Série C

Juin 2004

X 703

Durée de l'épreuve : 4 Heures
Le candidat doit traiter les deux exercices et le Problème.

EXERCICE 1 5

Le plan complexe (P) est muni du repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{I}, \vec{J}\right)$.
On lance à la fois deux dés parfaits D_1 et D_2 et on note le nombre marqué sur la face supérieure de chacun d'eux lorsqu'ils sont retombés.

Sur les faces du dé D_1, sont marqués $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0 , 1 , -1 , $\sqrt{3}$, -2.

Sur les faces du dé D_2 sont marqués 1 , -1 , $\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$, 0 , 1.

On note u le nombre relevé sur D_1 et v celui relevé sur D_2.
On définit les transformations f et g du plan (P), d'écritures complexes respectives $z' = az + 1 + i$ et $z' = \overline{az} + i$ avec $a = u + iv$.

1) a) Déterminer la probabilité pour que f soit une similitude plane directe. 3
b) Calculer la probabilité pour que g soit un antidéplacement. 3

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A " f est une rotation d'angle droit". 3
B " f est une homothétie". 3
C " f est une similitude plane directe de centre I".

3) On donne $u = 1$ et $v = -1$ et on pose $h = g \circ f$.
a) Déterminer la nature de h. 2
b) Préciser les éléments caractéristiques de h. 2+2+2
c) Déterminer les coordonnées du centre et des sommets de l'image de l'ellipse (E) d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 2$ par h^{-1}. 10

EXERCICE 2 4

1°/ On considère la fonction numérique
$$u : \left]-\infty, 0\right] \to R$$
$$x \mapsto \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D de u. 2
b) Etudier le sens de variation de u. 2
c) Dresser le tableau de variation de u. 2

2°/ Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 1}\, dt$

a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. 2

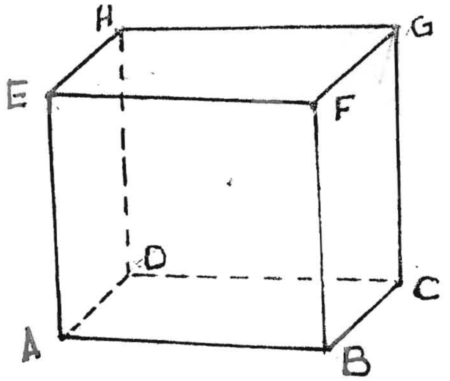
b) Préciser la fonction g', dérivée première de g sur R. 2

3°/ On pose $f = g \circ u$.
a) Justifier que f est dérivable sur $]-\infty , 0]$. 2
b) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty , 0]$. 3
c) En déduire l'expression de f en fonction de x, pour x élément de $]-\infty , 0]$. 6

Suite en page 2

PROBLEME

On considère dans l'espace $\mathscr{E}$, le cube A B C D E F G H suivant :



On désigne par $(\mathscr{P})$ le plan (BGE) et par (Q) le plan perpendiculaire à $(\mathscr{P})$ et contenant la droite (BG).
Soit I le point d'intersection de $(\mathscr{P})$ et de la droite (DF).

Partie A

1°) a) Démontrer que les droites (EG) et (EB) sont orthogonales respectivement aux plans (DHF) et (DFG).

b) En déduire que la droite (DF) est orthogonale au plan $(\mathscr{P})$.

2°) a) Déterminer $(Q) \cap (\mathscr{P})$.

b) Démontrer que (DF) est parallèle à (Q).

3°) a) Démontrer que A est le barycentre des points B, C et D affectés des coefficients que l'on déterminera.

b) Déterminer l'ensemble S des points M de $\mathscr{E}$ tels que :

$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = MC^2$$

4°) Soit h l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point M de $\mathscr{E}$ associe le point M' de $\mathscr{E}$ défini par : $\overrightarrow{CM'} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{AM} = \vec{O}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.

Partie B

L'espace $\mathscr{E}$ est associé par le repère orthonormé direct $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. Unité graphique : 1 cm.

5°) a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$. $\overrightarrow{AB}(1,0,0)$ $\overrightarrow{AD}(0,1;0)$

b) Déterminer les coordonnées de I.

6°) Déterminer une équation cartésienne de Q.

7°) Calculer le volume de l'image par h de la pyramide IABCD de base ABCD.

Suite en page 3

Partie C

Soit f l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 2) \end{cases}$$

8°) Soit M un point quelconque de $\mathscr{E}$, d'image M′ par f.

a) Démontrer que le milieu du segment [M M ′] appartient au plan $(\mathscr{P})$.

b) Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur normal de $(\mathscr{P})$.

9°) Déterminer l'ensemble des points de l'espace invariants par f.
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

- FIN -