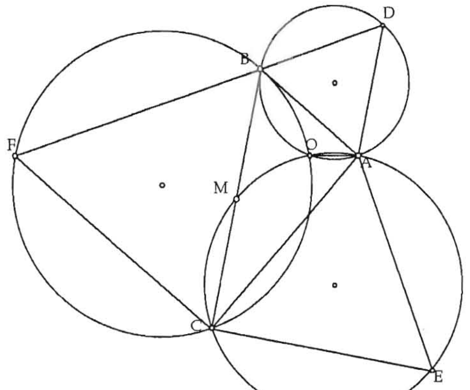
Correction session 96

EXERCICE I



1°b) B = f(A) et C = f(B) donc BC = 2 BA et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ <=> $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ <=> $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

Dans le triangle ABC soit M le milieu de [BC]. On a donc BM = BA et l'angle B de mesure $\frac{\pi}{3}$ le triangle ABM est donc équilatéral. Alors BC = 2 AM et (AM) est donc la médiane d'un triangle rectangle.

2°b) Le triangle ADB est équilatéral par construction. Donc, le point D est le symétrique de A par la réflexion d'axe la médiatrice de [AD]. On a donc $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ = - $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$. Donc $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{3}$. Or B = f(A) d'où $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3}$. On a alors $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ $[\pi]$. Les points n'étant pas alignés, d'après le théorème de la cocyclicité, on en déduit qu'ils sont cocycliques et appartiennent au cercle ($\mathcal{C}$).
B, F, C et O étant les images respectives par f de A, D, B et O, ces quatre points appartiennent à l'image par f du cercle circonscrit au triangle ADB. Ils sont donc cocycliques et appartiennent au cercle ($\mathcal{C}'$).

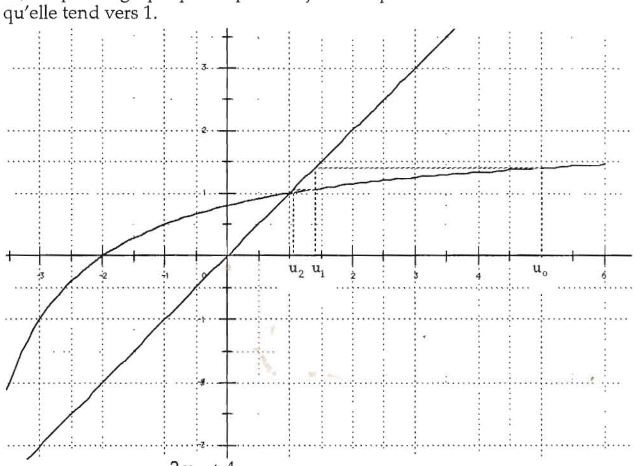
2°c) C = f [f(A)] donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{4\pi}{3}$ de plus E = R(C) donc, avec un raisonnement identique à la question précédente, on a $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ = - $(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA})$.
C'est à dire $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$ $[\pi]$. Les points n'étant pas alignés, ils sont cocycliques et appartiennent au cercle ($\mathcal{C}''$). Le point O est commun aux trois cercles.

EXERCICE II

1°) a) Un raisonnement par récurrence nous permet de démontrer le résultat pour tout n, $u_n > 0$.

b) pour cette question écrire u_n sous la forme $u_n = 2 - \frac{6}{u_n + 5}$ et faire un raisonnement par récurrence si $u_n \neq 1$ on a $u_n + 5 \neq 6$ donc $\frac{6}{u_n + 5} \neq 1$ soit $u_{n+1} \neq 1$

2°) D'après le graphique on peut conjecturer que la suite u est décroissante et qu'elle tend vers 1.



3°) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 4} = \dfrac{\frac{2u_n + 4}{u_n + 5} - 1}{\frac{2u_n + 4}{u_n + 5} + 4}$

$= \dfrac{u_n - 1}{6(u_n + 4)} = \dfrac{1}{6} v_n$

La suite v est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = \frac{4}{9}$ et de raison q = $\frac{1}{6}$. Sa raison étant strictement comprise entre - 1 et 1, elle converge vers 0. Or, $u_n = \dfrac{4v_n + 1}{1 - v_n}$ donc $\lim u_n = 1$.

PROBLEME

Partie A:

1°) $f'(x) = (1 - x)e^{1-x}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^{1-x} = -\infty$,

car $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}\, e = 0$,

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Le signe de f'(x) est le même que celui de 1 - x.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0

2°) Sur l'intervalle [0, u], f(x) étant positive, on a :

$A(u) = \int_0^u f(x)\,dx = \int_0^u x\, e^{1-x}\,dx = -\int_0^u (-x)\, e^{1-x}\,dx$

Faisons une intégration par parties :

Posons $v(x) = x$ et $w'(x) = e^{1-x}$

alors $v'(x) = 1$ et $w(x) = -e^{1-x}$

$A(u) = [-x e^{1-x}]_0^u - \int_0^u -e^{1-x}\,dx =$

$[-x e1-x]_0^u - [e^{1-x}]_0^u = e - e^{1-u} - u\,e^{1-u}$

$A(u) = e - e^{1-u} - u\,e^{1-u}$ unités d'aire

$= 9(e - e^{1-u} - u\,e^{1-u})\,cm^2$.

3°) $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u) = 9\,cm^2$.

Partie B:

1°) $f_2(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{1-x}$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2} x^2 e^{1-x} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} x^2 e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \frac{1}{2} e = 0$,

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$f'_2(x) = \frac{1}{2} x(2 - x)e^{1-x}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'_2(x)$		−	0	+	0	−	
$f_2(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

$f_3(x) = \frac{1}{6} x^3 e^{1-x}$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{6} x^3 e^{1-x} = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{6} x^3 e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} \frac{1}{6} e = 0$,

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

$f'_3(x) = \frac{1}{6} x^2 (3 - x)e^{1-x}$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'_3(x)$		+	0	+	0	−	
$f_3(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{3}{e}$	↘	0

2°) L'étude des fonctions f_n lorsque n est pair est identique à celle de f_2 et lorsque n est impair à f_3. D'où les tableaux de variations ci-dessous, pour chacun des cas.

n impair

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
f'		+	0	+	0	−	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{n}{e}$	↘	0

n pair

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f'_n(x)$		−	0	+	0	−	
$f_n(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{n}{e}$	↘	0

$f'_n(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1}(n - x)e^{1-x} = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{1-x} - \frac{1}{n!} x^n e^{1-x}$.

Donc $f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$.

Partie C:

1°) Pour tout n, entier naturel, f_n est le produit de deux fonctions continues et dérivables sur]$-\infty$; $+\infty$[donc f_n est aussi continue et dérivable, en particulier f_n est continue sur l'intervalle [0 , x] et admet donc sur cet intervalle une primitive qui s'annule en 0. $J_n(x)$ est cette intégrale.

2°) $J_n(x) - J_{n-1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt - \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt = \int_0^x f_n(t) - f_{n-1}(t)\,dt = -\int_0^x f'_n(t)\,dt = -[f_n(t)]_0^x = -f_n(x)$.

3°) Soit pour n ≥ 2 la proposition p(n) définie par :

$J_n(x) = J_1(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} f_k(x)$

• on vient de vérifier que $J_2(x) - J_1(x) = -f_2(x)$ soit que $J_2(x) = J_1(x) - f_2(x)$. C'est à dire que p(2) est vraie.

• Soit n ≥ 2 tel que p(n) soit vraie. D'après C2, on a $J_{n+1}(x) = J_n(x) - f_{n+1}(x)$, or $J_n(x) = J_1(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} f_k(x)$

donc $J_{n+1}(x) = J_n(x) - f_{n+1}(x)$

$= J_1(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} f_k(x) - f_{n+1}(x) = J_1(x) - \sum\limits_{k=2}^{n+1} f_k(x)$.

Donc p(n+1) est vraie.

• en conclusion, pour tout n ≥ 2,

$J_n(x) = J_1(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} f_k(x)$. C'est à dire donc que :

$J_n(x) = A(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} e^{1-x} = e - e^{1-x} - x\,e^{1-x} - e^{1-x} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}$

$= e - e^{1-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

4°) Nous avons vu dans la question B2 que sur l'intervalle [0, n], pour tout n, la fonction f_n est croissante. Elle est donc croissante sur l'intervalle [0 , 1] ; donc, pour tout x tel que $0 \le x \le 1$ on a $f_n(0) \le f_n(x) \le f_n(1) \Longleftrightarrow 0 \le f_n(x) \le f_n(1)$.

En utilisant le théorème de comparaison des intégrales, on obtient

$$0 \le \int_0^x f_n(x)\,dx \le \int_0^x f_n(1)\,dx$$

$\Longleftrightarrow 0 \le J_n(x) \le x\, f_n(1) \le f_n(1)$ car $x \le 1$

donc $0 \le J_n(x) \le \frac{1}{n!}$ or $\lim \frac{1}{n!} = 0$ alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n(x) = 0$.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = [\,e - J_n(x)\,]\,e^{x-1}$$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = e(e^{x-1}) = e^x$.

Partie D.

1°) J_n étant la primitive de f_n qui s'annule en 0, on a $F'_n(x) = f_n(x)$. Le signe de $F'_n(x)$ dépend donc essentiellement de celui de $f_n(x)$. D'après l'étude de la question B2, nous en déduisons : que si n est pair, $f_n(x) \ge 0$ sur] - ∞ , + ∞ [donc que J_n est croissante sur cet intervalle.

n pair

x	- ∞	0	+ ∞
$J'_n(x)$	+	0	+
$J_n(x)$	- ∞ ↗	0 ↗	e

$$\lim_{x\to+\infty} J_n(x) = \lim_{x\to+\infty} e - e^{1-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e - x^n e^{1-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x^{n-k}k!} = e$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e\frac{x^n}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x^{n-k}k!} = \frac{1}{n!}$

$$\lim_{x\to-\infty} J_n(x) = \lim_{x\to-\infty} e - e^{1-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = -\infty$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^k}{k!} = +\infty$.

D'après le tableau de variation de J_n, on en déduit donc que l'équation, $J_n((x) = e$, n'admet dans IR aucune solution.

2°) Si n est impair, d'après le tableau de variation de f_n, nous savons que sur] - ∞ , 0 [, $f_n(x) < 0$ donc que J_n est décroissante sur cet intervalle et, sur] 0, + ∞ [, $f_n(x) > 0$ donc J_n croissante sur cet intervalle.

De même que lorsque n est pair, $\lim\limits_{x\to+\infty} J_n(x) = e$

$$\lim_{x\to-\infty} J_n(x) = \lim_{x\to-\infty} e - e^{1-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^n}{n!} = -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{1-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x^{n-k}k!} = e$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e\frac{x^n}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x^{n-k}k!} = \frac{1}{n!}$.

D'après le tableau de variation de J_n, on en déduit donc que l'équation, $J_n((x) = e$, admet dans IR une seule solution négative.

n impair

x	- ∞	0	+ ∞
$J'_n(x)$	—	0	+
$J_n(x)$	+ ∞ ↘	0 ↗	e

3°) L'équation $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = 0$ se ramenant à $Jn(x) = e$ admet donc aucune solution lorsque n est impair et une solution négative lorsque n est pair.