BACCALAUREAT BLANC
Session de Février 2023

Epreuve de Mathématiques

Série : D **Durée : 4h** **Coefficient 4**

Exercice 1 : Questions à choix multiples(QCM) **(5 points)**

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. ***Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*** *Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln\left(\frac{e^x+3}{2e^x+1}\right)$. Sa limite en $+\infty$ est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$-ln2$	$+\infty$	0	$ln3$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$.

La suite (v_n) définie par $v_n = ln(u_n)$ est une suite :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
arithmétique de raison 2	géométrique de raison 2	arithmétique de raison $\frac{1}{2}$	géométrique de raison $\frac{1}{2}$

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i| = |z+1|$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
La droite (AB)	La médiatrice du segment $[AB]$	Un cercle de diamètre$[AB]$	Une sphère de diamètre$[AB]$

4. On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. La forme algébrique de z^3 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$	$2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}+i(2-\sqrt{2})$

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = cos(3x) + x$. Une primitive G sur $\mathbb{R}$ de la fonction g est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$G(x) = -3sin(3x) + 1$	$G(x) = sin(3x) + \frac{x^2}{2}$	$G(x) = \frac{1}{3}sin(3x) + \frac{x^2}{2}$	$G(x) = -\frac{1}{3}sin(3x) + \frac{x^2}{2}$

Exercice 2 : Nombres complexes et géométrie **(4 points)**

1. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+3i)z - 8 - 16i$
   a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
   b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que pour tout nombre complexe z, on ait :
   $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (-5+i)z + 8 - 4i = 0$.
   d) En déduire dans $\mathbb{C}$ la résolution de l'équation $P(z) = 0$

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 3 + i$ et $z_C = 2 - 2i$.
   a) Placer les points A, B et C.
   b) Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_A - z_B} = i$.
   c) En déduire la nature du triangle ABC.
3. Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D = \bar{z}_c$.
   a) Placer le point D sur la figure précédente.
   b) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle, dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

<u>Exercice 3</u> : Géométrie dans l'espace **(5 points)**

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On donne les points $A(2; 1; 3)$, $B(-3; -1; 7)$, $C(3; 2; 4)$ et $S(-7; 0; 4)$.

1. a) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - 3y + z - 4 = 0$.
2. Soit (Δ) la droite orthogonale au plan (ABC) et passant par le point S.
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) , puis vérifier que H est le barycentre de $(A, -2)$, $(B, -1)$, $(C, 2)$.
3. a) Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
   b) Déterminer le volume du tétraèdre SABC.
4. On considère l'ensemble (Γ) des points M de l'espace vérifiant : $\left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \sqrt{29}$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de(Γ).
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan(ABC) et (Γ).

<u>Exercice 4</u> : Etude d'une fonction comportant la fonction $\boldsymbol{ln}$ et sa réciproque **(6 points)**

Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $\boldsymbol{f(x) = (x-1)(1 - lnx)}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par :$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{x} - lnx}$.
   a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   b) Etudier le sens de variations de g et dresser son tableau de variation.
   c) Démontrer que l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha}$ dans l'intervalle $]\boldsymbol{0};\ +\infty[$ puis vérifier que $\boldsymbol{1,7 < \alpha < 1,8}$.
   d) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]\boldsymbol{0};\ +\infty[$.
2. a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   b) Justifier que f est dérivable sur $]\boldsymbol{0};\ +\infty[$ et montrer que pour $x \in\ ]\boldsymbol{0};\ +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
3. a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.
   b) Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses. Tracer $(\mathcal{C})$.
4. Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [\alpha;\ +\infty[$
   a) Démontrer que h réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Calculer $h(e)$.En déduire que h^{-1} est dérivable en 0 et calculer la valeur exacte de $(h^{-1})'(0)$.
   c) Construire la courbe $(\mathcal{C}')$représentative de la fonction h^{-1}.