt{\frac{21}{8}}^2} - \dfrac{Y^2}{\sqrt{\frac{21}{8}}^2} = 1$ donc (H_1) est une hyperbole de centre $\Omega_1\left(-\frac{5}{8}; \frac{9}{8}\right)$ et d'asymptotes les droites d'equations $Y = X$ et $Y = -X$ dans le repere $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

(et d'équations dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $y = x + \frac{7}{4}$ et $y = -x + \frac{1}{2}$)

Rq $a = b = \sqrt{\frac{21}{8}}$ donc (H_1) est une hyperbole equilatère d'axe focal $(\Omega, \vec{i})$ et $e = \sqrt{2}$.

3°) Donner une equation de l'ensemble (H_2) des points M tels que O, I et M' soient alignés où I est le centre de gravité de ABC.

$$z_I = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-1 + 3i + 1 + i - 4}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}i$$

$O\ I\ M'$ alignés $\iff \det(\vec{OI}, \vec{OM'}) = 0 \iff \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & x' \\ \frac{4}{3} & y' \end{vmatrix} = 0 \iff -\frac{4}{3}y' - \frac{4}{3}x' = 0$

$$\iff y' + x' = 0 \iff 16xy + 10y - 18x - 8 = 0$$

$$\iff 8xy + 5y - 9x - 4 = 0$$

$$\iff y(8x+5) = 9x + 4 \iff y = \frac{9x+4}{8x+5} \quad \left(\forall x \neq -\frac{5}{8}\right)$$

(H_2) admet une équation de la forme $y = \dfrac{9x+4}{8x+5}$ (fonction homographique) donc (H_2) est une hyperbole de centre $\Omega_2\left(-\frac{5}{8}, \frac{9}{8}\right)$ et d'asymptôtes les droites d'equations $x = -\frac{5}{8}$ et $y = \frac{9}{8}$.

II $M(z) \longmapsto M'(z')$ avec $z' = f(z) - g(z)$. 15

$$f(z) - g(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i - z^3 - 2 + 2i$$

$$f(z) - g(z) = 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 18 + 10i$$

1°) Déterminons les coordonnées de $M'(x', y')$ en fonction de celles de $M(x, y)$.

$$z' = x' + iy' = 4(1-i)(x+iy)^2 - 2(2+7i)(x+iy) - 18 + 10i$$

$$z' = x' + iy' = (4-4i)(x^2 - y^2 + 2ixy) - (4+14i)(x+iy) - 18 + 10i$$

$$= 4x^2 - 4y^2 + 8ixy - 4ix^2 + 4iy^2 + 8xy - 4x - 4iy - 14ix + 14y - 18 + 10i$$

$$z' = x' + iy' = -18 + 4x^2 - 4y^2 + 8xy - 4x + 14y + i(8xy - 4x^2 + 4y^2 - 4y - 14x + 10)$$

donc $\boxed{\begin{cases} x' = 4x^2 - 4y^2 + 8xy - 4x + 14y - 18 \\ y' = 8xy - 4x^2 + 4y^2 - 4y - 14x + 10 \end{cases}}$

2°) Déterminons une équation de l'ensemble (H_1) des points M tels que O, B et M' soient alignés. $\vec{OB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{OM'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

O, B et M' alignés $\iff \det(\vec{OB}, \vec{OM'}) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & x' \\ 1 & y' \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff y' - x' = 0$$

$$\iff \cancel{8xy} - 4x^2 + 4y^2 - 4y - 14x + 10 - 4x^2 + 4y^2 - \cancel{8xy} + 4x - 14y + 18 = 0$$

$$\iff -8x^2 + 8y^2 - 18y - 10x + 28 = 0$$

$$\iff -4x^2 + 4y^2 - 9y - 5x + 14 = 0$$

$$\boxed{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (H_1) \iff -4x^2 + 4y^2 - 9y - 5x + 14 = 0}$$

Rq $-4x^2 + 4y^2 - 9y - 5x + 14 = 0 \iff x^2 - y^2 + \frac{9}{4}y + \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} = 0$