REPUBLIQUE GABONAISE **2004 - 1 - MATHEMATIQUES**

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

Série : **D**

Durée : **4 heures**

Coef. : **4**

Exercice 1 : **(5 points)**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives : $a=\sqrt{3}-i$ et $b=\sqrt{3}-1-i(\sqrt{3}+1)$.

1° a) Donner la forme exponentielle du complexe a.

b) Vérifier que : $\dfrac{a}{a-b}=-i$. En déduire la nature du triangle OAB.

c) Construire avec précision le point A, puis le point B dans le repère $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

2° a) Déterminer les caractéristiques de la similitude plane directe S de centre O qui transforme A en B.

b) Donner l'écriture complexe de S.

c) Déterminer l'image C de B par S.

3° On désigne par G, le barycentre des points A et B respectivement affectés des coefficients 2 et -1, et par φ l'application du plan complexe $(\mathscr{P})$ dans IR qui à tout point M de $(\mathscr{P})$ associe le nombre réel $\varphi(M)=2\,MA^2-MB^2$.

a) Vérifier que le point A est le milieu de $[GB]$. Calculer l'affixe g du point G.

b) Calculer $\varphi(G)$ puis vérifier que pour tout point M du plan $(\mathscr{P})$, $\varphi(M)=MG^2-8$.

c) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_A des points M du plan tels que : $\varphi(M)=-4$.

d) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_B des points M du plan tels que : $\varphi(M)=8$.

Exercice 2 : **(4 points)**

Le taux de glycémie doit rester stable dans le sang. Cet équilibre est assuré par un processus géré par le cerveau qui envoie des messages pour corriger ce taux dès qu'il décèle un changement. Des examens menés sur un patient dans un laboratoire ont permis de dresser le tableau ci-dessous qui indique la durée x_i de l'observation en minutes et le taux de glycémie y_i du patient exprimé en *g/l*.

x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	2	1,83	1,67	1,53	1,40	1,28	1,17	1,07	0,97	0,89	0,81

1° Représenter le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal où l'unité graphique est 0,5 *cm* sur l'axe des abscisses et 5 *cm* sur l'axe des ordonnées.

2° Justifier à l'aide de votre calculatrice qu'un ajustement affine est envisageable. (*Pour cette question, le détail des calculs n'est pas demandé*).

3° Comme pour la santé on préfère allier rigueur et précision, on envisage un ajustement plus fin. On pose $z_i = \ln y_i$. Reproduire et compléter le tableau de la nouvelle série double $(x_i\,;\,z_i)$ ainsi obtenue. On y donnera les arrondis des z_i à 10^{-5} près.

4° Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. En déduire qu'un ajustement affine est convenable entre x et z.

5° Donner une équation de la droite de régression de z en x.

6° Vérifier alors que l'on peut écrire y sous la forme $y = Ce^{ax}$, où C est un arrondi entier et a l'arrondi à 10^{-3} près d'un nombre décimal. Tracer sur le nuage de points obtenu au 1°, la courbe de la fonction qui à tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,50]$, associe y.

7° a) Déterminer le taux de glycémie pour $x = 8$.

b) On suppose que le taux de glycémie est normal lorsqu'il est inférieur à $1{,}1$. Au bout de combien de minutes le taux de glycémie du patient est-il redevenu normal ?

Problème : **(11 points)**

Partie A : **(3 points)**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 2y' + y = 4e^{-x}.$$

1° On désigne par u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^2 e^{-x}$. Vérifier que u est une solution de l'équation différentielle (E).

2° On pose pour tout réel x, $f(x) = g(x) + u(x)$. Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle :

$$(E') : y'' + 2y' + y = 0.$$

3° a) Résoudre l'équation différentielle (E').

b) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

c) Déterminer la fonction f solution de (E), telle que : $f(0) = 0$ et $f'(0) = -3$.

Partie B : **(5 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x^2 - 3x)e^{-x}$.

1° a) Etudier le sens de variations de la fonction f.

b) Etudier les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation la fonction f, puis tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ où l'unité graphique est 1 *cm*.

2° En remarquant que f est solution de (E), montrer qu'il existe une primitive F de f telle que pour tout réel x on ait : $f'(x) + 2f(x) + F(x) = -4e^{-x}$.

En déduire $F(x)$.

3° a) Soit α un réel strictement supérieur à 2. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=2$ et $x=\alpha$

b) Montrer que $\mathcal{A}(\alpha)$ a une limite réelle en - ∞ ; puis en donner une interprétation graphique.

Partie C : **(3 points)**

Dans cette partie on considère les solutions f_m de l'équation différentielle (E) définie par : $f_m(x)=(2x^2-3x+m)e^{-x}$, où le paramètre réel m est donné par le résultat du lancer d'un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1° Calculer la fonction dérivée de la fonction f_m puis vérifier que f_m est strictement décroissante si et seulement si $m \geq \frac{25}{8}$.

2° En déduire que la probabilité que la fonction soit strictement décroissante à chaque lancer du dé est $p=\frac{1}{2}$.

3° On lance trois fois de suite le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fonctions f_m strictement décroissantes.

Corrigé Mathématiques 2004-1-D

Exercice 1 (5 points)

1° a) <u>*Forme exponentielle du complexe a :*</u>

On a : $a=\sqrt{3}-i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. **(0,25 point)**

b) <u>*Vérification d'une égalité puis nature du triangle OAB :*</u>

On a bien : $\frac{a}{a-b}=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{-i(1+i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})}=-i$.

Il s'ensuit que : $\begin{cases}\left|\frac{a}{a-b}\right|=\left|-i\right|=1\\ \arg(\frac{a}{a-b})=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$, soit $\begin{cases}OA=AB\\ (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$. Le triangle OAB est donc rectangle et isocèle en A. **(0,25+0,50=0,75 point)**

c) <u>*Construction géométrique des points A et B :*</u>

Le point A est le point du quatrième quadrant du cercle de centre O et de rayon 2 qui a pour ordonnée le réel -1 puisque $|a|=2$ et $\mathrm{Im}(a)=-1$.

Le point B est l'image du point O par le quart de tour direct de centre A puisque :

$\begin{cases}AB=AO\\ (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}\end{cases}$. **(0,25+0,25=0,5 point)**

2° a) <u>*Caractéristique de la similitude S :*</u>

De la configuration du triangle OAB on tire que : $\begin{cases}OB=\sqrt{2}\,OA\\ (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=-\frac{\pi}{4}\end{cases}$; On peut donc conclure que la similitude S a pour centre O pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle $-\frac{\pi}{4}$. **(0,5 point)**

b) <u>*Ecriture complexe de S :*</u>

On a immédiatement pour tout point M d'affixe z d'image M' d'affixe z' par S :

$$z'=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}z=(1-i)z.$$

Ainsi S a pour écriture complexe : $z'=(1-i)z$. **(0,25 point)**

c) <u>*Image du point B par S :*</u>

L'image C du point B par S a pour affixe le complexe :

$c=(1-i)(\sqrt{3}-1-i(\sqrt{3}+1)=\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-1=-2-2i\sqrt{3}$. **(0,25 point)**

3° a) <u>*Soit à vérifier que A est le milieu de [GB], puis calcul de l'affixe de G :*</u>

Comme le point G est le barycentre du système : $\{(A;2);(B;-1)\}$, alors on a :

$2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Ainsi le point A est bien le milieu de $[GB]$.

Le barycentre G du système : $\{(A;2);(B;-1)\}$ a pour affixe le complexe

$g=2a-b=2(\sqrt{3}-i)-\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}-2i-\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}+i=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$.

Ainsi l'affixe du point G est $g=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$. **(0,25+0,25=0,5point)**

b) *Calcul de φ (G) et vérification de l'égalité :* $\varphi(M)=MG^2-8$:

On a : $\varphi(G)=2GA^2-GB^2=2AB^2-4AB^2=-2AB^2=-2OA^2=-8$;
car puisque A est milieu de $[GB]$, on a : $AG=AB$ et $GB=2AB$.
Ainsi $\varphi(G)=-8$.

De plus pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ on a : $\varphi(M)=2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2-(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2$.

On a donc : $\varphi(M)=2(MG^2+GA^2)-(MG^2+GB^2)+2\overrightarrow{MG}.(2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB})$.

soit : $\varphi(M)=MG^2+\varphi(G)=MG^2-8$; car G étant barycentre, $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
(0,25+0,5=0,75 point)

c) *Détermination et construction de* Γ_A.
On a les équivalences successives suivantes :

$$M\in\Gamma_A \Leftrightarrow \varphi(M)=-4 \Leftrightarrow MG^2-8=-4 \Leftrightarrow MG^2=4 \Leftrightarrow GM=2.$$

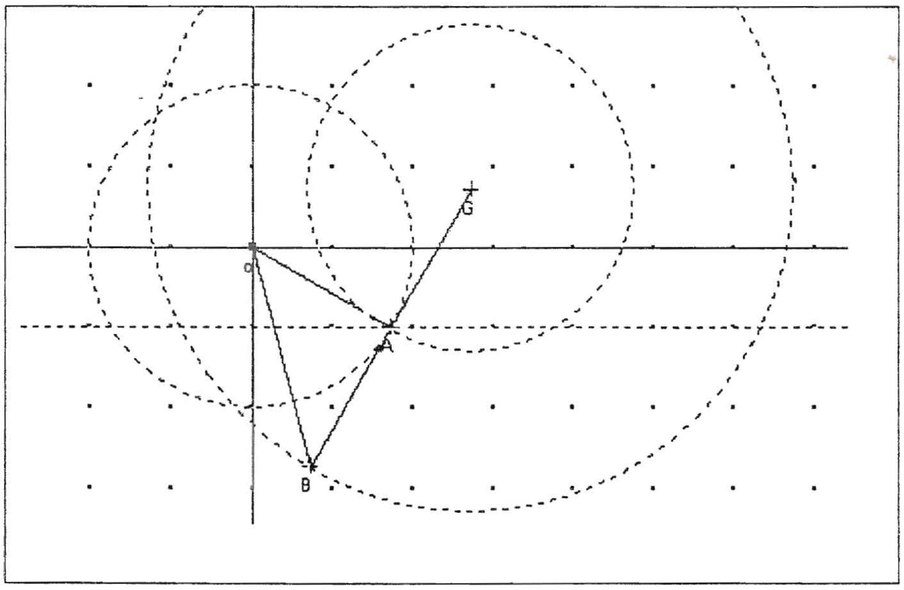
Ainsi Γ_A est le cercle de centre G et de rayon 2. (Un tel cercle passe par le point A).
(Voir figure) **(0,5+0,25=0,75 point)**

d) *Détermination et construction de* Γ_B.
On a les équivalences successives suivantes :

$$M\in\Gamma_B \Leftrightarrow \varphi(M)=8 \Leftrightarrow MG^2-8=8 \Leftrightarrow MG^2=16 \Leftrightarrow GM=4.$$

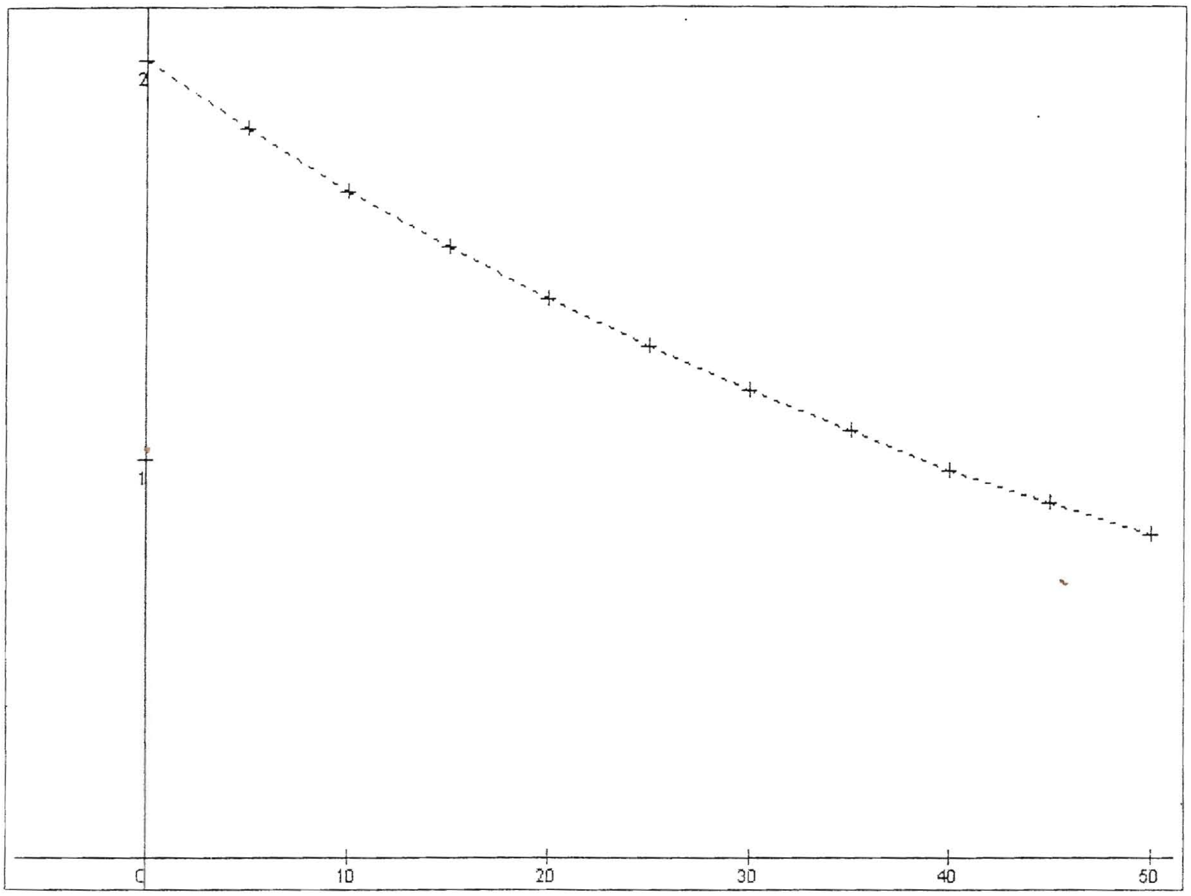
Ainsi Γ_B est le cercle de centre G et de rayon 4. (Un tel cercle passe par le point B).
(Voir figure) **(0,5+0,25=0,75 point)**

Figure



Exercice 2 (4 points)

1° *Nuage de points* :



(0,5 point)

2° *Justification d'ajustement* :

La calculatrice donne pour coefficient de corrélation linéaire $r = -0{,}9929474948$ entre x et y, un ajustement affine est donc bien envisageable entre x et y. **(0,25 point)**

3° *Tableau de la nouvelle série double* :

x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
z_i	0,69315	0,60432	0,51282	0,42527	0,33647	0,24686	0,157	0,06766	-0,03046	-0,11653	-0,21072

(0,5 point)

4° *Calcul du coefficient de corrélation linéaire entre x et z.* :

On a $\sum x = 275 \Rightarrow \overline{X} = \dfrac{275}{11} = 25.$

De même $\sum z = 2{,}68584 \Rightarrow \overline{Z} = 0{,}244167272.$

De même : $\sum z^2 = 1{,}55178728 \Rightarrow V(Z) = \overline{Z^2} - \overline{Z}^2 = \dfrac{1{,}55178728}{11} - (0{,}244167272)^2$

$$\Rightarrow \quad \sigma_Z = \sqrt{V(Z)} = 0{,}2854013202 .$$

En outre on a : $\sum xz = 17{,}5096 \Rightarrow \operatorname{cov}(X,Z) = \overline{XZ} - \overline{X}\,\overline{Z}$. Ainsi

$\operatorname{cov}(X,Z) = \dfrac{17.5096}{11} - 25 \times 0{,}244167272 = -4{,}512399982$.

Le coefficient de corrélation linéaire est le réel

$r = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Z)}{\sigma_X \times \sigma_Z} = \dfrac{-4{,}512399982}{15{,}8113883 \times 0{,}2854013202} = -0{,}99995765$.

Conséquence :

Comme $|r| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on peut conclure qu'il y a une forte corrélation linéaire entre x et z , et qu'un ajustement affine est parfaitement envisageable entre x et z. **(1+0,25=1,25 points)**

5° *Equation de la droite de régression de z en x* :

La droite de régression de z en x a pour équation réduite :

$$y = a(x - \overline{X}) + \overline{Z} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\operatorname{cov}(X,Z)}{V(X)} = \frac{-4{,}512399982}{250} = -0{,}018049 .$$

On trouve donc $z = -0{,}018x + 0{,}695$. **(0,5 point)**

6° *Expression de y en fonction de x* :

Comme $z = \ln y$, alors on a $y = e^z = e^{-0{,}018x+0{,}695} = e^{0{,}495}\, e^{-0{,}018x} = 2\,e^{-0{,}018x}$. **(0,5 point)**

7° *Des estimations* :

a) Pour $x = 8$ on a : $y = 1{,}73$ **(0,25 point)**

b) Pour avoir $y < 1{,}1$, on doit avoir $2e^{-0{,}018x} < 1{,}1 \Leftrightarrow e^{-0{,}018x} < 0{,}55$

$$\Leftrightarrow -0{,}018x < \ln 0{,}55 \Leftrightarrow x > -\frac{\ln 0{,}55}{0{,}018} \approx 33{,}21 .$$

Ainsi au bout de la 34ème minute, le taux de glycémie du patient est revenu à la normale. **(0,25 point)**

Problème (11 points)

Partie A : (3 points)

1° *On veut vérifier que u est solution de (E)* :

La fonction u est dérivable sur IR et $u'(x) = (4x - 2x^2)e^{-x}$; la fonction u' est aussi dérivable sur IR et $u''(x) = (2x^2 - 8x + 4)e^{-x}$; et on a pour tout réel x,

$$u''(x) + 2u'(x) + u(x) = (2x^2 - 8x + 4)e^{-x} + 2(4x - 2x^2)e^{-x} + 2x^2 e^{-x} = 4e^{-x} .$$

Ainsi u est bien une solution de (E) **(0,5 point)**

2° *Vérification d'une équivalence* :

- Supposer que la fonction $f = g + u$ est solution de (E) implique que f est deux fois dérivable sur IR et par suite g également, et que pour tout réel x on a : $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 4e^{-x}$; et comme u est solution de (E), alors $(f-u)'' + 2(f-u)' + (f-u)$ est la fonction nulle ce qui implique que la fonction que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 2y' + y = 0$

- Réciproquement, supposer que la fonction $g = f - u$ est solution de (E') implique que g est deux fois dérivable sur IR et par suite *f* également, et que pour tout réel x on a : $(f-u)''(x)+2(f-u)'(x)+(f-u)(x)=0$, ce qui implique que pour tout réel x on a : $f''(x)+2f'(x)+f(x)=g''(x)+2g'(x)+g(x)=4e^{-x}$, et que *f* est solution de l'équation différentielle (E) **(0,25+0,25=0,5 point)**

3° a) *On veut résoudre (E')* :
(E') est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. Elle a pour équation caractéristique : $r^2+2r+1=0$, qui admet une racine double $r_0=-1$.
(E') a donc pour solutions générales les fonctions définies sur IR par : $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$, où a et b sont deux réels arbitraires. **(0,5 point)**

b) *On veut déduire les solutions de (E)* :
Selon la question 2 qui précède les solutions générales de (E) s'obtiennent comme somme des solutions générales de (E') et de la solution particulière u.
Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :
$x \mapsto (2x^2+ax+b)e^{-x}$, où a et b sont deux réels arbitraires. **0,5 point)**

c) *On veut déterminer une solution sous conditions initiales* :
Avec $f(x)=(2x^2+ax+b)e^{-x}$ on a $f'(x)=(-2x^2+(4-a)x+a-b)e^{-x}$; les fonctions *f* solutions de (E) telle que l'on ait : $f(0)=0$ et $f'(0)=-3$, sont définies par les réels a et b solutions du système : $\begin{cases} b=0 \\ a-b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-3 \end{cases}$. Ainsi la fonctions *f* cherchée est définie sur IR par $f(x)=(2x^2-3x)e^{-x}$ **(0,5 point)**

Partie B. (5 points)

1° a) *On veut étudier le sens de variations de la fonction f* :
La fonction *f* est dérivable sur IR et $f'(x)=(-2x^2+7x-3)e^{-x}$; comme sur IR on a : $e^{-x} > 0$ alors la dérivée a le même signe que : $-2x^2+7x-3$; trinôme du second degré ayant pour racines $\frac{1}{2}$ et 3. On peut donc dire que la dérivée est négative sur les intervalles $\left]-\infty \,;\, \frac{1}{2}\right]$ et $[3\,;\,+\infty[$, et positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,3\right]$. Par suite la fonction est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$, strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,3\right]$ et de nouveau strictement décroissante sur $[3\,;\,+\infty[$. **(0,5+0,5+0,25=1,25 points)**

b) *On veut étudier les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$:*

- On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-3x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

- On sait que pour tout réel non nul x, et pour tout entier naturel non nul on a : $x^n e^{-x} = \dfrac{x^n}{e^x} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^n}}$; et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$; on a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$

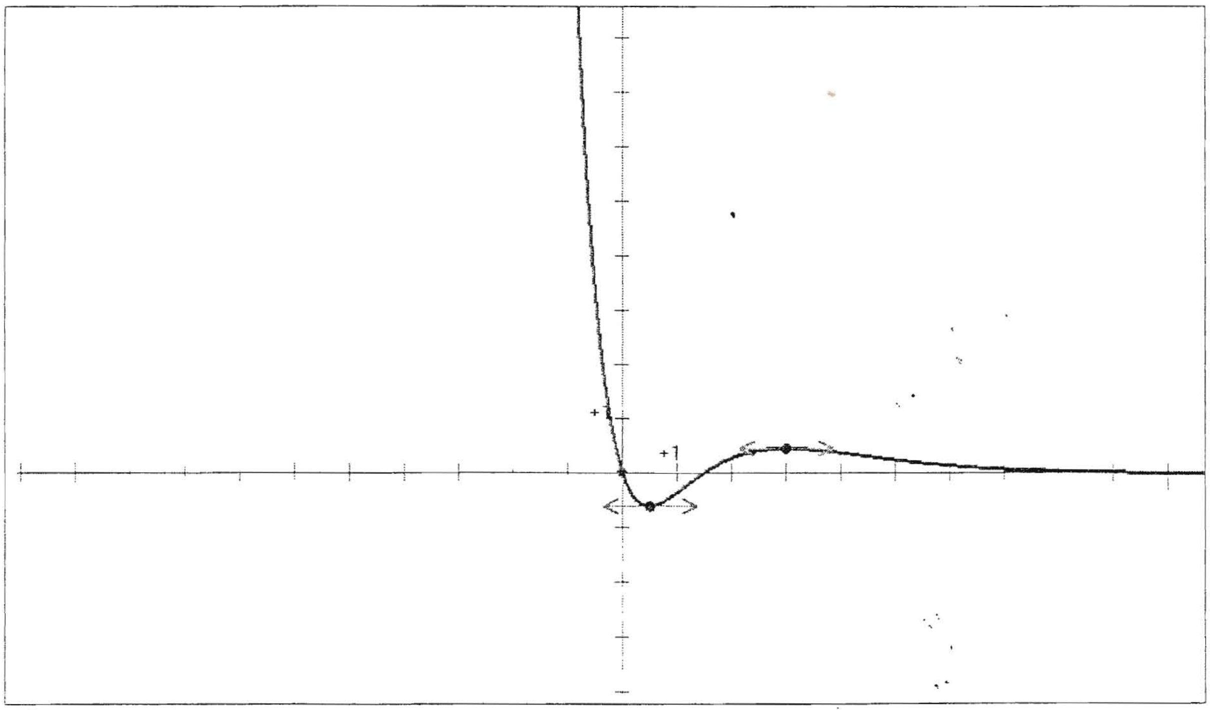
  et comme $f(x) = 2x^2 e^{-x} - 3xe^{-x}$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **(0,25+0,25=0,5 point)**

c) <u>*Tableau de variation la fonction f* :</u>

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(0,5)$	↗	$f(3)$	↘	0

(0,25 point)

c) *Courbe :* **(0,75 point)**



2° <u>*Existence et calcul de primitive*</u> :

Comme f est une solution de l'équation différentielle (E), f est continue car dérivable et admet donc des primitives sur IR et on a pour tout réel x, $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 4e^{-x}$. En passant aux primitives on a bien une primitive F telle que : $f'(x)+2f(x)+F(x)=-4e^{-x}$, toute autre primitive de f différant de F par une constante. De plus $F(x)=-(2x^2+x+1)e^{-x}$

(0,5+0,5=1 point)

3° a) *Un calcul d'aire :*

En cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine plan donné est $\int_2^{\alpha} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_2^{\alpha}=F(\alpha)-F(2)$

$\mathcal{A}(\alpha)=11e^{-2}-(2\alpha^2+\alpha+1)e^{-\alpha}$ **(0,5 point)**

b) *Limite d'aire et interprétation*

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha)=11e^{-2}$ en cm^2.

Le domaine plan illimité contenu dans le demi-plan de bord, la droite d'équation $x=2$, ne passant pas par l'origine, et qui est compris entre l'axe des abscisses et la courbe, a une aire finie égale à $11e^{-2}$ en cm^2 **(0,5+0,25=0,75 point)**

Partie C (3 points)

1° *Calcul de dérivée et monotonie d'une famille de fonction :*

La fonction f_m est dérivable sur IR et $f_m'(x)=(-2x^2+7x-3-m)e^{-x}$. Comme $e^{-x}>0$, la dérivée a le même signe que le trinôme $-2x^2+7x-3-m$; la fonction est donc strictement monotone lorsque le trinôme reste négatif sur IR, ce qui a lieu lorsque son discriminant est négatif. On doit donc avoir $49-4(-2)(-3-m)\le 0 \iff 25-8m\le 0 \iff m\ge \frac{25}{8}$.

(0,5+0,5=1 point)

2° *Probabilité d'avoir une fonction strictement décroissante :*

Pour avoir une fonction strictement décroissante il faut que m prenne les valeurs 4, 5 ou 6.

La probabilité cherchée est donc $p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ **(1 point)**

3° *Probabilité d'obtenir exactement deux fonctions strictement monotones en lançant trois fois de suite le dé :*

On est en présence d'un schéma de Bernoulli et la probabilité demandée est :

$$C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$ **(1 point)**