

EXERCICE 1 : 6 points pour chaque réponse exacte.

1.	Réponse A	2.	6 points à tous les candidats ayant traité le qcm	3.	Réponse D	4.	6 points à tous les candidats ayant traité le qcm	5.	Réponse B
----	-----------	----	---------------------------------------------------	----	-----------	----	---------------------------------------------------	----	-----------

EXERCICE 2 : 30 points

1) Nombre d'abonnés en 2021 : $1500 - 1500 \times \frac{40}{100} + 400 = 1300$

Nombre d'abonnés en 2022 : $1300 - 1300 \times \frac{40}{100} + 400 = 1180$

On peut également utiliser l'expression de a_{n+1} pour calculer ces nombre d'abonnés

Question		Critères	Indicateurs	Pondération	
1)	1 ₁	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	3 pts
		Compréhension	Dans son calcul utilise une des données de l'exercice	1 pt	
		Utilisation	Formule du calcul du nombre d'abonnés exacte ou partiellement mais résultat faux	2 pts	
		Résultat	Résultat exacte avec formule exacte ou réponse exacte plaquée	3 pts	
	1 ₂	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	3 pts
		Compréhension	Dans son calcul utilise une des données de l'exercice	1 pt	
		Utilisation	Formule du calcul du nombre d'abonnés exacte ou partiellement mais résultat faux	2 pts	
		Résultat	Résultat exacte avec formule exacte ou réponse exacte plaquée	3 pts	

2) $v_n = a_n - 1000$

a) Donc $v_{n+1} = a_{n+1} - 1000 = 0,6a_n + 400 - 1000 = 0,6a_n - 600 = 0,6(a_n - 1000) = 0,6v_n$
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $0,6$.

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $0,6$ et de premier terme $v_0 = a_0 - 1000 = 500$
donc : $v_n = 500 \times 0,6^n$.

c) Par suite : $v_n = a_n - 1000$ donc $a_n = v_n + 1000$
or $v_n = 500 \times 0,6^n$ d'où $a_n = 500 \times 0,6^n + 1000$.

Question		Critères	Indicateurs	Pondération	
2)	a)	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	3 pts
		Compréhension	Tente de calculer v_{n+1} ou écrit $\frac{v_1}{v_0}$	1 pt	
		Utilisation	Tente de calculer v_{n+1} et utilise l'expression de a_{n+1} ou calcule $\frac{v_1}{v_0}$ et $\frac{v_2}{v_1}$	2 pts	
		Résultat	Démonstration exacte	3 pts	
	b)	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	3 pts
		Compréhension	Donne une expression erronée de v_n en fonction de n ou calcule v_0	1 pt	
Utilisation		Ecris la formule exacte de v_n ou calcule v_0	2 pts		

		Résultat	Résultat exacte avec formule exacte ou réponse exacte plaquée	3 pts	
	c)	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0 pt	3 pts
		Compréhension	Evoque v_n ou a_n ou donne une expression erronée de a_n	1 pt	
		Utilisation	Ecris que : $a_n = v_n + 1000$	2 pts	
		Résultat	Démonstration exacte	3 pts	

3)

a) Recette en 2020 : $1500 \times 300000 = 450\,000\,000$

b) $P_{n+1} = P_n + P_n \times 5\% = 1,05P_n$. (P_n) est donc une suite géométrique de raison 1,05. (P_n) étant une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $P_0 = 300000$ alors $P_n = 300000 \times 1,05^n$

c) La recette totale annuelle R_n réalisée par la société est donnée par le produit du nombre d'abonnés a_n par le prix d'un abonnement annuel P_n donc :
 $R_n = a_n \times P_n = (500 \times 0,6^n + 1000) \times (300000 \times 1,05^n)$.

2022 correspond à l'année de rang $n = 2$ et on a :

$$R_2 = (500 \times 0,6^2 + 1000) \times (300000 \times 1,05^2) = 390285000$$

Donc la recette éventuelle de cette société en 2022 sera de : 390285000FCFA

Question	Critères	Indicateurs	Pondération		
3)	a)	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	3 pts
		Compréhension	Dans son calcul utilise une des données de l'exercice en rapport avec la question	1 pt	
		Utilisation	Bonne opération mais résultat faux	2 pts	
		Résultat	Résultat exacte ou réponse exacte plaquée	3 pts	
	b1)	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	3 pts
		Compréhension	Donne une nature erronée de (P_n) en lien avec la notion de suite numérique	1 pt	
		Utilisation	Réponse plaquée exacte ou Fais un calcul utilisant 5% et P_n ou Entame un calcul de P_{n+1} ou évoque un taux d'évolution	2 pts	
		Résultat	Démontre que (P_n) est une suite géométrique de raison 1,05 par calcul direct de P_{n+1} ou à l'aide de la formule du taux d'évolution	3 pts	
	b2)	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	3 pts
		Compréhension	Donne une expression erronée de P_n en fonction de n	1 pt	
		Utilisation	Ecris la formule exacte de P_n ou calcule P_0	2 pts	
		Résultat	Résultat exacte avec formule exacte ou réponse exacte plaquée	3 pts	
c1)	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0 pt	3 pts	
	Compréhension	Ecris une formule erronée de la recette	1 pt		
	Utilisation	Evoque a_n et P_n ou écrit une formule erronée de la recette utilisant un produit	2 pts		
	Résultat	Démonstration exacte	3 pts		

	c ₂)	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0 pt	3 pts
		Compréhension	Donne une recette fausse ≥ 300000	1 pt	
		Utilisation	Donne le rang exacte de 2022 ou détermine une valeur numérique de R_n fausse	2 pts	
		Résultat	Donne le rang exacte de 2022 et R_2	3 pts	

Problème : 60 points

Partie A

1. a) Graphiquement, il n'est pas possible de déterminer le prix de vente en FCFA de 100 litres de jus de palme.

b) La droite (D), représentation graphique de la fonction g , passant par l'origine du repère, g est donc une application définie pour tout nombre réel x de l'intervalle I par : $g(x) = ax$, ou a est un nombre réel non nul.

(D) passant de plus par le point de coordonnées (100; 100000), on a donc : $g(100) = 100000$
Or : $g(100) = 100a$. Donc : $a = 1000$.

Ainsi, g est donc définie pour tout nombre réel x de l'intervalle I par : $g(x) = 1000x$.

c) Les deux courbes se coupant au point d'abscisse 1 et la droite (D) passe au-dessus de la courbe (C) à partir de cette abscisse, donc, pour que l'entreprise dégage un bénéfice il faudrait que l'artisan produise au moins **101 litres de jus de palme**.

Question	Critères	Indicateurs	Pondération	
1)	a)	3 points à tous les candidats ayant traité le problème		3 pts
	b)	Echec	Ne traite pas la tâche réponse hors sujet	0
		Compréhension	Affirme que g est une application affine ou donne une expression de $g(x)$ en fonction de x	2 pts
		Utilisation	Ecrit que g est définie par : $g(x) = ax$ Trouve $a = 1000$	4 pts
		Résultat	Détermine correctement l'expression de g .	6 pts
c)	6 points à tous les candidats ayant traité le problème		6 pts	

2. On admet que : $\int_1^3 20x \ln x dx = 90 \ln 3 - 40$

a) On sait que pour tout nombre réel x de l'intervalle I : $f(x) = -10x^2 - 20x \ln x$.

$$\text{Donc : } \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (-10x^2 - 20x \ln x) dx = -10 \int_1^3 x^2 dx - \int_1^3 (20x \ln x) dx$$

$$\text{Or : } \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 = \frac{26}{3} \text{ et } \int_1^3 (20x \ln x) dx = 90 \ln 3 - 40$$

$$\text{D'où : } \int_1^3 f(x) dx = 10 \times \frac{26}{3} - (90 \ln 3 - 40) = \frac{380 - 270 \ln 3}{3} \approx 28.$$

b) Déduisons, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne du coût total de production.

Soit M la valeur moyenne du coût total de production.

$$\text{On a : } M = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx$$

$$\text{Or, d'après ce qui précède, on sait que : } \int_1^3 f(x) dx = \frac{380-270\ln 3}{3}.$$

$$\text{D'où : } M = \frac{1}{2} \times \frac{380-270\ln 3}{3} = \frac{190-135\ln 3}{3} \approx \mathbf{140\ 000\ FCFA}.$$

Question		Critères	Indicateurs	Pondération	
2.	a)	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	6 pts
		Compréhension	Remplace $f(x)$ par son expression	2 pts	
		Utilisation	Utilise la linéarité de l'intégrale ou détermine une primitive de la fonction $x \mapsto x^2$	4 pts	
		Résultat	Détermine correctement le résultat attendu	6 pts	
	b)	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	6 pts
		Compréhension	Donne une formule erronée de la valeur moyenne	2 pts	
		Utilisation	Donne la formule de la valeur moyenne ou Exécute un calcul en rapport avec son résultat précédent	4 pts	
		Résultat	Détermine correctement au moins l'une des deux valeurs	6 pts	

Partie B (5 points)

B est définie sur l'intervalle $[1; 3]$ par : $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \ln x$.

1. Montrons que pour tout nombre x de l'intervalle $[1; 3]$, on a : $B'(x) = -20x + 30 + 20 \ln x$.

Pour tout nombre x de l'intervalle $[1; 3]$; on a :

$$B'(x) = -10 \times 2x + 10 + 20(\ln x + 1) = -20x + 30 + 20 \ln x$$

Question		Critères	Indicateurs	Pondération	
1.	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	6 pts	
	Compréhension	$B'(x)$ avec au moins un terme juste	2 pt		
	Utilisation	$B'(x)$ avec au moins deux termes justes	4 pts		
	Résultat	Etablit correctement le résultat attendu	6 pts		

2. a) B' étant strictement décroissante et continue sur $[1; 3]$, a fortiori elle l'est sur $[2,3; 2,4]$.

De plus, $B'(2,3) \approx 0,658$ et $B'(2,4) \approx -0,491$. Or : $0 \in [B'(2,4); B'(2,3)]$.

Donc l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2,3; 2,4]$.

En utilisant la méthode de balayage, on obtient successivement :

$$2,35 \leq \alpha \leq 2,36, \text{ puis } 2,357 \leq \alpha \leq 2,358.$$

D'où : $\alpha \approx 2,35$ à 10^{-2} près par défaut.

b) Déduisons le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1; 3]$, puis dressons son tableau de variation de la fonction B sur ce même intervalle.

D'après ce qui précède, B' étant strictement décroissante sur $[1; 3]$,

$$B'(1) = 10, B'(3) = -30 + 20 \ln 3 \text{ et } B'(\alpha) = 0, \text{ on a donc :}$$

$\forall x \in [1; \alpha[, B'(x) > 0; \forall x \in]\alpha; 3], B'(x) < 0.$

D'où : la fonction B est strictement croissante sur $[1; \alpha[$, strictement décroissante sur $]\alpha; 3]$ et $B(\alpha) \approx 8,43 \times 10^{-2}$ près par défaut. On a ainsi le tableau de variation suivant :

x	1	2,35	3
B'(x)	+	0	-
B(x)	0	8,4	5,9

Question		Critères	Indicateurs	Pondération	
2	a)	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	6 pts
		Compréhension	Fait état de la stricte monotonie ou de la continuité de B'	2 pts	
		Utilisation	Calcule $B'(2,3)$ et $B'(2,4)$ ou fait état du théorème des valeurs intermédiaires ou de la bijection	4 pts	
		Résultat	Détermine correctement le résultat attendu	6 pts	
	Encadrement de α	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	6 pts
		Compréhension	Ecrit : $2,35 \leq \alpha \leq 2,36$	2 pts	
		Utilisation	Ecrit : $2,357 \leq \alpha \leq 2,358$	4 pts	
		Résultat	Déduit la valeur de α attendue	6 pts	
b)	Signe de $B'(x)$	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	6 pts
		Compréhension	Donne un signe erronée de $B'(x)$	2 pts	
		Utilisation	Détermine un signe de $B'(x)$ dans un des intervalles	4 pts	
		Résultat	Détermine correctement le signe de $B'(x)$	6 pts	
	Tableau de variations de B	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	6 pts
		Compréhension	Dresse un tableau de variations faux	2 pts	
		Utilisation	Dresse un tableau de variations incomplet de la fonction B cohérent avec son signe de $B'(x)$.	4 pts	
		Résultat	Dresse le tableau de variations de la fonction B	6 pts	

3. Vérifions si le malafoutier peut envisager d'atteindre un bénéfice d'au moins 85 000 FCFA en maintenant sa production dans les mêmes conditions.

85 000FCFA correspond à 8,5 dizaines de milliers, soit $x = 8,5$.

Peut-on avoir $B(x) = 8,5$?

D'après l'étude de la fonction B , le maximum est atteint pour $x = 8,4$, soit un bénéfice maximum est de 84 000FCFA. Un bénéfice de 85 000FCFA n'est donc envisageable.

Question	Critères	Indicateurs	Pondération	
3.	Echec	Ne traite pas la tâche ou réponse hors sujet	0	3 pts
	Compréhension	Répond oui ou non à la question	1 pt	

	Utilisation	Justifie maladroitement avec la valeur de $B(\alpha)$	2 pts	
	Résultat	Justifie correctement la réponse attendue	3 pts	