

PROPOSITION DE CORRIGE DE GRILLE DE CORRECTION
(Epreuve de mathématiques BAC C et E session 2015)

Exercice 1 (6 points)

1.a) Soit M_0, M_1 et M_2 trois points plan tels que $M_0 \neq M_1$ et $M_1 \neq M_2$ (leurs affixes étant deux à deux distinctes). Il existe une unique similitude directe S du plan transformant M_0 en M_1 et M_1 en M_2 .

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
1.a	Mise en évidence de la distinction des points M_0 et M_1 , puis M_1 et M_2		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0,25	
			Traite totalement la tache	0,5	

1.b) S est une similitude directe plane. Elle a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des complexes.

$$S(M_0) = M_1 \text{ et } S(M_1) = M_2 \text{ conduisent au système } \begin{cases} a(-4 + i) + b = -2 - 3i \\ a(-2 - 3i) + b = 1 - 4i \end{cases}$$

On en déduit que $a = \frac{1+i}{2}$ et $b = \frac{1-3i}{2}$

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
1. b)	Ecriture complexe de $S z' = az + b$		Ne traite pas la tache	0	.../0,5 pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0,5	

1.c) Rapport : $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Angle : $Arg(a) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ Centre Ω d' affixe $\omega = 2 - i$.

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
1.c)	Rapport, angle et affixe du centre de S		Ne traite pas la tache	0	.../0,75pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Trouve deux des trois caractéristiques	0,50	
			Réponse plaquée	0,25	

1.d) D'une part : $\omega - z' = 2 - i - \left(\frac{1+i}{2}z + \frac{1-3i}{2}\right) = i \left(\frac{1-3i}{2} - \frac{1-i}{2}z\right)$ (*)

D'autre part : $-i(z - z') = -i\left(z - \frac{1+i}{2}z - \frac{1-3i}{2}\right) = i \left(\frac{1-3i}{2} - \frac{1-i}{2}z\right)$ (**)

Ces deux relations entraînent l'égalité : $\omega - z' = -i(z - z')$

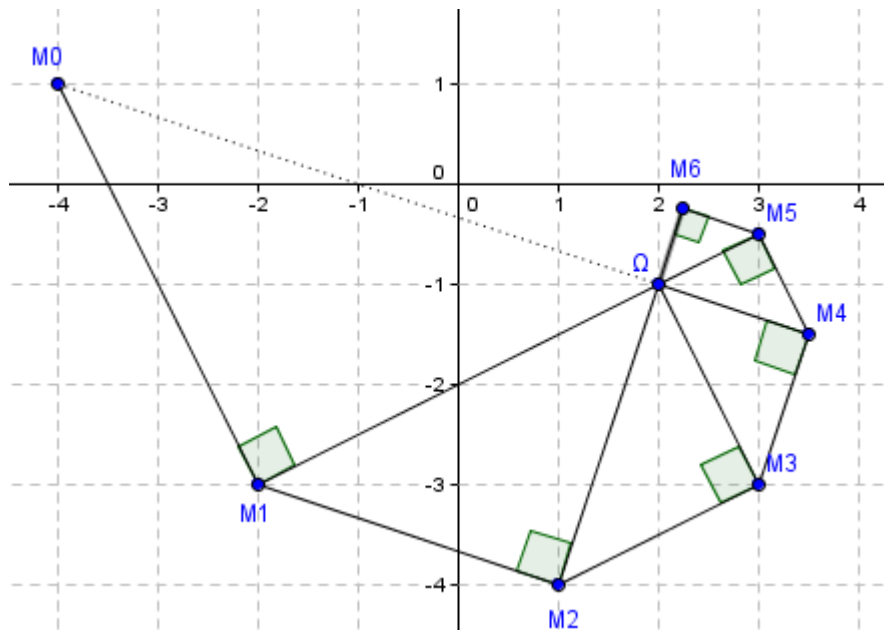
Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
1.d)	Vérification de l'égalité		Ne traite pas la tache	0	.../0,5 pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.5	

1.d') L'égalité $\omega - z' = -i(z - z')$ entraîne que $\frac{\omega - z'}{z - z'} = -i$.

Le triangle $\Omega MM'$ est rectangle et isocèle en M' .

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
1.d')	Interprétation du module et de l'argument $\frac{\omega - z'}{z - z'}$ pour donner la nature du triangle $\Omega MM'$		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.25	
			Réponse plaquée	0.25	
	Triangle rectangle isocèle		0,5	.../0,5 pt	

2.a) voir figure ci-dessous :



Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
2.a)	Construction des points		Ne traite pas la tache	0	.../0,75 pts
			Entre un et deux 2 points	0.25	
			Entre 3 et 4 points	0,5	
			Plus de 5 points	0,75	

2.b) Pour tout entier $n \geq 0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{M_{n+1}M_{n+2}}{M_nM_{n+1}}$;

Or $(S(M_n) = M_{n+1} \text{ et } S(M_{n+1}) = M_{n+2})$ entraine que : $\frac{M_{n+1}M_{n+2}}{M_nM_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $u_0 = M_0M_1 = 2\sqrt{5}$

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
2.b)	Justification de l'égalité des rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{M_{n+1}M_{n+2}}{M_nM_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$		Ne traite pas la tache	0	.../0.5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.5	

3.a) v_n est la somme de $(n + 1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2\sqrt{5}$

et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où : $v_n = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{5} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
3.a)	Mise en évidence du calcul de v_n		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.5	
	Réponse plaquée	0.25			

3. b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2\sqrt{5}(2 + \sqrt{2})$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = 1$.

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
3.b)	Limite de v_n		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.5	
	Réponse plaquée		0.25		

4a) On a : $\Omega M_n = r_n = |z_n - \omega| = |z_{n-1} - z_n| = M_{n-1}M_n = u_{n-1} = u_0 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = 2\sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
4.a)	Expression de r_n en fonction de n		Ne traite pas la tache	0	.../0.5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.5	
	Réponse plaquée		0.25		

4b) $2\sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} < 0,001 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} < \frac{0,001}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow (n-1)\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \ln\left(\frac{0,001}{2\sqrt{5}}\right) \Leftrightarrow n-1 > \frac{\ln\left(\frac{0,001}{2\sqrt{5}}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$;

On trouve $n = 26$.

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
4.b)	Détermination du plus petit entier n vérifiant $r_n < 0,001$		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.5	
	Réponse plaquée		0.25		

Exercice 2 (5 points)

1a) un couple d'entier vérifiant l'équation : $10x + 11y = 1$ est $(u, v) = (-1; 1)$

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
1.a)(*)	Détermination $(u; v)$		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.5	
	Réponse plaquée		0.25		

Une solution particulière de (E) est $(x_0; y_0) = (-95; 95)$.

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
1.a)(**)	Détermination de la solution particulière de (E)		Ne traite pas la tache	0	.../0,25 pt
			Traite totalement la tache	0.25	
	Réponse plaquée		0.25		

1.b) On a : $10x + 11y = 10x_0 + 11y_0 \Rightarrow 10(x - x_0) = 11(y_0 - y)$.

Or 10 et 11 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss : $11/(x - x_0)$ et $10/(y_0 - y)$;

D'où : $\begin{cases} x = -95 + 11k \\ y = 95 - 10k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

$S = \{(-95 + 11k, 95 - 10k)\} (k \in \mathbb{Z})$.

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
1.b)	Résolution de (E)		Ne traite pas la tache	0	.../1pt
			Démarche incomplète	0.5	
			Traite totalement la tache	1	
	Réponse plaquée		0.5		

2. On s'intéresse aux points du plan (OIJ) appartenant aussi (\mathcal{P}) , donc $z = 0$.

De plus x et y sont des entiers naturels, donc : $-95 + 11k \geq 0$ et $95 - 10k \geq 0$.

D'où : $k = 9$.

L'unique point de (\mathcal{P}) et du plan (OIJ) ayant pour coordonnées des entiers naturels est le point de coordonnées $(4; 5; 0)$.

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
2.	Détermination du triplet d'entiers naturel		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.5	
	Réponse plaquée	0.25			

3.a) On a : $11y = 95 - 10x - 12z = 95 - 2(5x + 6z)$;

Or la somme de deux entiers, l'un pair et l'autre impair est un entier impair, donc $11y$ est impair, à fortiori y est impair.

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
3.a)	Parité de y		Ne traite pas la tache	0	.../0,50pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.5	

3.b) en utilisant les congruences modulo 5, on a :

$$10x \equiv 0[5]; 11y \equiv y[5] \text{ et } 12z \equiv 2z[5];$$

$$\text{Donc : } 10x + 11y + 12z \equiv y + 2z[5] \text{ et } 95 \equiv 0[5];$$

$$\text{Soit : } 2(p + z) \equiv 4[5]$$

$$\text{C'est-à-dire : } 2(p + z - 2) = 5k, k \in \mathbb{Z}.$$

Or 2 et 5 premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $p + z - 2$.

$$\text{D'où : } p + z \equiv 2[5].$$

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
3.b)	Etablir l'égalité $2(p + z) \equiv 4[5]$ et utilisation le théorème de Gauss		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.5	

3.c) En remplaçant y par $2p + 1$ et z par $5q - p + 2$ dans l'égalité

$$10x + 11y + 12z = 95, \text{ on obtient : } x + p + 6q = 6 (*).$$

De la relation (*), on a : $x + p = 6(1 - q) \geq 0$, donc $1 - q \geq 0$.

D'où les deux possibilités : $q = 0$ ou $q = 1$.

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
3.c)	Vérification de l'égalité $x + p + 6q = 6$		Ne traite pas la tache	0	.../0,25pt
			Traite totalement la tache	0.25	

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
3c)	Valeurs prises par q		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0.5	

3.d) Détermination des triplets d'entiers naturels suivants les valeurs de q .

$$\text{➤ Pour } q = 0, \begin{cases} x = 6 - p \\ y = 2p + 1 \\ z = 2 - p \end{cases} \text{ et puis que } x, y \text{ et } z \text{ sont être des entiers naturels, on a la contrainte } 2 - p \geq 0.$$

Soit $p \in \{0; 1; 2\}$; nous obtenons les triplets d'entiers naturels suivants : $(6; 1; 2)$, $(5; 3; 1)$ et $(4; 5; 0)$.

➤ Pour $q = 1, x = -p$; Or x est un entier naturel, donc nécessairement $p = 0$; d'où le triplet $(0; 1; 7)$.

$$S = \{(6; 1; 2), (5; 3; 1), (4; 5; 0), (0; 1; 7)\}$$

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
3d).	Détermination des triplet s d'entiers naturels suivants les valeurs de q		Ne traite pas la tache	0	.../0,5 pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Pour chaque 2 triplets justes	0.25	
	Réponse plaquée (pour deux triplets justes)	0.25			

Problème

Partie A : Etude de la fonction f_n

1) $f'_n(x)$ existe et on calcule $f'_n(x)$ en dérivant un quotient. On obtient $f'_n(x) = \frac{n-2-2\ln(x-1)}{(x-1)^3}$

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
1)	Calcul de $f'_n(x)$		Ne traite pas la tache	0	.../1pt
			Démarche incomplète	0,5	
			Traite totalement la tache	1	
	Réponse plaquée			0,5	

2) L'inéquation $f'_n(x) \geq 0$ équivaut à $x \leq 1 + e^{\frac{n-2}{2n}}$. On note $x_0 = 1 + e^{\frac{n-2}{2n}}$

On en déduit le signe de $f'_n(x)$:

x	1	x_0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
2)	Résoudre l'inéquation $f'_n(x) \geq 0$		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0,5	

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
2)	Dédution du signe de $f'_n(x)$		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.5	
	Réponse plaquée			0,5	

3) La limite de f_n en 1 vaut $-\infty$ (par produit car $f_n(x) = (1 + n \ln(x-1)) \times \frac{1}{(x-1)}$)

La limite de f_n en $+\infty$ vaut 0 (par croissance comparée).

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
3)	La limite de f_n en 1		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0,5	
	Réponse plaquée			0,25	
	La limite de f_n en $+\infty$		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
Démarche incomplète			0,25		
Traite totalement la tache			0,5		

4) a) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On vérifie que : $f_n(1 + e^{\frac{n-2}{2n}}) = \frac{n}{2} \exp(\frac{2-n}{n})$

b) Tableau de variation de f_n

x	1	x_0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	$-\infty$	$\frac{n}{2} \exp(\frac{2-n}{n})$	0

D'après le tableau de variation, la valeur maximale de f_n est $\frac{n}{2} \exp(\frac{2-n}{n})$.

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
4a)	Vérification de $f_n(1 + e^{\frac{n-2}{2n}}) = \frac{n}{2} \exp(\frac{2-n}{n})$		Ne traite pas la tache	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0.25	
			Traite totalement la tache	0,5	

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
4b)	Tableau de variation de f_n		Ne traite pas la tâche	0	.../0,5pt
			Tableau incomplet	0,25	
			Tableau complet (avec limites)	0,5	
	Calcul de la valeur maximale de f_n		Ne traite pas la tâche	0	.../0,25pt
Démarche incomplète			0,25		
Traite totalement la tâche			0,25		

Partie B : Représentation graphique de quelques fonctions f_n

1) Construction de (C_2) et (C_3)



Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
1)	Construire (C_2)		Ne traite pas la tâche	0	.../0,5pt
			Traite la tâche	0,5	
	Construire (C_3)		Ne traite pas la tâche	0	.../0,5pt
			Traite la tâche	0,5	

2a) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$ (*)

Déduction : d'après la relation (*), on a : $f_3(x) - f_2(x) = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

Donc, on a : $n(f_3(x) - f_2(x)) + \frac{1}{(x-1)^2} = n \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = f_n(x)$ (**)

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
2a)	Calcul de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$		Ne traite pas la tâche	0	.../0,5pt
			Traite la tâche	0,5	
	Déduction de l'expression de $f_n(x)$ en fonction de $f_2(x)$ et $f_3(x)$		Ne traite pas la tâche	0	.../0,5pt
			Traite la tâche	0,5	

b) D'après la relation (**), On a : $f_4(x) = 4(f_3(x) - f_2(x)) + \frac{1}{(x-1)^2}$

On fixe deux points de même abscisse $x \neq 2$: M_2 appartenant à (C_2) et M_3 appartenant à (C_3) .

L'ordonnée du point M_4 de (C_4) situé sur la droite verticale (M_2M_3) vaut $4M_2M_3 + \frac{1}{(x-1)^2}$.

On obtient tous les points (C_4) en faisant varier x dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

Remarque : toutes les courbes (C_n) passent par le point fixe de coordonnées $(2 ; 1)$

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
2b)	Ecrire l'expression de $f_4(x)$ en fonction de $f_2(x)$ et $f_3(x)$		Ne traite pas la tâche	0	.../0,25pt
			Traite la tâche	0,25	
	Explication de la construction d'un point de (C_4) à partir d'un point de (C_2) et d'un point de (C_3) de même abscisse		Ne traite pas la tâche	0	.../0,25pt
			Traite la tâche	0,25	
	Explication de la construction de (C_4) à partir de (C_2) de (C_3) de		Ne traite pas la tâche	0	.../0,25pt
			Traite la tâche	0,25	

Partie C : calcul d'aires

1) soit \mathcal{A} l'aire du domaine délimité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équation $x = 2$ et $x = e + 1$.

Par intégration par parties, on a :

$$\mathcal{A} = \int_2^{1+e} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx \times u.a = \left(\left[-\frac{\ln(x-1)}{x-1} \right]_2^{1+e} - \left[-\frac{1}{x-1} \right]_2^{1+e} \right) \times u.a = 25 \left(1 - \frac{2}{e} \right) cm^2$$

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
1)	Calcul de \mathcal{A}		Ne traite pas la tâche	0	.../0,75pt
			Démarche incomplète	0,5	
			Traite totalement la tâche	0,75	

$$2)a) A_2 = \int_2^{1+e} \frac{1+2\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx \times u.a = \int_2^{1+e} \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2\ln(x-1)}{(x-1)^2} \right) dx \times u.a = 50 \left(1 - \frac{2}{e} \right) + 25 \left(1 - \frac{1}{e} \right) cm^2 = 25 \left(3 - \frac{5}{e} \right) cm^2$$

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
2a)	Calcul de A_2		Ne traite pas la tâche	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0,25	
			Traite totalement la tâche	0,5	
	Résultat plaqué	0,25			

$$b) A_n = \int_2^{1+e} \frac{1+n\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx \times u.a = \int_2^{1+e} \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{n\ln(x-1)}{(x-1)^2} \right) dx \times u.a = 25 \left(1 - \frac{1}{e} \right) + 25n \left(1 - \frac{2}{e} \right) = 25 \left(1 + n - \frac{(1+2n)}{e} \right) = 25 \frac{e-1+(e-2)n}{e}$$

(A_n) est une suite arithmétique de raison $25 \frac{(e-2)}{e}$ et de premier terme A_2 .

Questions	indicateurs	Sous indicateurs	Echelle de valeurs		pondération
2b)	Démarche de Calcul de A_n		Ne traite pas la tâche	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0,25	
			Traite totalement la tâche	0,5	
	Nature de la suite (A_n)		Ne traite pas la tâche	0	.../0,5pt
			Démarche incomplète	0,25	
			Traite totalement la tâche	0,5	