Corrigé du bac Séries C-E- session 2003- sujet 1

Exercice 1 (5points)

1°) a) **Les coordonnées de I et J**

dans la base (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$) on a :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ alors I (1 ; 0 ; $\frac{1}{2}$) $\boxed{0,25 \text{ point}}$

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ or $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ alors $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc J (0 ; $\frac{2}{3}$; 1) $\boxed{0,25 \text{ point}}$

b) **A, I, J définissent un plan (P) et une équation cartésienne de (P).**

Il est évident que $\overrightarrow{AI} \neq \lambda\,\overrightarrow{AJ}$ alors les 3 points A, I et J ne sont pas alignés donc ils déterminent un plan de l'espace (P). $\boxed{0,25 \text{ point}}$

Un vecteur normal à ce plan (P) est $\vec{n} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ} = (-\frac{1}{3} ; -1 ; \frac{2}{3})$

M(x ;y ;z) ∈ (P) ⇔ $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ on trouve : (P) : x + 3y – 2z =0 $\boxed{0,75\text{point}}$

2°) a) **Volume du tétraèdre AIJE**

Ce solide est une pyramide à base triangulaire AIE et dont la hauteur est [EJ]

Le triangle AIE est isocèle en I, l'aire de ce triangle est $\mathcal{B} = \frac{1}{2}$ et h = EJ $\frac{2}{3}$

Le volume $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\,\mathcal{V} \times h = \frac{1}{9}$ exprimé en unité de volume. $\boxed{0,5 \text{ point}}$

b) **Aire de AIJ et la distance du point E au plan (P)**

en utilisant les propriétés du produit vectoriel on a :

$|| \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ} || \times \frac{1}{2}$ est l'aire du triangle AIJ, on trouve : $|| \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ} || \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{14}}{\cancel{2}\,6}$ $\boxed{0,5 \text{ point}}$

soit d la distance du point E au plan (P), considérant le tétraèdre AIJE, si AIJ est la base alors d serait la hauteur. En égalant les deux manières de calculer ce volume on trouve d

$\mathcal{V} = \frac{d}{3} \times \frac{\sqrt{14}}{\cancel{2}\,6}$ alors $d = \mathcal{V} \times \frac{18}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$ $\boxed{0,5 \text{ point}}$ $d = \frac{1}{9} \times \frac{18}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14}$

3°) a) **(P) et (Q) sécants**

(P) : x + 3y –2z = 0 et (Q) : 3x – 3y +6z – 8= 0

$\vec{n}_1$ (1 ; 3 ; -2) vecteur normal à (P)

$\vec{n}_2$ (3 ; -3 ; 6) vecteur normal à(Q), il est évident que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux plans ne sont parallèles ils sont sécants et un vecteur directeur de la droite d'intersection est $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (-12 ; 12 ; 12)$ colinéaire à (-1 ; 1 ; 1) $\boxed{0,5 \text{ point}}$

b) **Une représentation paramétrique de la droite d'intersection de (P) et (Q)**

exprimons x et y en fonction de z, puis on pose z = t, on trouve

$$\Delta : \begin{cases} 3x - 3y + 6z - 8 = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -\frac{2}{3} + t, \\ z = t \end{cases}$$ $\boxed{0,5 \text{ point}}$

pour t = 1 on obtient le point de coordonnées (1 ; $\frac{1}{3}$; 1) qui passe donc par Δ.

$\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BC}$

4°) **L'ensemble de points M tels que $\overrightarrow{ME} \wedge \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB}$**

$\overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

décomposons à l'aide du point O et utilisons les propriétés du produit vectoriel

$\overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MF} \wedge (\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FG}) = \overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{FG} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OF}) \wedge \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) \wedge (-\overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB} = (2\,\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OC}) \wedge \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{O}$

Cet ensemble est donc la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$ passant par O et de vecteur directeur BC $\boxed{1 \text{ point}}$ 1

<u>Exercice 2 (4 points)</u>

L' univers de cette épreuve $\Omega = \{(a\,;b) \text{ avec } 1 \le a \le 5 \text{ et } 1 \le b \le 5\}$

$\vec{u}\,(a\,;\,1)$ et $\vec{v}\,(ab - b + 6\,;\,b + 1)$

1°) **<u>Probabilité pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires</u>**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $a+b = 6$

Soit p la probabilité pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires :

p est la probabilité de l'événement $A=\{(1\,;5), (2\,;4), (3\,;3), (4\,;2), (5\,;1)\}$

$p = \dfrac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$ et $\overline{p} = 1 - p = \dfrac{4}{5}$ $\boxed{\text{0,5 point}}$

2°) a) **<u>Les probabilités des événements A_1, B_1 et C_1</u>**

Il y a indépendance entre les résultats des joueurs A et B, donc la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités.

A_1, B_1 et C_1 sont des intersections d'événements indépendants, d'après 1°) , on a :

$p(A_1) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{25}$ $p(B_1) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{25}$ $p(C_1) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{17}{25}$ $\boxed{\text{0,75 point}}$

A_1, B_1 et C_1 sont les trois issues exclusives de la première partie et on a bien que la somme de leurs probabilités est égale à 1.

b) **<u>Les intersections ensemblistes</u>**

puisque $C_{n+1} \subset C_n$ alors $C_{n+1} \cap C_n = C_{n+1}$.

de la même façon $A_{n+1} \subset C_n$ alors $A_{n+1} \cap C_n = A_{n+1}$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

$B_{n+1} \subset C_n$ alors $B_{n+1} \cap C_n = B_{n+1}$

c) **<u>Les probabilités des issues de la n+1 ième partie.</u>**

Comme toutes les parties la n+1ième partie a 3 éventualités exclusives. Toutes les parties se déroulent dans les mêmes conditions.

Le calcul direct des probabilités conditionnelles donne :

$P(C_{n+1} / C_n) = P(C_1) = \dfrac{17}{25}$ $P(A_{n+1} / C_n) = P(A_1) = \dfrac{4}{25}$ $P(B_{n+1} / C_n) = P(B_1) = \dfrac{4}{25}$ $\boxed{\text{0,5 point}}$

Les expressions à l'aide $P(C_n)$.

d'après 2°)b) et les propriétés des probabilités conditionnelles :

$P(C_{n+1}) = P(C_{n+1} \cap C_n) = P(C_{n+1} / C_n) \times P(C_n) = \dfrac{17}{25} \times P(C_n)$

$P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap C_n) = P(B_{n+1} / C_n) \times P(C_n) = \dfrac{4}{25} \times P(C_n)$ $\boxed{\text{0,75 point}}$

$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap C_n) = P(A_{n+1} / C_n) \times P(C_n) = \dfrac{4}{25} \times P(C_n)$

d) **<u>Calcul des probabilités $P(C_n)$, $P(A_n)$ $P(B_n)$</u>**

Les égalités précédentes sont des relations de récurrence.

La première relation définit les probabilités $P(C_n)$ comme une suite géométrique de raison $\dfrac{17}{25}$ et de premier terme $P(C_1) = \dfrac{17}{25}$ d'où : $P(C_n) = (\dfrac{17}{25})^n$ cqfd.

$P(B_n) = \dfrac{4}{25} \times P(C_{n-1}) = \dfrac{4}{25} \times (\dfrac{17}{25})^{n-1}$ $P(A_n) = \dfrac{4}{25} \times P(C_{n-1}) = \dfrac{4}{25} \times (\dfrac{17}{25})^{n-1}$ $\boxed{\text{0,75 point}}$

e) **<u>Le plus petit entier tel que $P(A_n) \le 0{,}01$</u>**

$\dfrac{4}{25} \times (\dfrac{17}{25})^{n-1} \le 0{,}01 \iff (\dfrac{17}{25})^{n-1} \le \dfrac{1}{16}$

par passage au logarithme

$(n-1)\ln(\dfrac{17}{25}) \le -\ln 16 \iff n \ge 1 - \dfrac{\ln 16}{\ln(\dfrac{17}{25})}$ $\boxed{\text{0,5 point}}$

on obtient : $n = 9$

Problème(11 points)

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} & pour\ x \neq -1 \\ f_n(-1) = 0 \end{cases}$$

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire $\boxed{\text{3,25 points}}$

N $\in \mathbb{N}^*$, pour tout x $\in \mathbb{R}$: $g_n(x) = (-2n + x + 1)\, e^{x+1} + 2n$

1°) a) **Les limites de g_n en $-\infty$ et en $+\infty$**

limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+1} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^{x+1})$ par somme on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x) = 2n$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+1} = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} (2n + x + 1)$ par produit et somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

b) **Sens et tableau de variation de g_n**

Sur $\mathbb{R}$ les fonctions : $x \to (-2n + x + 1)$ et $x \to e^{x+1}$ sont dérivables, par produit g_n est dérivable et

$g_n'(x) = (x - 2n + 2)e^{x+1}$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x+1} > 0$, g_n' a le même signe que $(x - 2n + 2)$

pour $x > 2n - 2$ $g_n'(x) > 0$ alors g_n est croissante

pour $x < 2n - 2$ $g_n'(x) < 0$ alors g_n est décroissante. $\boxed{\text{0,25 point}}$

Tableau de variation $\boxed{\text{0,25 point}}$

x	$-\infty$		$2n-2$		$+\infty$
signe de f'		-	0	+	
f	$2n$	↘	$g_n(2n-2)$	↗	$+\infty$

$g_n(2n-2) = 2n - e^{2n-1}$

$g_n(2n-2) = 2n - e^{2n-1}$

2°) **a) Calcul de $g_n(-1)$ et le signe de $2n - e^{2n-1}$**

$g_n(-1) = 0$ et $n \geq 1$ alors $2n - 2 \geq 0 \geq -1$

sur $]-\infty ; 2n-2[$ g_n est strictement décroissante donc $g_n(2n-2) < g_n(-1) = 0$

$g_n(2n-2) = 2n - e^{2n+1} < 0$. $\boxed{\text{0,25 point}}$

b) **Existence et unicité de α_n**

sur l'intervalle $]2n-2 ; +\infty[$, g_n est strictement croissante et continue ;

g_n réalise une bijection de $]2n-2 ; +\infty[$ sur $]2n - e^{2n-1} ; +\infty[$. 0 est une valeur intermédiaire, alors il existe d'après la propriété des fonctions continues strictement monotone un unique réel α_n tel que :

$g_n(\alpha_n) = 0$ avec $\alpha_n \in]2n-2 ; +\infty[$. $\boxed{\text{0,5 point}}$

c) **localisation de α_n**

$g_n(2n-2) < 0$ déjà démontré, $g_n(2n-1) = 2n > 0$

g_n est continue sur l'intervalle $]2n-2 ; 2n-1[$ et $g_n(2n-2)$, $g_n(2n-1)$ sont de signes contraires.

l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution dans cet intervalle

alors $\alpha_n \in]2n+ ; 2n-1[$ pour tout n> 0 $\boxed{\text{0,25 point}}$

ainsi $2n - 2 < \alpha_n < 2n - 1 < 2n < \alpha_{n+1} < 2n + 1$ càd la suite (α_n) est croissante $\boxed{\text{0,25 point}}$

3°) a)**Le signe de g_n**

d'après ce qui précède : $\boxed{\text{0,25 point}}$

x	$-\infty$		-1		α_n		$+\infty$
$g_n(x)$		+	0	-	0	+	

b) **les coordonnées de M_n et lieu des points M_n**

La courbe représentative de g_n admet un minimum en $x = 2n - 2$ donc M_n est le point de coordonnées $M_n(2n-2 ; 2n - e^{2n-1})$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

le lieu des points M_n est la courbe d'équation y = f(x), on trouve cette équation en exprimant l'ordonnée de M_n en fonction de son abscisse ; or $2n - e^{2n-1} = 2 + (2n-2) - e^{(2n-2)+1}$

donc $f(x) = 2 + x - e^{x+1}$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

Partie B (3,75 points)

1°) a) La continuité de f_n en -1

n $\in \mathbb{N}^*$, alors $2n \geq 2$ on sait aussi que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, en utilisant un changement de variable

$$f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} = \frac{X^{2n}}{1-e^X} = X^{2n-1} \times \frac{X}{1-e^X}$$ par produit on obtient :

$\lim\limits_{x \to -1} f_n(x) = 0 = f_n(-1)$ $\quad$ f_n est continue en -1 par suite sur $\mathbb{R}$ tout entier. $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

b) **dérivabilité en - 1**

cas n = 1

$$\frac{f_n(x) - f_n(-1)}{x+1} = \frac{x+1}{1-e^{x+1}} = \frac{X}{1-e^X} \quad avec\ X = x+1 \text{ et } \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

f_n est dérivable en -1 et $f_n'(-1) = -1$ car $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{X}{1-e^X} = -1$ $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

cas n > 1(2n > 2)

$$\frac{f_n(x) - f_n(-1)}{x+1} = \frac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} = X^{2n-1} \times \frac{X}{1-e^X} \quad avec\ X = x+1$$

on déduit que $f_n'(-1) = 0$,

f_n est dérivable en 0 et par suite dérivable sur $\mathbb{R}$ $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

2°) a) **Les limites en $-\infty$ et en $+\infty$**

en $-\infty$

$$f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} = \frac{X^{2n}}{1-e^X}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{X^{2n}}{1-e^X} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

en $+\infty$

$$f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} = \frac{X^{2n}}{1-e^X} = \frac{X^{2n}}{e^X} \times \frac{1}{e^{-X} - 1}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{2n}}{e^x} = 0$ et par produit on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

Les courbes (C_n) admettent l'axe (Ox) comme asymptote en $+\infty$.

b) **Calcul de la dérivée de f_n**

pour $x \neq -1$ f_n est le quotient de deux fonctions dérivables, alors elle est dérivable et on trouve :

$$f_n'(x) = \frac{(x+1)^{2n+1}\left[2n + e^{x+1}(-2n + x + 1)\right]}{(1-e^{x+1})^2}$$ c'est-à-dire : $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

$$f_n'(x) = \frac{(x+1)^{2n-1}}{(1-e^{x+1})^2} \times g_n(x) = \left[\frac{(x+1)^{n-1}}{1-e^{x+1}}\right]^2 \times (x+1) g_n(x)$$ $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

les calculs détaillés sont exigés

c) **Sens et tableau de variation**

f_n' a le même signe que le produit (x+1).g_n (x).

tableau des signes (n > 1)

x	$-\infty$		-1		α_n		$+\infty$
$(x+1)$		-	0	+	|	+	
$g_n(x)$		+	|	-	0	+	
$f'(x)$		-	0	-	0	+	

Pour $x \leq \alpha_n$ $f'(x) \leq 0$ alors f_n est décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha_n[$ $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

Pour $x \geq \alpha_n$ $f'(x) \geq 0$ f_n est croissante sur $]\alpha_n\ ;\ +\infty[$

Partie C (2,25 points)

p est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1.

Soit h_p la fonction définie sur l'intervalle $I_p = [2p - 2; 2p - 1]$; par :

$$h_p(x) = 2p - 1 - \frac{2p}{e^{x+1}}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2p - 2 \\ u_{n+1} = h_p(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier n.}$$

1°) **Equations équivalentes sur I_p**

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x+1} > 0$ (on pourra diviser donc par e^{x+1})

$g_p(x) = 0 \Leftrightarrow 2p + (-2p + x + 1)\, e^{x+1} \Leftrightarrow \frac{2p}{e^{x+1}} -2p + x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2p - 1 - \frac{2p}{e^{x+1}} = x \Leftrightarrow h_p(x) = x$ 0,25 point

2°)a) **localisation de h_p (x) et majoration de la dérivée**

$h_p'(x) = \frac{2p}{e^{x+1}} > 0$, sur I_p h_p est croissante alors : $h_p(2p-2) \leq h_p(x) \leq h_p(2p-1)$

$h_p(2p-2) = 2p - 1 - \frac{2p}{e^{2p-1}}$ et $2p - e^{2p-1} < 0$ d'après A° 2°)a) $\Leftrightarrow \frac{2p}{e^{2p-1}} < 1$

$\frac{2p}{e^{2p-1}} < 1 \Leftrightarrow -\frac{2p}{e^{2p-1}} > -1$ alors $h_p(2p-2) > 2p-2$ 0,25 point

$h_p(2p-1) = 2p - 1 - \frac{2p}{e^{2p}} < 2p - 1$ 0,25 point

on conclut que $h_p(x) \in I_p$

majoration de la dérivée

$h_p'(x) = \frac{2p}{e^{x+1}} > 0$ la fonction $x \to e^x$ est strictement croissante sur I_p

pour tout $x \in I_p$ on a $e^{2p-1} < e^{x+1} < e^{2p}$ par passage aux inverse et multiplication par 2p on obtient bien que : $h_p'(x) = \frac{2p}{e^{x+1}} < \frac{2p}{e^{2p-1}} < 1$ la dernière inégalité a été établie plus haut grâce à A2°) a). 0,25 point

3°) a) **Les $u_n \in I_p$** 0,25 point

$u_0 \in I_p$ puisque si $x \in I_p$ $h_p(x) \in I_p$ alors $u_1 = h_p(u_0) \in I_p$ par récurrence on établit que tous les $u_n \in I_p$

b) **Les accroissements finis**

h_p est dérivable sur I_p, sa dérivée est bornée par k_p sur I_p, les $u_n \in I_p$ et $\alpha_n \in I_p$ de plus $h_p(\alpha_n) = \alpha_n$ alors :

$|h_p(u_n) - h_p(\alpha_n)| \leq k_p |u_n - \alpha_n|$ 0,25 point

en écrivant cette relation pour tous les entiers consécutifs de 1 à n on obtient après simplifications :

$0 \leq |u_n - \alpha_p| \leq k_p^n$ 0,25 point

$k_p < 1$ alors $\lim k_p^n = 0$ (suite géométrique de raison < 1) 0,25 point

par suite u_n converge et $\lim u_n = \alpha_n$ 0,25 point

Partie D (2,25 points)

$v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1°) a) **Existence de v_n**

f_n est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle $[-1 ; -1 + \frac{1}{n}]$,

elle y admet des primitives d'où l'existence de v_n 0,25 point

b) **$v_n \leq 0$**

$[-1 ; -1 + \frac{1}{n}] \subset [-1 ; 0]$, pour tout $n \geq 1$ f_n est négative sur $[-1 ; 0]$, l'intégrale d'un fonction négative sur [a,b] est négative, d'où $v_n \leq 0$. 0,25 point

Tableau de variations $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

x	$-\infty$		-1		α_n		$+\infty$
signe de f_n'			$-$			$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\nearrow$	0

3°) a) **les points communs des courbes (C_2) et (C_3)**

on sait que : $f_n(-1) = 0$ alors A(-1 ; 0) est un point commun à toutes les courbes.

Pour $x \neq -1$ après simplifications :

$f_2(x) = f_3(x) \Leftrightarrow (x+1)^4 = (x+1)^6 \Leftrightarrow 1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$ $\qquad f_2(0) = \dfrac{1}{1-e}$ et $f_2(-2) = \dfrac{1}{1-e^{-1}}$

On a deux autres points communs $B\left(0 \; ; \dfrac{1}{1-e}\right)$, $C\left(-2 \; ; \dfrac{1}{1-e^{-1}}\right)$ $\qquad \boxed{0{,}25 \text{ point}}$

b) **position relative des courbes (C_2) et (C_3)**

$$f_2(x) - f_3(x) = \frac{-x(x+1)^4(x+2)}{1-e^{x+1}}$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$e^{x+1}-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_2 - f_3$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

(C_2) est en dessous de (C_3) sur $]-\infty \; ; -2[\cup]-1 \; ; 0[$

(C_2) est au dessus de (C_3) sur $]-2 \; ; -1[\cup]0 \; ; +\infty[$ $\qquad \boxed{0{,}25 \text{ point}}$

Représentations graphiques de (C_2) et (C_3) $2 < \alpha_2 < 3 < 4 < \alpha_3 < 5$

Apprécier si malgré la calculatrice le candidat est capable de représenter une fonction dont les valeurs sont grandes, même partiellement, (unité 2cm). $\boxed{1 \text{ point}}$

$\dfrac{1}{1-e} \simeq -0{,}6 \qquad \dfrac{e}{e-1} \simeq 1{,}6 \qquad f_2(2) \simeq -4{,}2 \quad f_2(3) \simeq -4{,}7 \quad f_2(6) \simeq -2{,}1 \quad f_3(1) \simeq -10 \qquad f_3(2) \simeq -38{,}2$

c) **(v_n) est croissante**

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est négative sur [-1 ;0] et donc sur tout sous- intervalle de [-1 ;0]

n+1> n entraîne $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $-1 + \frac{1}{n+1} < -1 + \frac{1}{n}$, d'après la relation de Chasles :

$$v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} f_n(x)dx + \int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)dx = \cancel{v_{n+1}} + \int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)dx$$

v_n

Voir en bas car erreur du correcteur officiel.

$$v_{n+1} - v_n = -\int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)dx \geq 0 \text{ car } f_n < 0 \text{ sur } [-1+\frac{1}{n+1} ; -1 + \frac{1}{n}]$$ $\boxed{\text{0,5 point}}$

la suite (v_n) est donc croissante et majorée par 0 alors elle converge. $\boxed{\text{0,25 point}}$

2°) **a) Encadrement de f_n sur [-1 ;0]**

f_n décroît sur [-1 ;0] pour tout x ∈[-1 ;0] on a donc $f_n(0) \leq f_n(x) \leq f_n(-1)$

or $f_n(0) = \frac{1}{1-e}$ et $f_n(-1) = 0$ d'où : $\frac{1}{1-e} \leq f_n(x) \leq 0$ $\boxed{\text{0,5 point}}$

b) **Inégalité et intégrale, limite**

on intègre membre à membre l'inégalité précédente ce qui donne :

$\frac{1}{1-e} \times \frac{1}{n} \leq v_n \leq 0$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

d'après le « théorème des gendarmes » $\lim v_n = 0$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

Rq

$$v_{n+1} = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} f_{n+1}(x)\,dx \quad \text{avec} \quad f_{n+1}(x) = \frac{(x+1)^{2n+2}}{1-e^{x+1}}$$

$$v_{n+1} - v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} f_{n+1}(x)\,dx - \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} f_{n+1}(x)\,dx - \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} f_n(x)\,dx - \int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} (f_{n+1}(x) - f_n(x))\,dx - \int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} \frac{(x+1)^{2n}(x^2-1)}{1-e^{x+1}}\,dx - \int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx.$$

or $\frac{x^2-1}{1-e^{x+1}} > 0$ sur $]-1 ; 1]$ et $-f_n > 0$ donc

$v_{n+1} - v_n \geq 0$ et $v_{n+1} \geq v_n$ et la suite $(v_n) \nearrow$.