BAC C R.C.I. session 95

EXERCICE I

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + x^2}\,dx$.

1°) a) Démontrer que u_n est défini pour tout entier naturel non nul n.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_n \geq 0$.

2°) a) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3°) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_n = \int_0^1 x^n\,dx$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

EXERCICE II

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel strictement positif. On considère le point A de coordonnées (a, 0) et B le point de coordonnées (a, a).

On désigne par R la rotation de centre O et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$, par S la symétrie de centre B et par R' la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $F = R' \circ S \circ R$.

1°) Quelle est la nature de la transformation F ? Précisez ses éléments caractéristiques (on pourra considérer l'image par F du point C défini par $C = R^{-1}(B)$).

2°) Soit (D) la droite d'équation $x + y = a$ et $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite (D). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation composée $S_{(D)} \circ F$.

PROBLEME

Partie A:

Soit la fonction g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = -x|x| + 1 - \ln|x|$$

1°) Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

2°) a) Déterminer le signe de g(x) sur $]-\infty, 0[$.

b) Calculer g(1). Déterminer le signe de g(x) sur $]0, +\infty[$.

Partie B:

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -|x| + \frac{\ln|x|}{x}$$

Soit (C_f) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J) (l'unité sera prise égale à 1 cm).

1°) En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2°) Déterminer le signe de f(x) sur $]0 ; +\infty[$.

3°) Montrer que les droites (Δ) d'équation $y = x$ et (Δ') d'équation $y = -x$ sont asymptotes à (C_f).

4°) a) Déterminer l'intersection de (C_f) et (Δ') sur $]0, +\infty[$.

b) Etudier la position relative de (C_f) et de (Δ') sur $]0, +\infty[$.

5) a) Déterminer l'intersection de (C_f) et (Δ) sur $]-\infty, 0[$.

b) Etudier la position relative de (C_f) et de (Δ) sur $]-\infty, 0[$.

6°) Tracer (Δ), (Δ') et (C_f)

Partie C:

On se propose de déterminer l'intersection de (C_f) et (Δ') sur $]-\infty, 0[$.

Soit la fonction h définie sur $]-\infty, 0[$ par :

$h(x) = f(x) + x$.

1°) Etudier les variations de la fonction h et dresser son tableau de variation.

2°) a) Montrer que l'équation $x \in]-\infty, 0[,\ f(x) = -x$ admet une solution unique α.

b) Montrer que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$

Partie D.

1°) Soit t un nombre réel tel que $t \geq 1$.

Calculer l'aire A(t) de la partie du plan délimitée par (Δ'), (C_f) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.

2°) On pose, pour tout nombre réel t tel que $t \geq 1$:

$$I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I(t).

b) Montrer que : $0 \leq I(t) \leq 1$.

c) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$